FREGE GOTTLOB

DIE GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK

Gottlob Frege

Die Grundlagen der Arithmetik

Frege G.

Die Grundlagen der Arithmetik / G. Frege — «Public Domain»,

Содержание

Gottlob Frege
Die Grundlagen der Arithmetik / Eine logische mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl

Einleitung

Auf die Frage, was die Zahl Eins sei, oder was das Zeichen 1 bedeute, wird man meistens die Antwort erhalten: nun, ein Ding. Und wenn man dann darauf aufmerksam macht, dass der Satz keine Definition ist, weil auf der einen Seite der bestimmte Artikel, auf der andern der unbestimmte steht, dass er nur besagt, die Zahl Eins gehöre zu den Dingen, aber nicht, welches Ding sie sei, so wird man vielleicht aufgefordert, sich irgendein Ding zu wählen, das man Eins nennen wolle. Wenn aber Jeder das Recht hätte, unter diesem Namen zu verstehen, was er will, so würde derselbe Satz von der Eins für Verschiedene Verschiedenes bedeuten; es gäbe keinen gemeinsamen Inhalt solcher Sätze. Einige lehnen vielleicht die Frage mit dem Hinweise darauf ab, dass auch die Bedeutung des Buchstaben a in der Arithmetik nicht angegeben werden könne; und wenn man sage: a bedeutet eine Zahl, so könne hierin derselbe Fehler gefunden werden wie in der Definition: Eins ist ein Ding. Nun ist die Ablehnung der Frage in Bezug auf a ganz gerechtfertigt: es bedeutet keine bestimmte, angebbare Zahl, sondern dient dazu, die Allgemeinheit von Sätzen auszudrücken. Wenn man für a in $a + a - a = a$ eine beliebige aber überall dieselbe Zahl setzt, so erhält man immer eine wahre Gleichung. In diesem Sinne wird der Buchstabe a gebraucht. Aber bei der Eins liegt die Sache doch wesentlich anders. Können wir in der Gleichung $1 + 1 = 2$ für 1 beidemal denselben Gegenstand, etwa den Mond setzen? Vielmehr scheint es, dass wir für die erste 1 etwas Anderes wie für die zweite setzen müssen. Woran liegt es, dass hier grade das geschehen muss, was in jenem Falle ein Fehler wäre? Die Arithmetik kommt mit dem Buchstaben a allein nicht aus, sondern muss noch andere b, c u. s. w. gebrauchen, um Beziehungen zwischen verschiedenen Zahlen allgemein auszudrücken. So sollte man denken, könnte auch das Zeichen 1 nicht genügen, wenn es in ähnlicher Weise dazu diente, den Sätzen eine Allgemeinheit zu verleihen. Aber erscheint nicht die Zahl Eins als bestimmter Gegenstand mit angebbaren Eigenschaften, z. B. mit sich selbst multiplicirt unverändert zu bleiben? In diesem Sinne kann man von a keine Eigenschaften angeben; denn was von a ausgesagt wird, ist eine gemeinsame Eigenschaft der Zahlen, während $1^1 = 1$ weder vom Monde etwas aussagt, noch von der Sonne, noch von der Sahara, noch vom Pic von Teneriffa; denn was könnte der Sinn einer solchen Aussage sein?

»die Zahl Eins ist ein Ding«

Auf solche Fragen werden wohl auch die meisten Mathematiker keine genügende Antwort bereit haben. Ist es nun nicht für die Wissenschaft beschämend, so im Unklaren über ihren nächstliegenden und scheinbar so einfachen Gegenstand zu sein? Um so weniger wird man sagen können, was Zahl sei. Wenn ein Begriff, der einer grossen Wissenschaft zu Grunde liegt, Schwierigkeiten darbietet, so ist es doch wohl eine unabweisbare Aufgabe, ihn genauer zu untersuchen und diese Schwierigkeiten zu überwinden, besonders da es schwer gelingen möchte, über die negativen, gebrochenen, complexen Zahlen zu voller Klarheit zu kommen, solange noch die Einsicht in die Grundlage des ganzen Baues der Arithmetik mangelhaft ist.

Viele werden das freilich nicht der Mühe werth achten. Dieser Begriff ist ja, wie sie meinen, in den Elementarbüchern hinreichend behandelt und damit für das ganze Leben abgethan. Wer glaubt denn über eine so einfache Sache noch etwas lernen zu können! Für so frei von jeder Schwierigkeit hält man den Begriff der positiven ganzen Zahl, dass er für Kinder wissenschaftlich erschöpfend behandelt werden könne, und dass Jeder ohne weiteres Nachdenken und ohne Bekanntschaft mit dem, was Andere gedacht haben, genau von ihm Bescheid wisse. So fehlt denn vielfach jene erste Vorbedingung des Lernens: das Wissen das Nichtwissens. Die Folge ist, dass man sich noch immer mit einer rohen Auffassung begnügt, obwohl schon *Herbart*[1] eine richtigere gelehrt hat. Es ist betrübend und entmuthigend, dass in dieser Weise eine Erkenntniss immer wieder verloren zu gehen droht, die schon errungen war, dass so manche Arbeit vergeblich zu werden scheint, weil man im eingebildeten Reichthume nicht nöthig zu haben glaubt, sich ihre Früchte anzueignen. Auch diese Arbeit, sehe ich wohl, ist solcher Gefahr ausgesetzt. Jene Roheit der Auffassung tritt mir entgegen, wenn das Rechnen aggregatives, mechanisches Denken genannt wird[2]. Ich bezweifle, dass es ein solches Denken überhaupt giebt. Aggregatives Vorstellen könnte man schon eher gelten lassen; aber es ist für das Rechnen ohne Bedeutung. Das Denken ist im Wesentlichen überall dasselbe: es kommen nicht je nach dem Gegenstande verschiedene Arten von Denkgesetzen in Betracht. Die Unterschiede bestehen nur in der grösseren oder geringeren Rauheit und Unabhängigkeit von psychologischen Einflüssen und von äussern Hilfen des Denkens wie Sprache, Zahlzeichen und dgl., dann etwa noch in der Feinheit des Baues der Begriffe; aber grade in dieser Rücksicht möchte die Mathematik von keiner Wissenschaft, selbst der Philosophie nicht, übertroffen werden.

Man wird aus dieser Schrift ersehen können, dass auch ein scheinbar eigenthümlich mathematischer Schluss wie der von n auf n + 1 auf den allgemeinen logischen Gesetzen beruht, dass es besondrer Gesetze des aggregativen Denkens nicht bedarf. Man kann freilich die Zahlzeichen mechanisch gebrauchen, wie man papageimässig sprechen kann; aber Denken möchte das doch kaum zu nennen sein. Es ist nur möglich, nachdem durch wirkliches Denken die mathematische Zeichensprache so ausgebildet ist, dass sie, wie man sagt, für einen denkt. Dies beweist nicht, dass die Zahlen in einer besonders mechanischen Weise, etwa wie Sandhaufen aus Quarzkörnern gebildet sind. Es liegt, denke ich, im Interesse der Mathematiker einer solchen Ansicht entgegenzutreten, welche einen hauptsächlichen Gegenstand ihrer Wissenschaft und damit diese selbst herabzusetzen geeignet ist. Aber auch bei Mathematikern findet man ganz ähnliche Aussprüche. Im Gegentheil wird man dem Zahlbegriffe einen feineren Bau zuerkennen müssen als den meisten Begriffen andrer Wissenschaften, obwohl er noch einer der einfachsten arithmetischen ist.

Um nun jenen Wahn zu widerlegen, dass in Bezug auf die positiven ganzen Zahlen eigentlich gar keine Schwierigkeiten obwalten, sondern allgemeine Uebereinstimmung herrsche, schien es mir gut, einige Meinungen von Philosophen und Mathematikern über die hier in Betracht kommenden Fragen zu besprechen. Man wird sehn, wie wenig von Einklang zu finden ist, sodass geradezu entgegengesetzte Aussprüche vorkommen. Die Einen sagen z. B.: »die Einheiten sind einander gleich«, die Andern halten sie für verschieden, und beide haben Gründe für ihre Behauptung, die sich nicht kurzer Hand abweisen lassen. Hierdurch suche ich das Bedürfniss nach einer genaueren Untersuchung zu wecken. Zugleich will ich durch die vorausgeschickte Beleuchtung der von Andern ausgesprochenen Ansichten meiner eignen Auffassung den Boden ebnen, damit man sich vorweg überzeuge, dass jene andern Wege nicht zum Ziele führen, und dass meine Meinung nicht eine von vielen gleichberechtigten ist; und so hoffe ich die Frage wenigstens in der Hauptsache endgiltig zu entscheiden.

