Сибирский федеральный университет
Siberian Federal University

Т. П. Пушкарёва

# Математические основы живописи и архитектуры

Учебно-методическое пособие

УМО

Политехнический институт

Технология художественной обработки материалов

Татьяна Пушкарёва

# Математические основы живописи и архитектуры

«Сибирский федеральный университет»

2014

УДК 51:[75+72] (07)
ББК 22.1я73+85.1я73

**Пушкарёва Т. П.**

Математические основы живописи и архитектуры /
Т. П. Пушкарёва — «Сибирский федеральный университет», 2014

ISBN 978-5-7638-3092-7

В пособии рассмотрено применение математических фигур и расчетов в живописи и архитектуре, а также в теории цвета. Приведены примеры, способствующие усвоению теоретического материала. Предназначено для студентов классических и технических вузов художественного направления. Может быть полезно студентам при изучении курсов «Композиция» и «Дизайн», а также преподавателям художественных дисциплин.

УДК 51:[75+72] (07)
ББК 22.1я73+85.1я73

ISBN 978-5-7638-3092-7

# Содержание

# Т. П. Пушкарёва
# Математические основы живописи и архитектуры

## Введение

Согласно современным взглядам математика и изобразительное искусство – очень удаленные друг от друга дисциплины, поскольку первая из них – аналитическая, вторая – эмоциональная. Математика не играет очевидной роли в современном искусстве, однако у большинства художников она находится в центре внимания.

Своеобразным «скелетом живописи», ее конструктивной основой является рисунок. Он играет важнейшую роль в определении очертаний предметов, их форм, объемов и взаимного расположения в пространстве, т.е. именно в нем заложены геометрические законы живописи.

Своеобразие геометрии, выделяющее ее из других разделов математики, заключается в неразрывном, органическом соединении живого воображения со строгой логикой. По своей сущности геометрия – это пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой. В ней всегда присутствуют эти два неразрывно связанных элемента: наглядная картина и точная формулировка, строгий логический вывод.

Наглядность, воображение принадлежат больше искусству, строгая логика – привилегия математики.

Еще одним фундаментальным понятием математики, которое имеет прямое отношение к природе и искусству, является симметрия.

Художники разных эпох использовали симметричное построение картины. Симметричными были многие древние мозаики. Живописцы эпохи Возрождения часто строили свои композиции по законам симметрии. Такое построение позволяло достигнуть впечатления покоя, величественности, особой торжественности и значимости событий.

Бордюры в архитектурных и скульптурных произведениях, орнаменты в прикладном искусстве – все это примеры использования симметрии.

Иоганн Кеплер говорил, что геометрия владеет двумя сокровищами: теоремой Пифагора и золотым сечением.

Как следствие многочисленных применений золотого сечения в геометрии и искусстве в эпоху Возрождения появилась книга «Божественная пропорция», а сам термин был введен Леонардо да Винчи в XV веке. Пропорция золотого сечения лежит в основе многих творений Фидия, Тициана, Рафаэля и других.

В эпоху Возрождения золотое сечение было очень популярно среди художников, скульпторов и архитекторов. В большинстве живописных пейзажей линия горизонта делит полотно по высоте в отношении золотой пропорции, а при выборе размеров картин старались, чтобы отношение ширины к высоте тоже равнялось золотой пропорции.

Настоящее искусство имеет свою теорию. Иногда эту теорию можно выразить в терминах математики, так как она тесно связана практически со всеми разновидностями современного искусства и искусства древних времен.

# § 1. Математическое изобразительное искусство

В математическом изобразительном искусстве наиболее часто используют многогранники, тесселяции, ленты Мебиуса, невозможные фигуры, фракталы и искаженные перспективы. Отдельные работы могут включать в себя одновременно несколько перечисленных фигур и объектов.

*Многогранник* – это трехмерное тело, гранями которого являются многоугольники. Существует всего пять правильных многогранников, у которых все стороны являются правильными многоугольниками и все вершины одинаковы. Они известны как *многоугольники Платона*, или Платоновы тела (рис. 1).