Freilich sind meine Ausführungen hierdurch wohl philosophischer geworden, als vielen Mathematikern angemessen scheinen mag; aber eine gründliche Untersuchung des Zahlbegriffes wird

---

[1] Sämmtliche Werke, herausgegeb. von Hartenstein, Bd. X, 1 Thl. Umriss pädagogischer Vorlesungen § 252, Anm. 2: »Zwei heisst nicht zwei Dinge, sondern Verdoppelung« u. s. w.

[2] K. Fischer, System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre, 2. Aufl. § 94.

immer etwas philosophisch ausfallen müssen. Diese Aufgabe ist der Mathematik und Philosophie gemeinsam.

Wenn das Zusammenarbeiten dieser Wissenschaften trotz mancher Anläufe von beiden Seiten nicht ein so gedeihliches ist, wie es zu wünschen und wohl auch möglich wäre, so liegt das, wie mir scheint, an dem Ueberwiegen psychologischer Betrachtungsweisen in der Philosophie, die selbst in die Logik eindringen. Mit dieser Richtung hat die Mathematik gar keine Berührungspunkte, und daraus erklärt sich leicht die Abneigung vieler Mathematiker gegen philosophische Betrachtungen. Wenn z. B. *Stricker*[3] die Vorstellungen der Zahlen motorisch, von Muskelgefühlen abhängig nennt, so kann der Mathematiker seine Zahlen darin nicht wiedererkennen und weiss mit einem solchen Satze nichts anzufangen. Eine Arithmetik, die auf Muskelgefühle gegründet wäre, würde gewiss recht gefühlvoll, aber auch ebenso verschwommen ausfallen wie diese Grundlage. Nein, mit Gefühlen hat die Arithmetik gar nichts zu schaffen. Ebensowenig mit innern Bildern, die aus Spuren früherer Sinneseindrücke zusammengeflossen sind. Das Schwankende und Unbestimmte, welches alle diese Gestaltungen haben, steht im starken Gegensatze zu der Bestimmtheit und Festigkeit der mathematischen Begriffe und Gegenstände. Es mag ja von Nutzen sein, die Vorstellungen und deren Wechsel zu betrachten, die beim mathematischen Denken vorkommen; aber die Psychologie bilde sich nicht ein, zur Begründung der Arithmetik irgendetwas beitragen zu können. Dem Mathematiker als solchem sind diese innern Bilder, ihre Entstehung und Veränderung gleichgiltig. *Stricker* sagt selbst, dass er sich beim Worte »Hundert« weiter nichts vorstellt als das Zeichen 100. Andere mögen sich den Buchstaben C oder sonst etwas vorstellen; geht daraus nicht hervor, dass diese innern Bilder in unserm Falle für das Wesen der Sache vollkommen gleichgiltig und zufällig sind, ebenso zufällig wie eine schwarze Tafel und ein Stück Kreide, dass sie überhaupt nicht Vorstellungen der Zahl Hundert zu heissen verdienen? Man sehe doch nicht das Wesen der Sache in solchen Vorstellungen! Man nehme nicht die Beschreibung, wie eine Vorstellung entsteht, für eine Definition und nicht die Angabe der seelischen und leiblichen Bedingungen dafür, dass uns ein Satz zum Bewusstsein kommt, für einen Beweis und verwechsele das Gedachtwerden eines Satzes nicht mit seiner Wahrheit! Man muss, wie es scheint, daran erinnern, dass ein Satz ebensowenig aufhört, wahr zu sein, wenn ich nicht mehr an ihn denke, wie die Sonne vernichtet wird, wenn ich die Augen schliesse. Sonst kommen wir noch dahin, dass man beim Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes es nöthig findet, des Phosphorgehaltes unseres Gehirnes zu gedenken, und dass ein Astronom sich scheut, seine Schlüsse auf längst vergangene Zeiten zu erstrecken, damit man ihm nicht einwende: »du rechnest da $2 \cdot 2 = 4$; aber die Zahlvorstellung hat ja eine Entwickelung, eine Geschichte! Man kann zweifeln, ob sie damals schon so weit war. Woher weisst du, dass in jener Vergangenheit dieser Satz schon bestand? Könnten die damals lebenden Wesen nicht den Satz $2 \cdot 2 = 5$ gehabt haben, aus dem sich erst durch natürliche Züchtung im Kampf ums Dasein der Satz $2 \cdot 2 = 4$ entwickelt hat, der seinerseits vielleicht dazu bestimmt ist, auf demselben Wege sich zu $2 \cdot 2 = 3$ fortzubilden?« Est modus in rebus, sunt certi denique fines! Die geschichtliche Betrachtungsweise, die das Werden der Dinge zu belauschen und aus dem Werden ihr Wesen zu erkennen sucht, hat gewiss eine grosse Berechtigung; aber sie hat auch ihre Grenzen. Wenn in dem beständigen Flusse aller Dinge nichts Festes, Ewiges beharrte, würde die Erkennbarkeit der Welt aufhören und Alles in Verwirrung stürzen. Man denkt sich, wie es scheint, dass die Begriffe in der einzelnen Seele so entstehen, wie die Blätter an den Bäumen und meint ihr Wesen dadurch erkennen zu können, dass man ihrer Entstehung nachforscht und sie aus der Natur der menschlichen Seele psychologisch zu erklären sucht. Aber diese Auffassung zieht Alles ins Subjective und hebt, bis ans Ende verfolgt, die Wahrheit auf. Was man Geschichte der Begriffe nennt, ist wohl entweder eine Geschichte unserer Erkenntniss der Begriffe oder der Bedeutungen der Wörter. Durch grosse geistige Arbeit, die Jahrhunderte hindurch andauern kann, gelingt es oft erst, einen Begriff in seiner Reinheit zu erkennen, ihn aus den fremden Umhüllungen herauszuschälen, die

[3] Studien über Association der Vorstellungen. Wien 1883.

ihn dem geistigen Auge verbargen. Was soll man nun dazu sagen, wenn jemand, statt diese Arbeit, wo sie noch nicht vollendet scheint, fortzusetzen, sie für nichts achtet, in die Kinderstube geht oder sich in ältesten erdenkbaren Entwickelungsstufen der Menschheit zurückversetzt, um dort wie *J. St. Mill* etwa eine Pfefferkuchen- oder Kieselsteinarithmetik zu entdecken! Es fehlt nur noch, dem Wohlgeschmacke des Kuchens eine besondere Bedeutung für den Zahlbegriff zuzuschreiben. Dies ist doch das grade Gegentheil eines vernünftigen Verfahrens und jedenfalls so unmathematisch wie möglich. Kein Wunder, dass die Mathematiker nichts davon wissen wollen! Statt eine besondere Reinheit der Begriffe da zu finden, wo man ihrer Quelle nahe zu sein glaubt, sieht man Alles verschwommen und ungesondert wie durch einen Nebel. Es ist so, als ob jemand, um Amerika kennen zu lernen, sich in die Lage des Columbus zurückversetzen wollte, als er den ersten zweifelhaften Schimmer seines vermeintlichen Indiens erblickte. Freilich beweist ein solcher Vergleich nichts; aber er verdeutlicht hoffentlich meine Meinung. Es kann ja sein, dass die Geschichte der Entdeckungen in vielen Fällen als Vorbereitung für weitere Forschungen nützlich ist; aber sie darf nicht an deren Stelle treten wollen.

Dem Mathematiker gegenüber, wäre eine Bekämpfung solcher Auffassungen wohl kaum nöthig gewesen; aber da ich auch für die Philosophen die behandelten Streitfragen möglichst zum Austrage bringen wollte, war ich genöthigt, mich auf die Psychologie ein wenig einzulassen, wenn auch nur, um ihren Einbruch in die Mathematik zurückzuweisen.

Uebrigens kommen auch in mathematischen Lehrbüchern psychologische Wendungen vor. Wenn man eine Verpflichtung fühlt, eine Definition zu geben, ohne es zu können, so will man wenigstens die Weise beschreiben, wie man zu dem betreffenden Gegenstande oder Begriffe kommt. Man erkennt diesen Fall leicht daran, dass im weitern Verlaufe nie mehr auf eine solche Erklärung zurückgegriffen wird. Für Lehrzwecke ist eine Hinführung auf die Sache auch ganz am Platze; nur sollte man sie von einer Definition immer deutlich unterscheiden. Dass auch Mathematiker Beweisgründe mit innern oder äussern Bedingungen der Führung eines Beweises verwechseln können, dafür liefert E. *Schröder*[4] ein ergötzliches Beispiel, indem er unter der Ueberschrift: »Einziges Axiom« Folgendes darbietet: »Das gedachte Princip könnte wohl das Axiom der Inhärenz der Zeichen genannt werden. Es giebt uns die Gewissheit, dass bei allen unsern Entwicklungen und Schlussfolgerungen die Zeichen in unserer Erinnerung – noch fester aber am Papiere – haften« u. s. w.