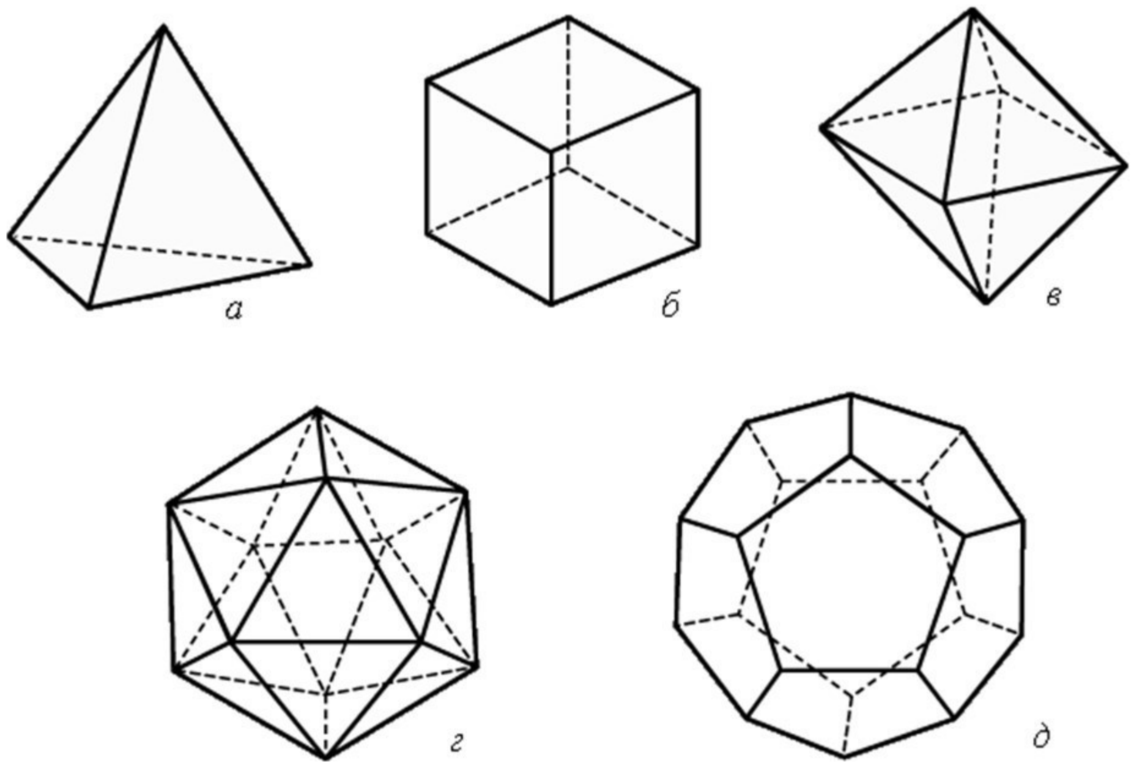


Рис. 1. Платоновы тела: *а* – тетраэдр; *б* – куб; *в* – октаэдр; *г* – икосаэдр; *д* – додекаэдр

Существует 13 выпуклых многогранников, гранями которых являются один, два или три правильных многоугольника и у которых все вершины одинаковы. Они известны как *тела Архимеда* (рис. 2).

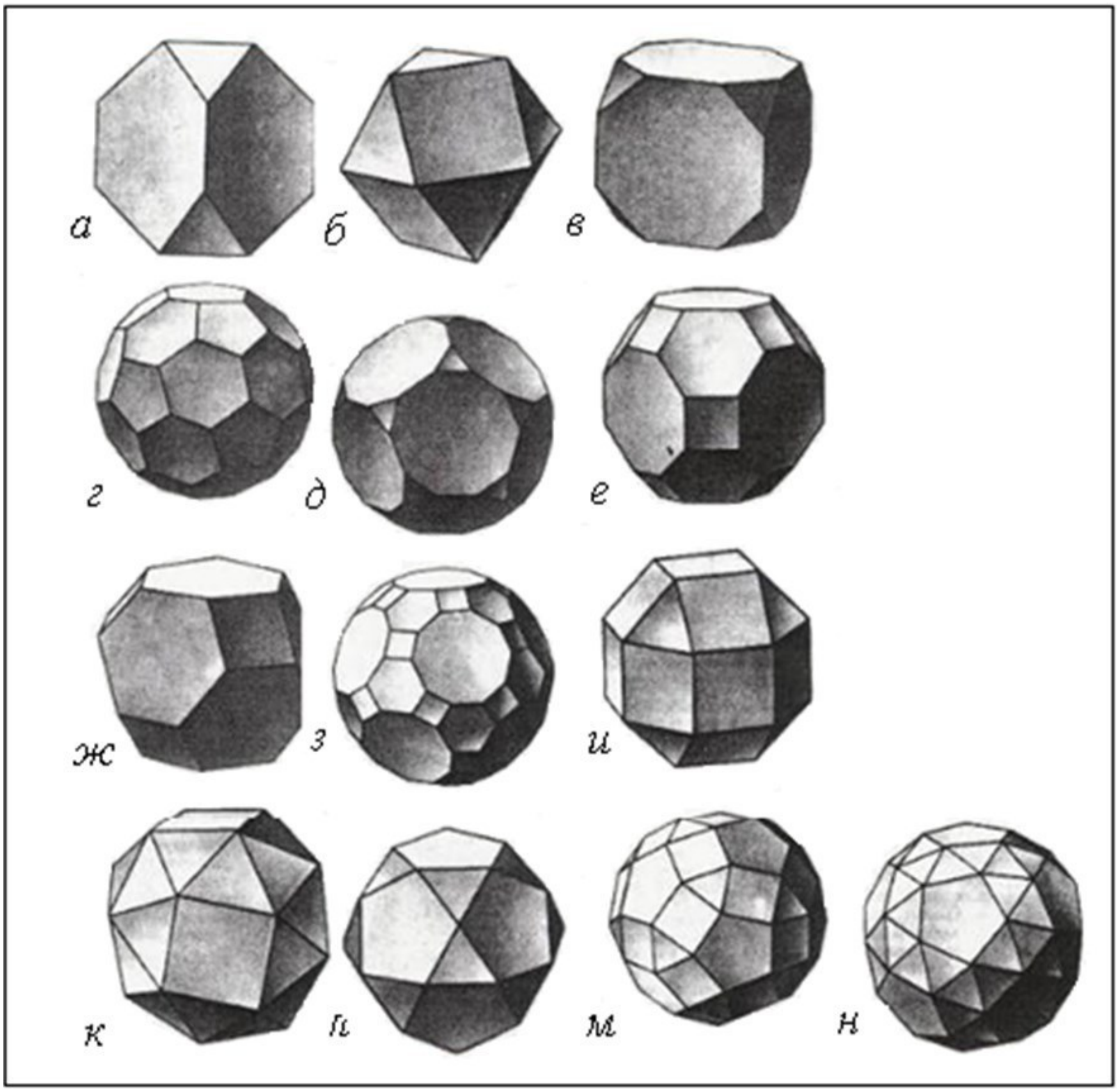


Рис. 2. Архимедовы тела: *а* – усеченный тетраэдр; *б* – кубооктаэдр; *в* – усеченный куб; *г* – усеченный икосаэдр; *д* – усеченный додекаэдр; *е* – усеченный кубооктаэдр; *ж* – усеченный октаэдр; *з* – усеченный икосододекаэдр; *и* – ромбокубооктаэдр; *к* – дважды усеченный куб (курносый куб); *л* – икосододекаэдр; *м* – ромбоикосододекаэдр; *н* – дважды усеченный додекаэдр (курносый додекаэдр)

Кроме этого, существует бесконечное множество *призм* и *антипризм* с гранями в виде правильных многоугольников. Антипризма – полуправильный многогранник, у которого две параллельные грани (основания) – равные между собой правильные $n$-угольники, а остальные $2n$ граней (боковые грани) – правильные треугольники (рис. 3).

Кроме правильных и полуправильных многогранников красивые формы имеют звездчатые многогранники. Правильные звездчатые многогранники получаются из правильных многогранников путем продолжения их граней и ребер. Их всего четыре, и называются они телами Кеплера – Пуансо (рис. 4).