So sehr sich nun die Mathematik jede Beihilfe vonseiten der Psychologie verbitten muss, so wenig kann sie ihren engen Zusammenhang mit der Logik verleugnen. Ja, ich stimme der Ansicht derjenigen bei, die eine scharfe Trennung für unthunlich halten. Soviel wird man zugeben, dass jede Untersuchung über die Bündigkeit einer Beweisführung oder die Berechtigung einer Definition logisch sein muss. Solche Fragen sind aber gar nicht von der Mathematik abzuweisen, da nur durch ihre Beantwortung die nöthige Sicherheit erreichbar ist.

Auch in dieser Richtung gehe ich freilich etwas über das Uebliche hinaus. Die meisten Mathematiker sind bei Untersuchungen ähnlicher Art zufrieden, dem unmittelbaren Bedürfnisse genügt zu haben. Wenn sich eine Definition willig zu den Beweisen hergiebt, wenn man nirgends auf Widersprüche stösst, wenn sich Zusammenhänge zwischen scheinbar entlegnen Sachen erkennen lassen und wenn sich dadurch eine höhere Ordnung und Gesetzmässigkeit ergiebt, so pflegt man die Definition für genügend gesichert zu halten und fragt wenig nach ihrer logischen Rechtfertigung. Dies Verfahren hat jedenfalls das Gute, dass man nicht leicht das Ziel gänzlich verfehlt. Auch ich meine, dass die Definitionen sich durch ihre Fruchtbarkeit bewähren müssen, durch die Möglichkeit, Beweise mit ihnen zu führen. Aber es ist wohl zu beachten, dass die Strenge der Beweisführung ein Schein bleibt, mag auch die Schlusskette lückenlos sein, wenn die Definitionen nur nachträglich dadurch gerechtfertigt werden, dass man auf keinen Widerspruch gestossen ist. So hat man im Grunde immer nur eine erfahrungsmässige Sicherheit erlangt und muss eigentlich darauf gefasst sein, zuletzt doch

[4] Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.

noch einen Widerspruch anzutreffen, der das ganze Gebäude zum Einsturze bringt. Darum glaubte ich etwas weiter auf die allgemeinen logischen Grundlagen zurückgehn zu müssen, als vielleicht von den meisten Mathematikern für nöthig gehalten wird.

Als Grundsätze habe ich in dieser Untersuchung folgende festgehalten:

es ist das Psychologische von dem Logischen, das Subjective von dem Objectiven scharf zu trennen;

nach der Bedeutung der Wörter muss im Satzzusammenhange, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden;

der Unterschied zwischen Begriff und Gegenstand ist im Auge zu behalten.

Um das Erste zu befolgen, habe ich das Wort »Vorstellung« immer im psychologischen Sinne gebraucht und die Vorstellungen von den Begriffen und Gegenständen unterschieden. Wenn man den zweiten Grundsatz unbeachtet lässt, ist man fast genöthigt, als Bedeutung der Wörter innere Bilder oder Thaten der einzelnen Seele zu nehmen und damit auch gegen den ersten zu verstossen. Was den dritten Punkt betrifft, so ist es nur Schein, wenn man meint, einen Begriff zum Gegenstande machen zu können, ohne ihn zu verändern. Von hieraus ergiebt sich die Unhaltbarkeit einer verbreiteten formalen Theorie der Brüche, negativen Zahlen u. s. w. Wie ich die Verbesserung denke, kann ich in dieser Schrift nur andeuten. Es wird in allen diesen Fällen wie bei den positiven ganzen Zahlen darauf ankommen, den Sinn einer Gleichung festzustellen.

Meine Ergebnisse werden, denke ich, wenigstens in der Hauptsache die Zustimmung der Mathematiker finden, welche sich die Mühe nehmen, meine Gründe in Betracht zu ziehn. Sie scheinen mir in der Luft zu liegen und einzeln sind sie vielleicht schon alle wenigstens annähernd ausgesprochen worden; aber in diesem Zusammenhange mit einander möchten sie doch neu sein. Ich habe mich manchmal gewundert, dass Darstellungen, die in Einem Punkte meiner Auffassung so nahe kommen, in andern so stark abweichen.

Die Aufnahme bei den Philosophen wird je nach dem Standpunkte verschieden sein, am schlechtesten wohl bei jenen Empirikern, die als ursprüngliche Schlussweise nur die Induction anerkennen wollen und auch diese nicht einmal als Schlussweise, sondern als Gewöhnung. Vielleicht unterzieht Einer oder der Andere bei dieser Gelegenheit die Grundlagen seiner Erkenntnisstheorie einer erneueten Prüfung. Denen, welche etwa meine Definitionen für unnatürlich erklären möchten, gebe ich zu bedenken, dass die Frage hier nicht ist, ob natürlich, sondern ob den Kern der Sache treffend und logisch einwurfsfrei.

Ich gebe mich der Hoffnung hin, dass bei vorurtheilsloser Prüfung auch die Philosophen einiges Brauchbare in dieser Schrift finden werden.

§ 1. Nachdem die Mathematik sich eine Zeit lang von der euklidischen Strenge entfernt hatte, kehrt sie jetzt zu ihr zurück und strebt gar über sie hinaus. In der Arithmetik war schon infolge des indischen Ursprungs vieler ihrer Verfahrungsweisen und Begriffe eine laxere Denkweise hergebracht als in der von den Griechen vornehmlich ausgebildeten Geometrie. Sie wurde durch die Erfindung der höhern Analysis nur gefördert; denn einerseits stellten sich einer strengen Behandlung dieser Lehren erhebliche, fast unbesiegliche Schwierigkeiten entgegen, deren Ueberwindung andrerseits die darauf verwendeten Anstrengungen wenig lohnen zu wollen schien. Doch hat die weitere Entwickelung immer deutlicher gelehrt, dass in der Mathematik eine blos moralische Ueberzeugung, gestützt auf viele erfolgreiche Anwendungen, nicht genügt. Für Vieles wird jetzt ein Beweis gefordert, was früher für selbstverständlich galt. Die Grenzen der Giltigkeit sind erst dadurch in manchen Fällen festgestellt worden. Die Begriffe der Function, der Stetigkeit, der Grenze, des Unendlichen haben sich einer schärferen Bestimmung bedürftig gezeigt. Das Negative und die Irrationalzahl, welche längst in die Wissenschaft aufgenommen waren, haben sich einer genaueren Prüfung ihrer Berechtigung unterwerfen müssen.

So zeigt sich überall das Bestreben, streng zu beweisen, die Giltigkeitsgrenzen genau zu ziehen und, um dies zu können, die Begriffe scharf zu fassen.

§ 2. Dieser Weg muss im weitern Verfolge auf den Begriff der Anzahl und auf die von positiven ganzen Zahlen geltenden einfachsten Sätze führen, welche die Grundlage der ganzen Arithmetik bilden. Freilich sind Zahlformeln wie 5 + 7 = 12 und Gesetze wie das der Associativität bei der Addition durch die unzähligen Anwendungen, die tagtäglich von ihnen gemacht werden, so vielfach bestätigt, dass es fast lächerlich erscheinen kann, sie durch das Verlangen nach einem Beweise in Zweifel ziehen zu wollen. Aber es liegt im Wesen der Mathematik begründet, dass sie überall, wo ein Beweis möglich ist, ihn der Bewährung durch Induction vorzieht. Euklid beweist Vieles, was ihm jeder ohnehin zugestehen würde. Indem man sich selbst an der euklidischen Strenge nicht genügen liess, ist man auf die Untersuchungen geführt worden, welche sich an das Parallelenaxiom geknüpft haben.

So ist jene auf grösste Strenge gerichtete Bewegung schon vielfach über das zunächst gefühlte Bedürfniss hinausgegangen und dieses ist an Ausdehnung und Stärke immer gewachsen.

Der Beweis hat eben nicht nur den Zweck, die Wahrheit eines Satzes über jeden Zweifel zu erheben, sondern auch den, eine Einsicht in die Abhängigkeit der Wahrheiten von einander zu gewähren. Nachdem man sich von der Unerschütterlichkeit eines Felsblockes durch vergebliche Versuche, ihn zu bewegen, überzeugt hat, kann man ferner fragen, was ihn denn so sicher unterstütze. Je weiter man diese Untersuchungen fortsetzt, auf desto weniger Urwahrheiten führt man Alles zurück; und diese Vereinfachung ist an sich schon ein erstrebenswerthes Ziel. Vielleicht bestätigt sich auch die Hoffnung, dass man allgemeine Weisen der Begriffsbildung oder der Begründung gewinnen könne, die auch in verwickelteren Fällen verwendbar sind, indem man zum Bewusstsein bringt, was die Menschen in den einfachsten Fällen instinctiv gethan haben, und das Allgemeingiltige daraus abscheidet.