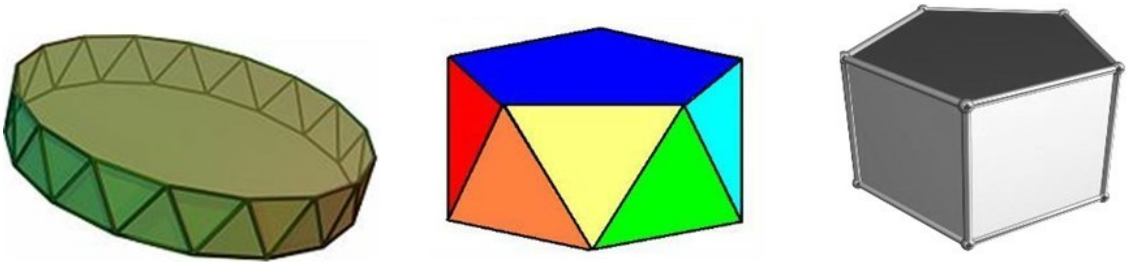

Рис. 3. Антипризмы

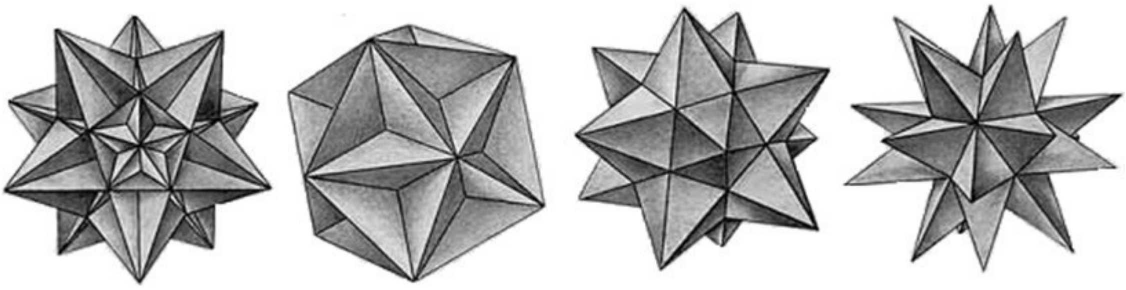

Рис. 4. Тела Кеплера–Пуансо

*Тесселяции*, известные также как покрытие плоскости плитками (tiling), являются коллекциями фигур, которые покрывают всю математическую плоскость, совмещаясь друг с другом без наложений и пробелов. *Правильные тесселяции* состоят из фигур в виде правильных многоугольников, при совмещении которых все углы имеют одинаковую форму. Существует всего три многоугольника, пригодных для использования в правильных тесселяциях. Это правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник (рис. 5).

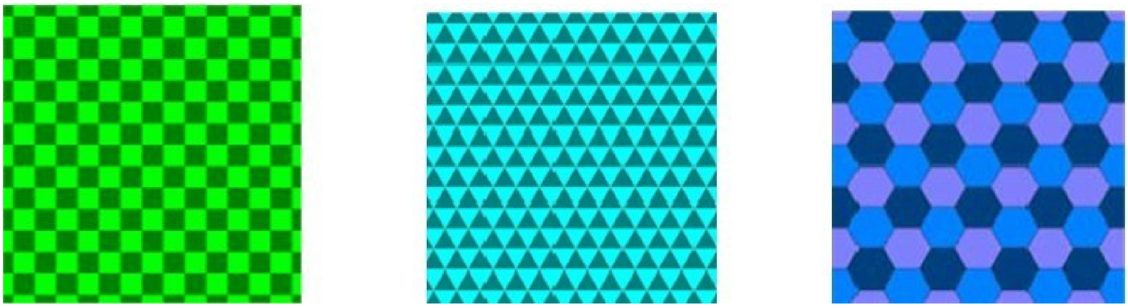

Рис. 5. Правильные тесселяции

*Полуправильными тесселяциями* называют такие тесселяции, в которых использованы правильные многоугольники двух или трех типов и все вершины одинаковы (рис. 6).

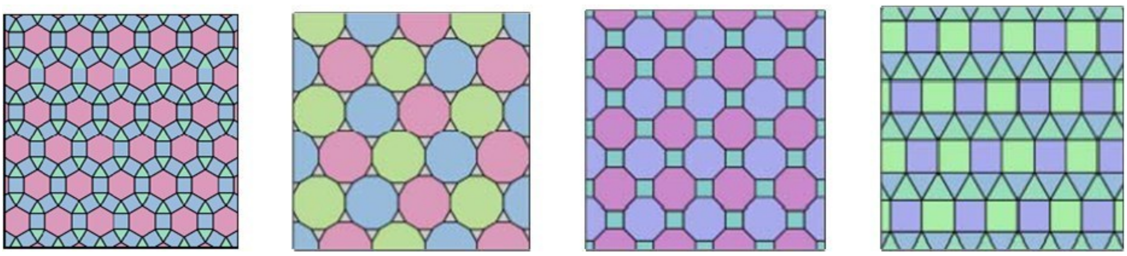

Рис. 6. Полуправильные тесселяции

Существует всего 8 полуправильных тесселяций. Вместе три правильных тесселяции и восемь полуправильных носят название Архимедовых.

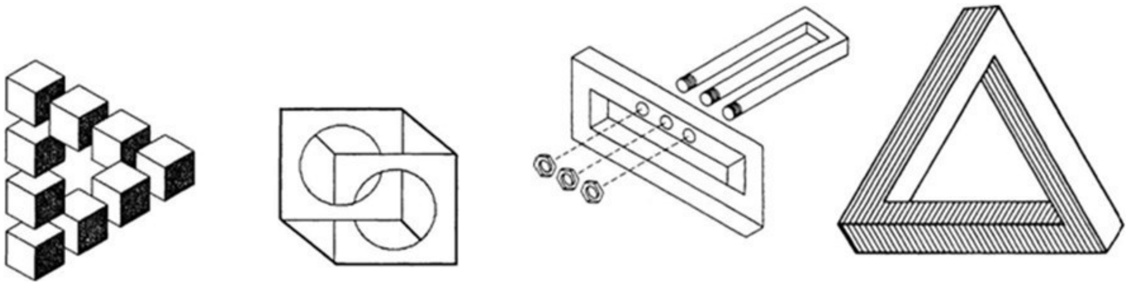

Рис. 7. Невозможные фигуры

Рис. 8. Ленты Мебиуса

*Невозможные фигуры* – это фигуры, изображенные в перспективе таким способом, чтобы выглядеть на первый взгляд обычной фигурой. Однако при более внимательном рассмотрении зритель понимает, что такая фигура не может существовать в трехмерном пространстве (рис. 7).

*Лента Мебиуса* – это трехмерный объект, имеющий только одну сторону. Такая лента может быть легко получена из полоски бумаги, если перекрутить один из концов полоски, а затем склеить оба конца друг с другом (рис. 8).

Необычные системы перспективы, содержащие две или три исчезающие точки, также являются излюбленной темой многих художников. К ним также относится родственная область – *анаморфное искусство*. Слово анаморфный (anamorthic) состоит из двух греческих слов «ana» (снова) и «morthe» (форма). К анаморфным относятся изображения, настолько сильно искаженные, что разобрать их без специального зеркала бывает невозможно. Если смотреть в анаморфоскоп, то изображение «формируется снова» в узнаваемую картину.

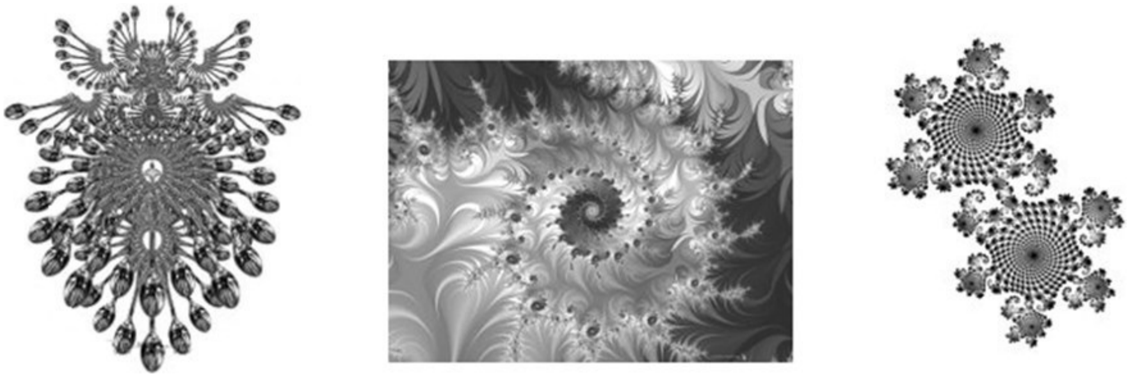

Рис. 9. Фракталы

*Фрактал* – это объект, повторяющий сам себя в различных масштабах, которые связаны математическим способом. Фракталы формируются итерационно, многократно повторяя вычисления так, что получается объект высокой сложности с множеством мелких деталей (рис. 9).

## Вопросы для самоконтроля

1. Какие фигуры и объекты наиболее часто используются в математическом изобразительном искусстве?
2. Что такое многогранник?
3. Какие многогранники относятся к Платоновым телам?
4. Что такое тело Архимеда?
5. Какие многогранники называют призмами и антипризмами?
6. Какие многогранники называют телами Кеплера – Пуансо?
7. Что такое тесселяции?
8. Какие тесселяции называют правильными и полуправильными?
9. Какая фигура называется невозможной?
10. Что представляет собой лента Мебиуса?
11. Какие изображения называют анаморфными?
12. Что такое фрактал?

# § 2. Аксонометрия

*Аксонометрия* – метод проектирования взаимно параллельными лучами, наклонными к плоскости проекций. Термин аксонометрия представляет сочетание двух греческих слов – «ось» и «мерить». Название точно определяет процесс построения аксонометрических изображений, основанный на воспроизведении размеров проектируемого предмета по направлениям трех осей – длины, ширины и высоты.

К изображениям в *аксонометрических проекциях* в работах архитекторов, инженеров и художников предъявлялись различные требования, поэтому были созданы особые виды таких проекций для различных целей.

Общим для всех видов аксонометрических проекций является то, что за основу для изображения любого предмета принимают то или иное расположение осей *ОХ, ОУ, OZ*, по направлениям которых и отмеряют длину, ширину и высоту данного предмета.

Аксонометрические проекции принято называть *изометрическими*, или *изометрией*, если показатели искажения по всем осям равны. Если искажения равны только по двум осям, то проекции называются *диметрическими*, или *диметрией*. Аксонометрия называется *триметрической*, или *триметрией*, если все показатели искажения различны. На рис. 10 представлены виды аксонометрических проекций.