§ 3. Mich haben auch philosophische Beweggründe zu solchen Untersuchungen bestimmt. Die Fragen nach der apriorischen oder aposteriorischen, der synthetischen oder analytischen Natur der arithmetischen Wahrheiten harren hier ihrer Beantwortung. Denn, wenn auch diese Begriffe selbst der Philosophie angehören, so glaube ich doch, dass die Entscheidung nicht ohne Beihilfe der Mathematik erfolgen kann. Freilich hangt dies von dem Sinne ab, den man jenen Fragen beilegt.

Es ist kein seltener Fall, dass man zuerst den Inhalt eines Satzes gewinnt und dann auf einem andern beschwerlicheren Wege den strengen Beweis führt, durch den man oft auch die Bedingungen der Giltigkeit genauer kennen lernt. So hat man allgemein die Frage, wie wir zu dem Inhalte eines Urtheils kommen, von der zu trennen, woher wir die Berechtigung für unsere Behauptung nehmen.

Jene Unterscheidungen von apriori und aposteriori, synthetisch und analytisch betreffen nun nach meiner[5] Auffassung nicht den Inhalt des Urtheils, sondern die Berechtigung zur Urtheilsfällung. Da, wo diese fehlt, fällt auch die Möglichkeit jener Eintheilung weg. Ein Irrthum apriori ist dann ein ebensolches Unding wie etwa ein blauer Begriff. Wenn man einen Satz in meinem Sinne aposteriori oder analytisch nennt, so urtheilt man nicht über die psychologischen, physiologischen und physikalischen Verhältnisse, die es möglich gemacht haben, den Inhalt des Satzes im Bewusstsein zu bilden, auch nicht darüber, wie ein Anderer vielleicht irrthümlicherweise dazu gekommen ist, ihn für wahr zu halten, sondern darüber, worauf im tiefsten Grunde die Berechtigung des Fürwahrhaltens beruht.

Dadurch wird die Frage dem Gebiete der Psychologie entrückt und dem der Mathematik zugewiesen, wenn es sich um eine mathematische Wahrheit handelt. Es kommt nun darauf an, den Beweis zu finden und ihn bis auf die Urwahrheiten zurückzuverfolgen. Stösst man auf diesem Wege nur auf die allgemeinen logischen Gesetze und auf Definitionen, so hat man eine analytische Wahrheit, wobei vorausgesetzt wird, dass auch die Sätze mit in Betracht gezogen werden, auf denen etwa die Zulässigkeit einer Definition beruht. Wenn es aber nicht möglich ist, den Beweis

[5] Ich will damit natürlich nicht einen neuen Sinn hineinlegen, sondern nur das treffen, was frühere Schriftsteller, insbesondere *Kant* gemeint haben.

zu führen, ohne Wahrheiten zu benutzen, welche nicht allgemein logischer Natur sind, sondern sich auf ein besonderes Wissensgebiet beziehen, so ist der Satz ein synthetischer. Damit eine Wahrheit aposteriori sei, wird verlangt, dass ihr Beweis nicht ohne Berufung auf Thatsachen auskomme; d. h. auf unbeweisbare Wahrheiten ohne Allgemeinheit, die Aussagen von bestimmten Gegenständen enthalten. Ist es dagegen möglich, den Beweis ganz aus allgemeinen Gesetzen zu führen, die selber eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind, so ist die Wahrheit apriori.[6]

§ 4. Von diesen philosophischen Fragen ausgehend kommen wir zu derselben Forderung, welche unabhängig davon auf dem Gebiete der Mathematik selbst erwachsen ist: die Grundsätze der Arithmetik, wenn irgend möglich, mit grösster Strenge zu beweisen; denn nur wenn aufs sorgfältigste jede Lücke in der Schlusskette vermieden wird, kann man mit Sicherheit sagen, auf welche Urwahrheiten sich der Beweis stützt; und nur wenn man diese kennt, wird man jene Fragen beantworten können.

Wenn man nun dieser Forderung nachzukommen versucht, so gelangt man sehr bald zu Sätzen, deren Beweis solange unmöglich ist, als es nicht gelingt, darin vorkommende Begriffe in einfachere aufzulösen oder auf Allgemeineres zurückzuführen. Hier ist es nun vor allen die Anzahl, welche definirt oder als undefinirbar anerkannt werden muss. Das soll die Aufgabe dieses Buches sein.[7] Von ihrer Lösung wird die Entscheidung über die Natur der arithmetischen Gesetze abhangen.

Bevor ich diese Fragen selbst angreife, will ich Einiges vorausschicken, was Fingerzeige für ihre Beantwortung geben kann. Wenn sich nämlich von andern Gesichtspunkten aus Gründe dafür ergeben, dass die Grundsätze der Arithmetik analytisch sind, so sprechen diese auch für deren Beweisbarkeit und für die Definirbarkeit des Begriffes der Anzahl. Die entgegengesetzte Wirkung werden die Gründe für die Aposteriorität dieser Wahrheiten haben. Deshalb mögen diese Streitpunkte zunächst einer vorläufigen Beleuchtung unterworfen werden.

---

[6] Wenn man überhaupt allgemeine Wahrheiten anerkennt, so muss man auch zugeben, dass es solche Urgesetze giebt, weil aus lauter einzelnen Thatsachen nichts folgt, es sei denn auf Grund eines Gesetzes. Selbst die Induction beruht auf dem allgemeinen Satze, dass dies Verfahren die Wahrheit oder doch eine Wahrscheinlichkeit für ein Gesetz begründen könne. Für den, der dies leugnet, ist die Induction nichts weiter als eine psychologische Erscheinung, eine Weise, wie Menschen zu dem Glauben an die Wahrheit eines Satzes kommen, ohne dass dieser Glaube dadurch irgendwie gerechtfertigt wäre.

[7] Es wird also im Folgenden, wenn nichts weiter bemerkt wird, von keinen andern Zahlen als den positiven ganzen die Rede sein, welche auf die Frage wie viele? antworten.

I. Meinungen einiger Schriftsteller über die Natur der arithmetischen Sätze

Sind die Zahlformeln beweisbar?

§ 5. Man muss die Zahlformeln, die wie 2 + 3 = 5 von bestimmten Zahlen handeln, von den allgemeinen Gesetzen unterscheiden, die von allen ganzen Zahlen gelten.

Jene werden von einigen Philosophen[8] für unbeweisbar und unmittelbar klar wie Axiome gehalten. *Kant*[9] erklärt sie für unbeweisbar und synthetisch, scheut sich aber, sie Axiome zu nennen, weil sie nicht allgemein sind, und weil ihre Zahl unendlich ist. *Hankel*[10] nennt mit Recht diese Annahme von unendlich vielen unbeweisbaren Urwahrheiten unangemessen und paradox. Sie widerstreitet in der That dem Bedürfnisse der Vernunft nach Uebersichtlichkeit der ersten Grundlagen. Und ist es denn unmittelbar einleuchtend, dass

135664 + 37863 = 173527

ist? Nein! und eben dies führt *Kant* für die synthetische Natur dieser Sätze an. Es spricht aber vielmehr gegen ihre Unbeweisbarkeit; denn wie sollen sie anders eingesehen werden als durch einen Beweis, da sie unmittelbar nicht einleuchten? *Kant* will die Anschauung von Fingern oder Punkten zu Hilfe nehmen, wodurch er in Gefahr geräth, diese Sätze gegen seine Meinung als empirische erscheinen zu lassen; denn die Anschauung von 37863 Fingern ist doch jedenfalls keine reine. Der Ausdruck »Anschauung« scheint auch nicht recht zu passen, da schon 10 Finger durch ihre Stellungen zu einander die verschiedensten Anschauungen hervorrufen können. Haben wir denn überhaupt eine Anschauung von 135664 Fingern oder Punkten? Hätten wir sie und hätten wir eine von 37863 Fingern und eine von 173527 Fingern, so müsste die Richtigkeit unserer Gleichung sofort einleuchten, wenigstens für Finger, wenn sie unbeweisbar wäre; aber dies ist nicht der Fall.

Kant hat offenbar nur kleine Zahlen im Sinne gehabt. Dann würden die Formeln für grosse Zahlen beweisbar sein, die für kleine durch die Anschauung unmittelbar einleuchten. Aber es ist misslich, einen grundsätzlichen Unterschied zwischen kleinen und grossen Zahlen zu machen, besonders da eine scharfe Grenze nicht zu ziehen sein möchte. Wenn die Zahlformeln etwa von 10 an beweisbar wären, so würde man mit Recht fragen: warum nicht von 5 an, von 2 an, von 1 an?

§ 6. Andere Philosophen und Mathematiker haben denn auch die Beweisbarkeit der Zahlformeln behauptet. *Leibniz*[11] sagt:

»Es ist keine unmittelbare Wahrheit, dass 2 und 2 4 sind; vorausgesetzt, dass 4 bezeichnet 3 und 1. Man kann sie beweisen und zwar so:

Definitionen:	1) 2 ist 1 und 1,
	2) 3 ist 2 und 1,
	3) 4 ist 3 und 1.

Axiom: Wenn man Gleiches an die Stelle setzt, bleibt die Gleichung bestehen.

[8] Hobbes, Locke, Newton. Vergl. *Baumann*, die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik. S. 241 u. 242, S. 365 ff., S. 475.

[9] Kritik der reinen Vernunft, herausgeg. v. Hartenstein. III. S. 157.

[10] Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen. S. 55.

[11] B: Nouveaux Essais, IV. § 10. Erdm. S. 363.

Beweis:	2 + 2 =	2 + 1 + 1 =	3 + 1 = 4.
	Def. 1.	Def. 2.	Def. 3.

Also: nach dem Axiom: 2 + 2 = 4.«

Dieser Beweis scheint zunächst ganz aus Definitionen und dem angeführten Axiome aufgebaut zu sein. Auch dieses könnte in eine Definition verwandelt werden, wie es *Leibniz* an einem andern Orte[12] selbst gethan hat. Es scheint, dass man von 1, 2, 3, 4 weiter nichts zu wissen braucht, als was in den Definitionen enthalten ist. Bei genauerer Betrachtung entdeckt man jedoch eine Lücke, die durch das Weglassen der Klammern verdeckt ist. Genauer müsste nämlich geschrieben werden:

$$\mathbf{2 + 2 = 2 + (1 + 1)}$$

$$\mathbf{(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4}$$

Hier fehlt der Satz

$$\mathbf{2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1,}$$

der ein besonderer Fall von

$$\mathbf{a + (b + c) = (a + b) + c}$$

ist. Setzt man dies Gesetz voraus, so sieht man leicht, dass jede Formel des Einsundeins so bewiesen werden kann. Es ist dann jede Zahl aus der vorhergehenden zu definiren. In der That sehe ich nicht, wie uns etwa die Zahl 437986 angemessener gegeben werden könnte als in der leibnizischen Weise. Wir bekommen sie so, auch ohne eine Vorstellung von ihr zu haben, doch in unsere Gewalt. Die unendliche Menge der Zahlen wird durch solche Definitionen auf die Eins und die Vermehrung um eins zurückgeführt, und jede der unendlich vielen Zahlformeln kann aus einigen allgemeinen Sätzen bewiesen werden.

Dies ist auch die Meinung von *H. Grassmann* und *H. Hankel*. Jener will das Gesetz durch eine Definition gewinnen, indem er sagt[13]:

$$\mathbf{a + (b + 1) = (a + b) + 1}$$

»Wenn a und b beliebige Glieder der Grundreihe sind, so versteht man unter der Summe a + b dasjenige Glied der Grundreihe, für welches die Formel

$$\mathbf{a + (b + e) = a + b + e}$$

gilt.«

Hierbei soll e die positive Einheit bedeuten. Gegen diese Erklärung lässt sich zweierlei einwenden. Zunächst wird die Summe durch sich selbst erklärt. Wenn man noch nicht weiss, was a

[12] C: Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis. Erdm. S. 94.

[13] Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. I. Theil: Arithmetik, Stettin 1860, S. 4.

+ b bedeuten soll, versteht man auch den Ausdruck a + (b + e) nicht. Aber dieser Einwand lässt sich vielleicht dadurch beseitigen, dass man freilich im Widerspruch mit dem Wortlaute sagt, nicht die Summe, sondern die Addition solle erklärt werden. Dann würde immer noch eingewendet werden können, dass a + b ein leeres Zeichen wäre, wenn es kein Glied der Grundreihe oder deren mehre von der verlangten Art gäbe. Dass dies nicht statthabe, setzt *Grassmann* einfach voraus, ohne es zu beweisen, sodass die Strenge nur scheinbar ist.

§ 7. Man sollte denken, dass die Zahlformeln synthetisch oder analytisch, aposteriori oder apriori sind, je nachdem die allgemeinen Gesetze es sind, auf die sich ihr Beweis stützt. Dem steht jedoch die Meinung *John Stuart Mill*'s entgegen. Zwar scheint er zunächst wie *Leibniz* die Wissenschaft auf Definitionen gründen zu wollen,[14] da er die einzelnen Zahlen wie dieser erklärt; aber sein Vorurtheil, dass alles Wissen empirisch sei, verdirbt sofort den richtigen Gedanken wieder. Er belehrt uns nämlich,[15] dass jene Definitionen keine im logischen Sinne seien, dass sie nicht nur die Bedeutung eines Ausdruckes festsetzen, sondern damit auch eine beobachtete Thatsache behaupten. Was in aller Welt mag die beobachtete oder, wie *Mill* auch sagt, physikalische Thatsache sein, die in der Definition der Zahl 777864 behauptet wird? Von dem ganzen Reichthume an physikalischen Thatsachen, der sich hier vor uns aufthut, nennt uns *Mill* nur eine einzige, die in der Definition der Zahl 3 behauptet werden soll. Sie besteht nach ihm darin, dass es Zusammenfügungen von Gegenständen giebt, welche, während sie diesen Eindruck ${}^{0}{}_{0}{}^{0}$ auf die Sinne machen, in zwei Theile getrennt werden können, wie folgt: ◦◦ ◦. Wie gut doch, dass nicht Alles in der Welt niet- und nagelfest ist; dann könnten wir diese Trennung nicht vornehmen, und 2 + 1 wäre nicht 3! Wie schade, dass *Mill* nicht auch die physikalischen Thatsachen abgebildet hat, welche den Zahlen 0 und 1 zu Grunde liegen!

Mill fährt fort: »Nachdem dieser Satz zugegeben ist, nennen wir alle dergleichen Theile 3«. Man erkennt hieraus, dass es eigentlich unrichtig ist, wenn die Uhr drei schlägt, von drei Schlägen zu sprechen, oder süss, sauer, bitter drei Geschmacksempfindungen zu nennen; ebensowenig ist der Ausdruck »drei Auflösungsweisen einer Gleichung« zu billigen; denn man hat niemals davon den sinnlichen Eindruck wie von ${}^{0}{}_{0}{}^{0}$.

Nun sagt *Mill*: »Die Rechnungen folgen nicht aus der Definition selbst, sondern aus der beobachteten Thatsache.« Aber wo hätte sich *Leibniz* in dem oben mitgetheilten Beweise des Satzes 2 + 2 = 4 auf die erwähnte Thatsache berufen sollen? *Mill* unterlässt es die Lücke nachzuweisen, obwohl er einen dem leibnizischen ganz entsprechenden Beweis des Satzes 5 + 2 = 7 giebt.[16] Die wirklich vorhandene Lücke, die in dem Weglassen der Klammern liegt, übersieht er wie *Leibniz*.

Wenn wirklich die Definition jeder einzelnen Zahl eine besondere physikalische Thatsache behauptete, so würde man einen Mann, der mit neunziffrigen Zahlen rechnet, nicht genug wegen seines physikalischen Wissens bewundern können. Vielleicht geht indessen *Mill*'s Meinung nicht dahin, dass alle diese Thatsachen einzeln beobachtet werden müssten, sondern es genüge, durch Induction ein allgemeines Gesetz abgeleitet zu haben, in dem sie sämmtlich eingeschlossen seien. Aber man versuche, dies Gesetz auszusprechen, und man wird finden, dass es unmöglich ist. Es reicht nicht hin, zu sagen: es giebt grosse Sammlungen von Dingen, die zerlegt werden können; denn damit ist nicht gesagt, dass es so grosse Sammlungen und von der Art giebt, wie zur Definition etwa der Zahl 1000000 erfordert werden, und die Weise der Theilung ist auch nicht genauer angegeben. Die millsche Auffassung führt nothwendig zu der Forderung, dass für jede Zahl eine Thatsache besonders beobachtet werde, weil in einem allgemeinen Gesetze grade das Eigenthümliche der Zahl 1000000, das zu deren Definition nothwendig gehört, verloren gehen würde. Man dürfte nach *Mill* in der That nicht setzen 1000000 = 999999 + 1, wenn man nicht grade diese eigenthümliche Weise der Zerlegung

[14] A System der deductiven und inductiven Logik, übersetzt von J. Schiel. III. Buch, XXIV. Cap., § 5.

[15] A. a. O. II. Buch, VI. Cap., § 2.

[16] A. a. O. III. Buch, XXIV. Cap., § 5.

einer Sammlung von Dingen beobachtet hätte, die von der irgendeiner andern Zahl zukommenden verschieden ist.