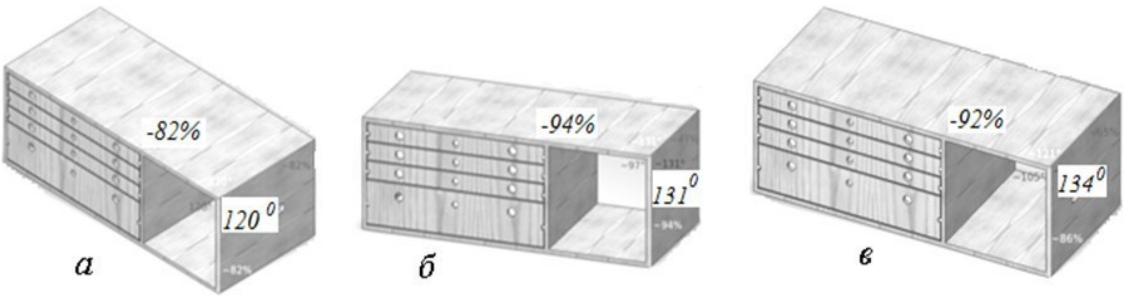


Рис. 10. Виды аксонометрии: *а* – изометрия; *б* – диметрия; *в* – триметрия

В каждом из этих видов проецирование может быть прямоугольным и косоугольным. Благодаря своей наглядности аксонометрия широко применяется в изданиях технической литературы и в научно-популярных книгах.

Рассмотрим виды аксонометрических проекций: изометрическую, диметрическую и горизонтальную.

При изометрическом проектировании оси расположены под равными углами друг к другу (120°) (рис. 11, *а*). Окружности (рис. 11, *б*), находящиеся в плоскостях, параллельных плоскостям проекций, выполняются эллипсами, у которых направление малой оси совпадает с направлением оси, не входящей в плоскость, а большая ей перпендикулярна. Здесь малая ось определяется как 0,71 от диаметра окружности, большая ось равна 1,22 от диаметра окружности.

Такое расположение осей получается при прямоугольном проектировании предмета в том случае, когда все три его измерения одинаково наклонены к плоскости проекций. При таком проектировании размеры предмета по всем трем осям уменьшаются в одинаковой степени и обычно их изображают без изменения.

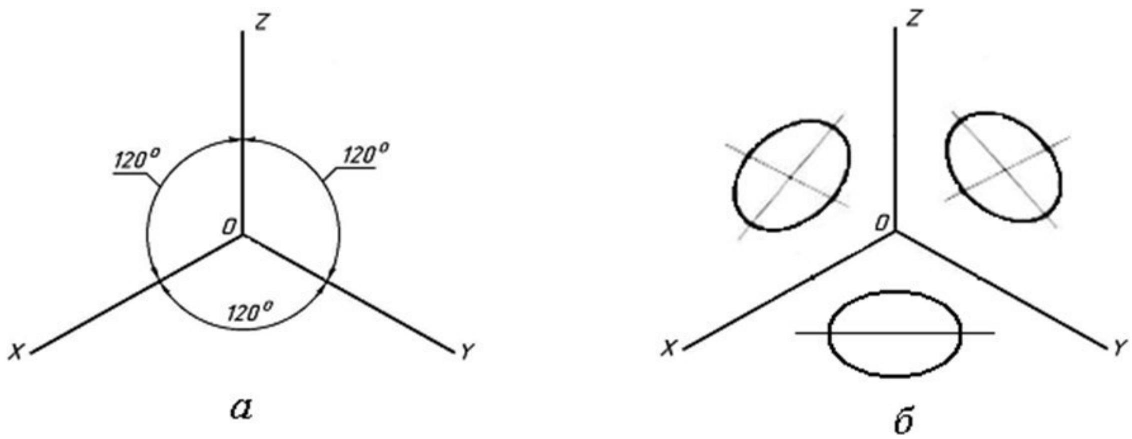


Рис. 11. Изометрическое проектирование: *а* – расположение осей координат; *б* – расположение окружностей

Диметрия подразделяется на прямоугольную и фронтальную (косоугольную).

Для прямоугольной диметрической проекции ось *OZ* вертикальна, другие две оси наклонены к горизонтали: *OX* – под углом в 7°, а *OУ* – в 41° (рис. 12). При таком проектировании получают изображение, увеличенное в 1,06 раза по сравнению с натуральным.

Фронтальная диметрическая проекция характеризуется тем, что *OZ* вертикальна, *OX* горизонтальна, а *OУ* направляется под углом в 135° к каждой из этих двух осей (рис. 13).

При диметрическом проектировании размеры изображаемого предмета обычно делают без искажения по осям *OX* и *OZ*, а по оси *OУ* уменьшают вдвое. Диметрические изображения более близки к перспективным, чем другие виды аксонометрии.