§ 8. *Mill* scheint zu meinen, dass die Definitionen 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1 u. s. w. nicht gemacht werden dürften, ehe nicht die von ihm erwähnten Thatsachen beobachtet wären. In der That darf man die 3 nicht als (2 + 1) definiren, wenn man mit (2 + 1) gar keinen Sinn verbindet. Es fragt sich aber, ob es dazu nöthig ist, jene Sammlung und ihre Trennung zu beobachten. Räthselhaft wäre dann die Zahl 0; denn bis jetzt hat wohl niemand 0 Kieselsteine gesehen oder getastet. *Mill* würde gewiss die 0 für etwas Sinnloses, für eine blosse Redewendung erklären; die Rechnungen mit 0 würden ein blosses Spiel mit leeren Zeichen sein, und es wäre nur wunderbar, wie etwas Vernünftiges dabei herauskommen könnte. Wenn aber diese Rechnungen eine ernste Bedeutung haben, so kann auch das Zeichen 0 selber nicht ganz sinnlos sein. Und es zeigt sich die Möglichkeit, dass 2 + 1 in ähnlicher Weise wie die 0, einen Sinn auch dann noch haben könnte, wenn die von *Mill* erwähnte Thatsache nicht beobachtet wäre. Wer will in der That behaupten, dass die in der Definition einer 18ziffrigen Zahl nach *Mill* enthaltene Thatsache je beobachtet sei, und wer will leugnen, dass ein solches Zahlzeichen trotzdem einen Sinn habe?

Vielleicht meint man, es würden die physikalischen Thatsachen nur für die kleineren Zahlen etwa bis 10 gebraucht, indem die übrigen aus diesen zusammengesetzt werden könnten. Aber, wenn man 11 aus 10 und 1 blos durch Definition bilden kann, ohne die entsprechende Sammlung gesehen zu haben, so ist kein Grund, weshalb man nicht auch die 2 aus 1 und 1 so zusammensetzen kann. Wenn die Rechnungen mit der Zahl 11 nicht aus einer für diese bezeichnenden Thatsache folgen, wie kommt es, dass die Rechnungen mit der 2 sich auf die Beobachtung einer gewissen Sammlung und deren eigentümlicher Trennung stützen müssen?

Man fragt vielleicht, wie die Arithmetik bestehen könne, wenn wir durch die Sinne gar keine oder nur drei Dinge unterscheiden könnten. Für unsere Kenntniss der arithmetischen Sätze und deren Anwendungen würde ein solcher Zustand gewiss etwas Missliches haben, aber auch für ihre Wahrheit? Wenn man einen Satz empirisch nennt, weil wir Beobachtungen gemacht haben müssen, um uns seines Inhalts bewusst zu werden, so gebraucht man das Wort »empirisch« nicht in dem Sinne, dass es dem »apriori« entgegengesetzt ist. Man spricht dann eine psychologische Behauptung aus, die nur den Inhalt des Satzes betrifft; ob dieser wahr sei, kommt dabei nicht in Betracht. In dem Sinne sind auch alle Geschichten Münchhausens empirisch; denn gewiss muss man mancherlei beobachtet haben, um sie erfinden zu können.

Sind die Gesetze der Arithmetik inductive Wahrheiten?

§ 9. Die bisherigen Erwägungen machen es wahrscheinlich, dass die Zahlformeln allein aus den Definitionen der einzelnen Zahlen mittels einiger allgemeinen Gesetze ableitbar sind, dass diese Definitionen beobachtete Thatsachen weder behaupten noch zu ihrer Rechtmässigkeit voraussetzen. Es kommt also darauf an, die Natur jener Gesetze zu erkennen.

Mill [17] will zu seinem vorhin erwähnten Beweise der Formel 5 + 2 = 7 den Satz »was aus Theilen zusammengesetzt ist, ist aus Theilen von diesen Theilen zusammengesetzt« benutzen. Dies hält er für einen charakteristischern Ausdruck des sonst in der Form »die Summen von Gleichem sind gleich« bekannten Satzes. Er nennt ihn inductive Wahrheit und Naturgesetz von der höchsten Ordnung. Für die Ungenauigkeit seiner Darstellung ist es bezeichnend, dass er diesen Satz gar nicht an der Stelle des Beweises heranzieht, wo er nach seiner Meinung unentbehrlich ist; doch scheint es, dass seine inductive Wahrheit *Leibnizens* Axiom vertreten soll: »wenn man Gleiches an die Stelle setzt, bleibt die Gleichung bestehen.« Aber um arithmetische Wahrheiten Naturgesetze nennen zu können, legt *Mill* einen Sinn hinein, den sie nicht haben. Er meint z. B.[18] die Gleichung 1 = 1 könne falsch sein, weil ein Pfundstück nicht immer genau das Gewicht eines andern habe. Aber das will der Satz 1 = 1 auch gar nicht behaupten.

Mill versteht das + Zeichen so, dass dadurch die Beziehung der Theile eines physikalischen Körpers oder eines Haufens zu dem Ganzen ausgedrückt werde; aber das ist nicht der Sinn dieses Zeichens. 5 + 2 = 7 bedeutet nicht, dass wenn man zu 5 Raumtheilen Flüssigkeit 2 Raumtheile Flüssigkeit giesst, man 7 Raumtheile Flüssigkeit erhalte, sondern dies ist eine Anwendung jenes Satzes, die nur statthaft ist, wenn nicht infolge etwa einer chemischen Einwirkung eine Volumänderung eintritt. *Mill* verwechselt immer Anwendungen, die man von einem arithmetischen Satze machen kann, welche oft physikalisch sind und beobachtete Thatsachen zur Voraussetzung haben, mit dem rein mathematischen Satze selber. Das Pluszeichen kann zwar in manchen Anwendungen einer Haufenbildung zu entsprechen scheinen; aber dies ist nicht seine Bedeutung; denn bei andern Anwendungen kann von Haufen, Aggregaten, dem Verhältnisse eines physikalischen Körpers zu seinen Theilen keine Rede sein, z. B. wenn man die Rechnung auf Ereignisse bezieht. Zwar kann man auch hier von Theilen sprechen; dann gebraucht man das Wort aber nicht im physikalischen oder geometrischen, sondern im logischen Sinne, wie wenn man die Ermordungen von Staatsoberhäuptern einen Theil der Morde überhaupt nennt. Hier hat man die logische Unterordnung. Und so entspricht auch die Addition im Allgemeinen nicht einem physikalischen Verhältnisse. Folglich können auch die allgemeinen Additionsgesetze nicht Naturgesetze sein.

§ 10. Aber sie könnten vielleicht dennoch inductive Wahrheiten sein. Wie wäre das zu denken? Von welchen Thatsachen soll man ausgehen, um sich zum Allgemeinen zu erheben? Dies können wohl nur die Zahlformeln sein. Damit verlören wir freilich den Vortheil wieder, den wir durch die Definitionen der einzelnen Zahlen gewonnen haben, und wir müssten uns nach einer andern Begründungsweise der Zahlformeln umsehen. Wenn wir uns nun auch über dies nicht ganz leichte Bedenken hinwegsetzen, so finden wir doch den Boden für die Induction ungünstig; denn hier fehlt jene Gleichförmigkeit, welche sonst diesem Verfahren eine grosse Zuverlässigkeit geben kann. Schon *Leibniz*[19] lässt dem Philalèthe auf seine Behauptung:

> »Die verschiedenen Modi der Zahl sind keiner andern Verschiedenheit fähig, als des mehr oder weniger; daher sind es einfache Modi wie die des Raumes«

[17] A. a. O. III. Buch, XXIV. Cap., § 5.

[18] A. a. O. II. Buch, VI. Cap., § 3.

[19] Baumann, a. a. O. II., S. 39; Erdm. S. 243.

antworten:

> »Das kann man von der Zeit und der geraden Linie sagen, aber keinesfalls von den Figuren und noch weniger von den Zahlen, die nicht blos an Grösse verschieden, sondern auch unähnlich sind. Eine gerade Zahl kann in zwei gleiche Theile getheilt werden und nicht eine ungerade; 3 und 6 sind trianguläre Zahlen, 4 und 9 sind Quadrate, 8 ist ein Cubus u. s. f.; und dies findet bei den Zahlen noch mehr statt als bei den Figuren; denn zwei ungleiche Figuren können einander vollkommen ähnlich sein, aber niemals zwei Zahlen.«

Wir haben uns zwar daran gewöhnt, die Zahlen in vielen Beziehungen als gleichartig zu betrachten; das kommt aber nur daher, weil wir eine Menge allgemeiner Sätze kennen, die von allen Zahlen gelten. Hier müssen wir uns jedoch auf den Standpunkt stellen, wo noch keiner von diesen anerkannt ist. In der That möchte es schwer sein, ein Beispiel für einen Inductionsschluss zu finden, das unserem Falle entspräche. Sonst kommt uns oft der Satz zu statten, dass jeder Ort im Raume und jeder Zeitpunkt an und für sich so gut wie jeder andere ist. Ein Erfolg muss an einem andern Orte und zu einer andern Zeit ebensogut eintreten, wenn nur die Bedingungen dieselben sind. Das fällt hier hinweg, weil die Zahlen raum- und zeitlos sind. Die Stellen in der Zahlenreihe sind nicht gleichwerthig wie die Orte des Raumes.