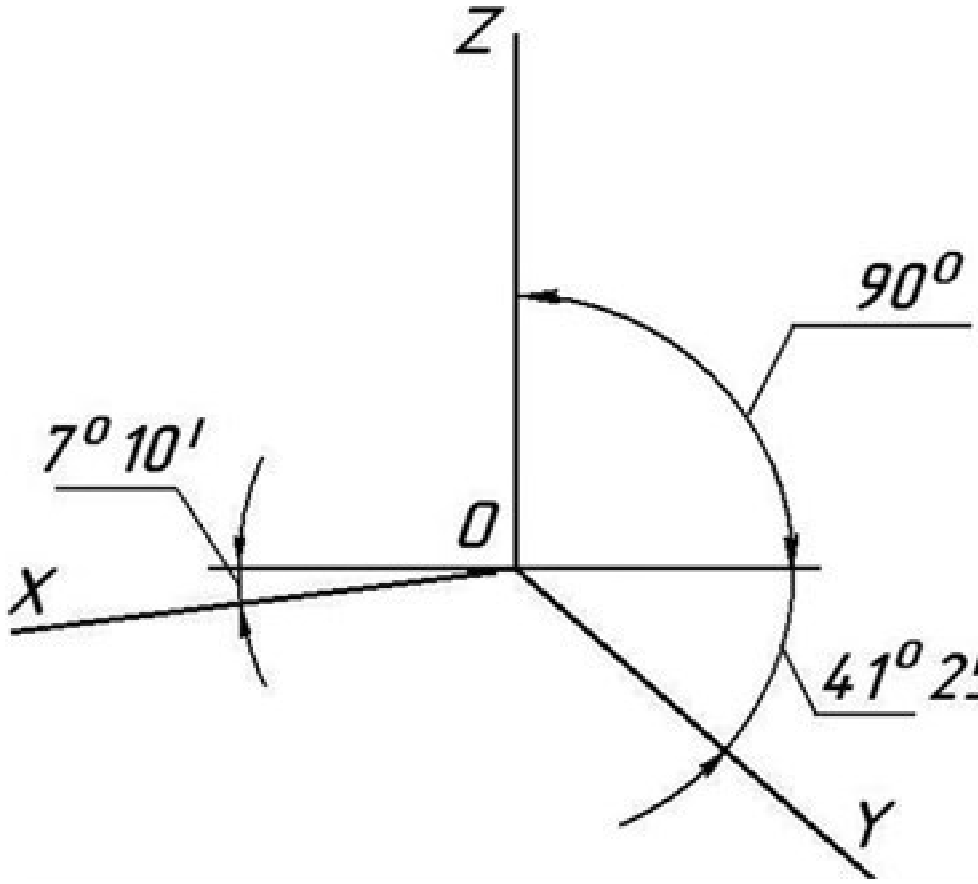


Рис. 12. Расположение осей координат для диметрической проекции

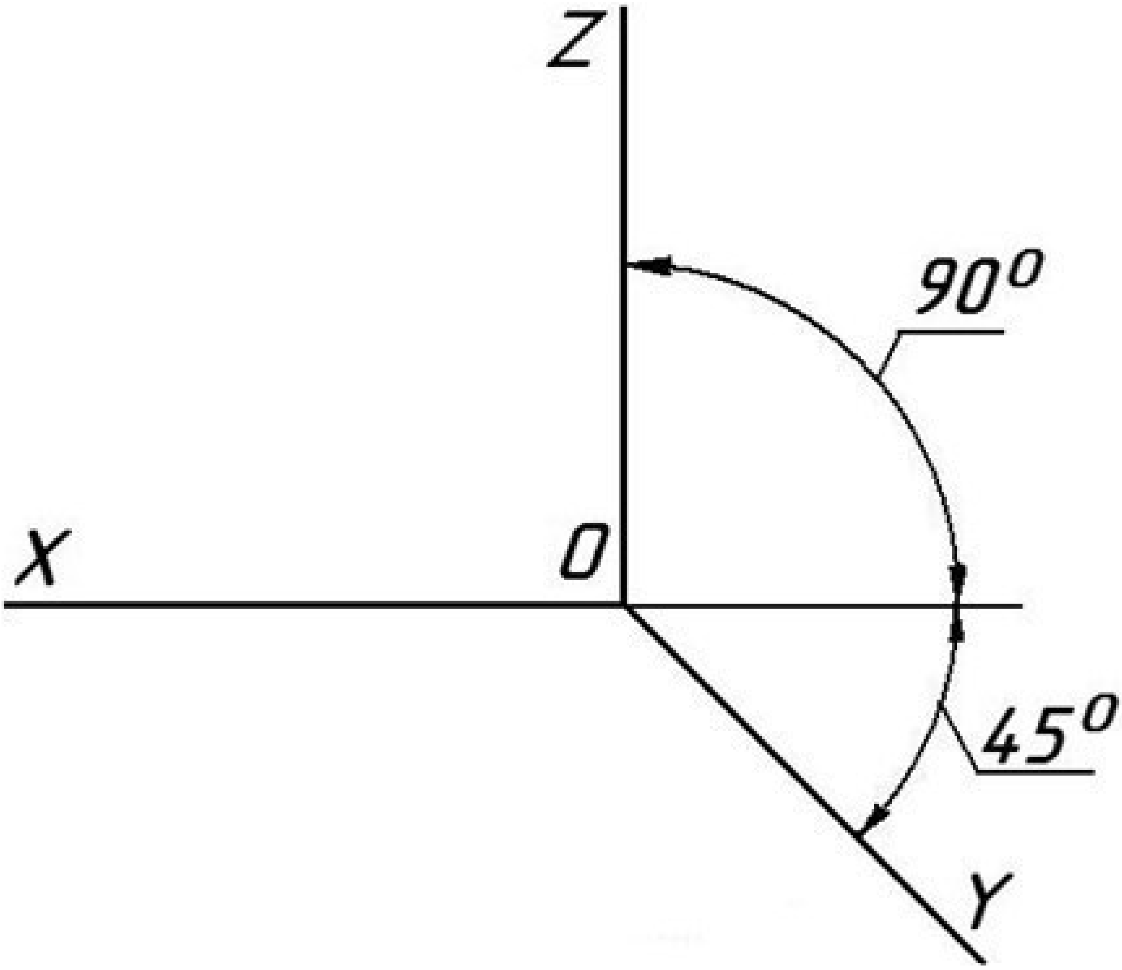


Рис. 13. Расположение осей координат для фронтальной проекции

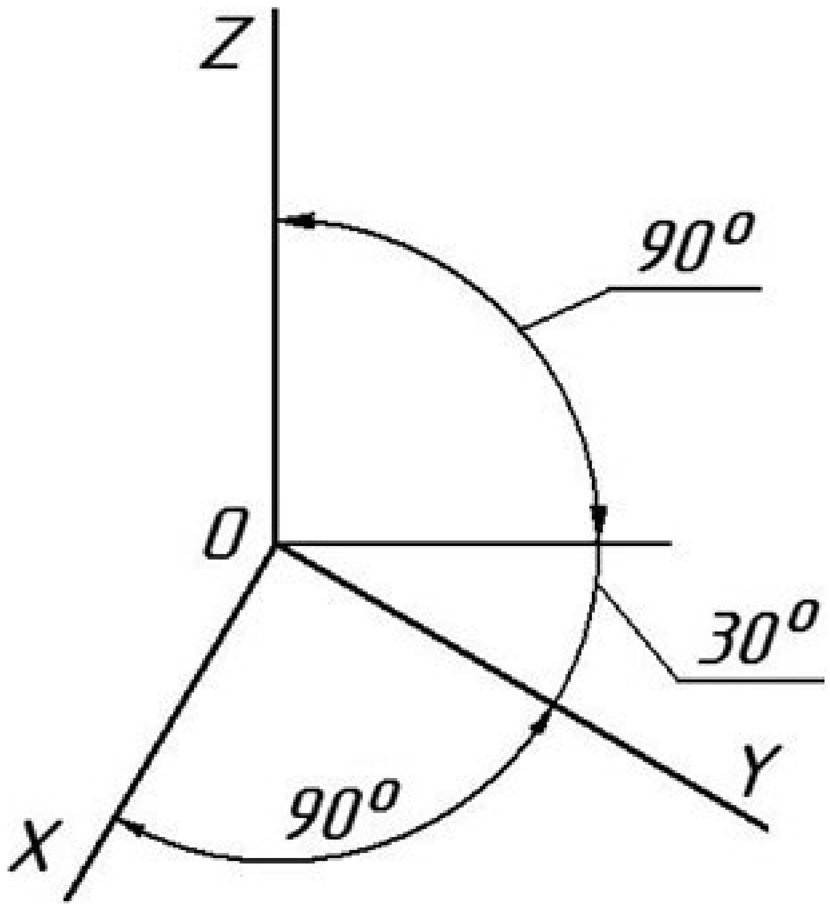


Рис. 14. Оси горизонтальной изометрии

Для горизонтальной симметрии угол наклона оси $OY = 30°$ при сохранении прямого угла между осями $OX$ и $OZ$ (рис. 14).

Этот вид косоугольной изометрической проекции часто используется при решении вопросов пространственной композиции жилых районов и архитектурно-планировочной организации больших территорий (архитектурных ансамблей). Коэффициенты искажения по аксонометрическим осям равны ($k = m = n$

# Конец ознакомительного фрагмента.