Die Zahlen verhalten sich auch ganz anders als die Individuen etwa einer Thierart, da sie eine durch die Natur der Sache bestimmte Rangordnung haben, da jede auf eigne Weise gebildet ist und ihre Eigenart hat, die besonders bei der 0, der 1 und der 2 hervortritt. Wenn man sonst einen Satz in Bezug auf eine Gattung durch Induction begründet, hat man gewöhnlich schon eine ganze Reihe gemeinsamer Eigenschaften allein schon durch die Definition des Gattungsbegriffes. Hier hält es schwer, nur eine einzige zu finden, die nicht selbst erst nachzuweisen wäre.

Am leichtesten möchte sich unser Fall noch mit folgendem vergleichen lassen. Man habe in einem Bohrloche eine mit der Tiefe regelmässig zunehmende Temperatur bemerkt; man habe bisher sehr verschiedene Gesteinsschichten angetroffen. Es ist dann offenbar aus den Beobachtungen, die man an diesem Bohrloche gemacht hat, allein nichts über die Beschaffenheit der tiefern Schichten zu schliessen, und ob die Regelmässigkeit der Temperaturvertheilung sich weiter bewähren würde, muss dahingestellt bleiben. Unter den Begriff »was bei fortgesetztem Bohren angetroffen wird« fällt zwar das bisher Beobachtete wie das Tieferliegende; aber das kann hier wenig nützen. Ebenso wenig wird es uns bei den Zahlen nützen, dass sie sämmtlich unter den Begriff »was man durch fortgesetzte Vermehrung um eins erhält« fallen. Man kann eine Verschiedenheit der beiden Fälle darin finden, dass die Schichten nur angetroffen werden, die Zahlen aber durch die fortgesetzte Vermehrung um eins geradezu geschaffen und ihrem ganzen Wesen nach bestimmt werden. Dies kann nur heissen, dass man aus der Weise, wie eine Zahl, z. B. 8, durch Vermehrung um 1 entstanden ist, alle ihre Eigenschaften ableiten kann. Damit giebt man im Grunde zu, dass die Eigenschaften der Zahlen aus ihren Definitionen folgen, und es eröffnet sich die Möglichkeit, die allgemeinen Gesetze der Zahlen aus der allen gemeinsamen Entstehungsweise zu beweisen, während die besondern Eigenschaften der einzelnen aus der besondern Weise zu folgern wären, wie sie durch fortgesetzte Vermehrung um eins gebildet sind. So kann man auch, was bei den Erdschichten, schon durch die Tiefe allein bestimmt ist, in der sie getroffen werden, also ihre Lagenverhältnisse, eben daraus schliessen, ohne dass man die Induction nöthig hätte; was aber nicht dadurch bestimmt ist, kann auch die Induction nicht lehren.

Vermuthlich kann das Verfahren der Induction selbst nur mittels allgemeiner Sätze der Arithmetik gerechtfertigt werden, wenn man darunter nicht eine blosse Gewöhnung versteht. Diese hat nämlich durchaus keine wahrheitverbürgende Kraft. Während das wissenschaftliche Verfahren nach objectiven Maasstäben bald in einer einzigen Bestätigung eine hohe Wahrscheinlichkeit begründet findet, bald tausendfaches Eintreffen fast für werthlos erachtet, wird die Gewöhnung durch Zahl und Stärke der Eindrücke und subjective Verhältnisse bestimmt, die keinerlei Recht haben, auf das Urtheil Einfluss zu üben. Die Induction muss sich auf die Lehre von der Wahrscheinlichkeit stützen, weil sie einen Satz nie mehr als wahrscheinlich machen kann. Wie diese Lehre aber ohne Voraussetzung arithmetischer Gesetze entwickelt werden könne, ist nicht abzusehen.

§ 11. *Leibniz*[20] meint dagegen, dass die nothwendigen Wahrheiten, wie man solche in der Arithmetik findet, Principien haben müssen, deren Beweis nicht von den Beispielen und also nicht von dem Zeugnisse der Sinne abhangt, wiewohl ohne die Sinne sich niemand hätte einfallen lassen, daran zu denken. »Die ganze Arithmetik ist uns eingeboren und in uns auf virtuelle Weise.« Wie er den Ausdruck »eingeboren« meint, verdeutlicht eine andere Stelle[21]: »Es ist nicht wahr, dass alles, was man lernt, nicht eingeboren sei; – die Wahrheiten der Zahlen sind in uns, und nichtsdestoweniger lernt man sie, sei es, indem man sie aus ihrer Quelle zieht, wenn man sie auf beweisende Art lernt (was eben zeigt, dass sie eingeboren sind), sei es …«.

[20] Baumann a. a. O. Bd. II., S. 13 u. 14; Erdm. S. 195, S. 208 u. 209.
[21] Baumann a. a. O. Bd. II., S. 38; Erdm. S. 212.

Sind die Gesetze der Arithmetik synthetisch apriori oder analytisch?

§ 12. Wenn man den Gegensatz von analytisch und synthetisch hinzunimmt, ergeben sich vier Combinationen, von denen jedoch eine, nämlich

analytisch aposteriori

ausfällt. Wenn man sich mit *Mill* für aposteriori entschieden hat, bleibt also keine Wahl, sodass für uns nur noch die Möglichkeiten

synthetisch apriori

und

analytisch

zu erwägen bleiben. Für die erstere entscheidet sich *Kant*. In diesem Falle bleibt wohl nichts übrig, als eine reine Anschauung als letzten Erkenntnissgrund anzurufen, obwohl hier schwer zu sagen ist, ob es eine räumliche oder zeitliche ist, oder welche es sonst sein mag. *Baumann*[22] stimmt *Kant*, wenngleich mit etwas anderer Begründung, bei. Auch nach *Lipschitz*[23] fliessen die Sätze, welche die Unabhängigkeit der Anzahl von der Art des Zählens und die Vertauschbarkeit und Gruppirbarkeit der Summanden behaupten, aus der inneren Anschauung. *Hankel*[24] gründet die Lehre von den reellen Zahlen auf drei Grundsätze, denen er den Charakter der *notiones communes* zuschreibt: »Sie werden durch Explication vollkommen evident, gelten für alle Grössengebiete nach der reinen Anschauung der Grösse und können, ohne ihren Charakter einzubüssen, in Definitionen verwandelt werden, indem man sagt: Unter der Addition von Grössen versteht man eine Operation, welche diesen Sätzen genügt.« In der letzten Behauptung liegt eine Unklarheit. Vielleicht kann man die Definition machen; aber sie kann keinen Ersatz für jene Grundsätze bilden; denn bei der Anwendung würde es sich immer darum handeln: sind die Anzahlen Grössen, und ist das, was man Addition der Anzahlen zu nennen pflegt, Addition im Sinne dieser Definition? Und zur Beantwortung müsste man jene Sätze von den Anzahlen schon kennen. Ferner erregt der Ausdruck »reine Anschauung der Grösse« Anstoss. Wenn man erwägt, was alles Grösse genannt wird: Anzahlen, Längen, Flächeninhalte, Volumina, Winkel, Krümmungen, Massen, Geschwindigkeiten, Kräfte, Lichtstärken, galvanische Stromstärken u. s. f., so ist wohl zu verstehen, wie man dies einem Grössen*begriffe* unterordnen kann; aber der Ausdruck »Anschauung der Grösse« und gar »reine Anschauung der Grösse« kann nicht als zutreffend anerkannt werden. Ich kann nicht einmal eine Anschauung von 100000 zugeben, noch viel weniger von Zahl im Allgemeinen oder gar von Grösse im Allgemeinen. Man beruft sich zu leicht auf innere Anschauung, wenn man keinen andern Grund anzugeben vermag. Aber man sollte dabei den Sinn des Wortes »Anschauung« doch nicht ganz aus dem Auge verlieren.

Kant definirt in der Logik (ed. Hartenstein, VIII, S. 88):

---

[22] A. a. O. Bd. II., S. 669.

[23] Lehrbuch der Analysis, Bd. I., S. 1.

[24] Theorie der complexen Zahlensysteme, S. 54 u. 55.

»Die Anschauung ist eine einzelne Vorstellung (repraesentatio singularis), der Begriff eine allgemeine (repraesentatio per notas communes) oder reflectirte Vorstellung (repraesentatio discursiva).«

Hier kommt die Beziehung zur Sinnlichkeit gar nicht zum Ausdrucke, die doch in der transcendentalen Aesthetik hinzugedacht wird, und ohne welche die Anschauung nicht als Erkenntnissprincip für die synthetischen Urtheile apriori dienen kann. In der Kr. d. r. V. (ed. Hartenstein III, S. 55) heisst es:

»Vermittelst der Sinnlichkeit also werden uns Gegenstände gegeben und sie allein liefert uns Anschauungen.«

Der Sinn unseres Wortes in der Logik ist demnach ein weiterer als in der trancendentalen Aesthetik. Im logischen Sinne könnte man vielleicht 100000 eine Anschauung nennen; denn ein allgemeiner Begriff ist es nicht. Aber in diesem Sinne genommen, kann die Anschauung nicht zur Begründung der arithmetischen Gesetze dienen.

§ 13. Ueberhaupt wird es gut sein, die Verwandtschaft mit der Geometrie nicht zu überschätzen. Ich habe schon eine leibnizische Stelle dagegen angeführt. Ein geometrischer Punkt für sich betrachtet, ist von irgendeinem andern gar nicht zu unterscheiden; dasselbe gilt von Geraden und Ebenen. Erst wenn mehre Punkte, Gerade, Ebenen in einer Anschauung gleichzeitig aufgefasst werden, unterscheidet man sie. Wenn in der Geometrie allgemeine Sätze aus der Anschauung gewonnen werden, so ist das daraus erklärlich, dass die angeschauten Punkte, Geraden, Ebenen eigentlich gar keine besondern sind und daher als Vertreter ihrer ganzen Gattung gelten können. Anders liegt die Sache bei den Zahlen: jede hat ihre Eigenthümlichkeit. Inwiefern eine bestimmte Zahl alle andern vertreten kann, und wo ihre Besonderheit sich geltend macht, ist ohne Weiteres nicht zu sagen.

§ 14. Auch die Vergleichung der Wahrheiten in Bezug auf das von ihnen beherrschte Gebiet spricht gegen die empirische und synthetische Natur der arithmetischen Gesetze.

Die Erfahrungssätze gelten für die physische oder psychologische Wirklichkeit, die geometrischen Wahrheiten beherrschen das Gebiet des räumlich Anschaulichen, mag es nun Wirklichkeit oder Erzeugniss der Einbildungskraft sein. Die tollsten Fieberphantasien, die kühnsten Erfindungen der Sage und der Dichter, welche Thiere reden, Gestirne stille stehen lassen, aus Steinen Menschen und aus Menschen Bäume machen, und lehren, wie man sich am eignen Schopfe aus dem Sumpfe zieht, sie sind doch, sofern sie anschaulich bleiben, an die Axiome der Geometrie gebunden. Von diesen kann nur das begriffliche Denken in gewisser Weise loskommen, wenn es etwa einen Raum von vier Dimensionen oder von positivem Krümmungsmaasse annimmt. Solche Betrachtungen sind durchaus nicht unnütz; aber sie verlassen ganz den Boden der Anschauung. Wenn man diese auch dabei zu Hilfe nimmt, so ist es doch immer die Anschauung des euklidischen Raumes, des einzigen, von dessen Gebilden wir eine haben. Sie wird dann nur nicht so, wie sie ist, sondern symbolisch für etwas anderes genommen; man nennt z. B. gerade oder eben, was man doch als Krummes anschaut. Für das begriffliche Denken kann man immerhin von diesem oder jenem geometrischen Axiome das Gegentheil annehmen, ohne dass man in Widersprüche mit sich selbst verwickelt wird, wenn man Schlussfolgerungen aus solchen der Anschauung widerstreitenden Annahmen zieht. Diese Möglichkeit zeigt, dass die geometrischen Axiome von einander und von den logischen Urgesetzen unabhängig, also synthetisch sind. Kann man dasselbe von den Grundsätzen der Zahlenwissenschaft sagen? Stürzt nicht alles in Verwirrung, wenn man einen von diesen leugnen wollte? Wäre dann noch Denken möglich? Liegt nicht der Grund der Arithmetik tiefer als der alles Erfahrungswissens, tiefer selbst als der der Geometrie? Die arithmetischen Wahrheiten beherrschen das Gebiet des Zählbaren. Dies ist das umfassendste; denn nicht nur das Wirkliche, nicht nur das Anschauliche gehört ihm an, sondern alles Denkbare. Sollten also nicht die Gesetze der Zahlen mit denen des Denkens in der innigsten Verbindung stehen?

§ 15. Dass *Leibnizens* Aussprüche sich nur zu Gunsten der analytischen Natur der Zahlgesetze deuten lassen, ist vorauszusehen, da für ihn das Apriori mit dem Analytischen zusammenfällt. So sagt er[25], dass die Algebra ihre Vortheile einer viel höhern Kunst, nämlich der wahren Logik entlehne. An einer andern Stelle[26] vergleicht er die nothwendigen und zufälligen Wahrheiten mit den commensurabeln und incommensurabeln Grössen und meint, dass bei nothwendigen Wahrheiten ein Beweis oder eine Zurückführung auf Identitäten möglich sei. Doch diese Aeusserungen verlieren dadurch an Gewicht, dass *Leibniz* dazu neigt, alle Wahrheiten als beweisbar anzusehen[27]: »… dass jede Wahrheit ihren apriorischen, aus dem Begriff der Termini gezogenen Beweis hat, wiewohl es nicht immer in unserer Macht steht, zu dieser Analyse zu kommen.« Der Vergleich mit der Commensurabilität und Incommensurabilität richtet freilich doch wieder eine für uns wenigstens unüberschreitbare Schranke zwischen zufälligen und nothwendigen Wahrheiten auf.

Sehr entschieden im Sinne der analytischen Natur der Zahlgesetze spricht sich *W. Stanley Jevons* aus[28]: »Zahl ist nur logische Unterscheidung und Algebra eine hoch entwickelte Logik.«

§ 16. Aber auch diese Ansicht hat ihre Schwierigkeiten. Soll dieser hochragende, weitverzweigte und immer noch wachsende Baum der Zahlenwissenschaft in blossen Identitäten wurzeln? Und wie kommen die leeren Formen der Logik dazu, aus sich heraus solchen Inhalt zu gewinnen?

Mill meint: »Die Lehre, dass wir durch kunstfertiges Handhaben der Sprache Thatsachen entdecken, die verborgene Naturprocesse enthüllen können, ist dem gesunden Menschenverstande so entgegen, dass es schon einen Fortschritt in der Philosophie verlangt, um sie zu glauben«.

Gewiss dann, wenn man sich bei dem kunstfertigen Handhaben nichts denkt. *Mill* wendet sich hier gegen einen Formalismus, der kaum von irgendwem vertreten wird. Jeder, der Worte oder mathematische Zeichen gebraucht, macht den Anspruch, dass sie etwas bedeuten, und niemand wird erwarten, dass aus leeren Zeichen etwas Sinnvolles hervorgehe. Aber es ist möglich, dass ein Mathematiker längere Rechnungen vollführt, ohne unter seinen Zeichen etwas sinnlich Wahrnehmbares, Anschauliches zu verstehen. Darum sind diese Zeichen noch nicht sinnlos; man unterscheidet dennoch ihren Inhalt von ihnen selbst, wenn dieser auch vielleicht nur mittels der Zeichen fassbar wird. Man ist sich bewusst, dass andere Zeichen für Dasselbe hätten festgesetzt werden können. Es genügt zu wissen, wie der in den Zeichen versinnlichte Inhalt logisch zu behandeln ist, und wenn man Anwendungen auf die Physik machen will, wie der Uebergang zu den Erscheinungen geschehen muss. Aber in einer solchen Anwendung ist nicht der eigentliche Sinn der Sätze zu sehen. Dabei geht immer ein grosser Theil der Allgemeinheit verloren, und es kommt etwas Besonderes hinein, das bei andern Anwendungen durch Anderes ersetzt wird.

§ 17. Man kann trotz aller Herabsetzung der Deduction doch nicht leugnen, dass die durch Induction begründeten Gesetze nicht genügen. Aus ihnen müssen neue Sätze abgeleitet werden, die in keinem einzelnen von jenen enthalten sind. Dass sie in allen zusammen schon in gewisser Weise stecken, entbindet nicht von der Arbeit, sie daraus zu entwickeln und für sich herauszustellen. Damit eröffnet sich folgende Möglichkeit. Statt eine Schlussreihe unmittelbar an eine Thatsache anzuknüpfen, kann man, diese dahingestellt sein lassend, ihren Inhalt als Bedingung mitführen. Indem man so alle Thatsachen in einer Gedankenreihe durch Bedingungen ersetzt, wird man das Ergebniss in der Form erhalten, dass von einer Reihe von Bedingungen ein Erfolg abhängig gemacht ist. Diese Wahrheit wäre durch Denken allein, oder, um mit *Mill*

[25] Baumann a. a. O. Bd. II., S. 56; Erdm. S. 424.

[26] Baumann a. a. O. Bd. II., S. 57; Erdm. S. 83.

[27] Baumann a. a. O. Bd. II., S. 57; Pertz, II., S. 55.

[28] The principles of science. London 1879. S. 156.

Конец ознакомительного фрагмента.