Под редакцией А. А. Лобанова, А. В. Чугунова

ALT-invest

Энциклопедия финансового риск-менеджмента

4-е издание,
исправленное и дополненное

альпина
ПАБЛИШЕР

Алексей Лобанов

Энциклопедия финансового риск-менеджмента

«Альпина Диджитал»

2019

Лобанов А. А.

Энциклопедия финансового риск-менеджмента / А. А. Лобанов — «Альпина Диджитал», 2019

Эта книга – первое в России издание учебно-энциклопедического характера, в котором в соответствии с международными стандартами освещаются основные вопросы финансового риск-менеджмента. Издание дополнено новыми материалами по организационным аспектам риск-менеджмента, моделям эволюции процентных ставок, рискам страхования банковских вкладов и анализу макроэкономических рисков. Рассмотрены современные методы количественной оценки и управления финансовыми рисками, теория экстремальных значений, соглашения о форвардной процентной ставке и др. Дан систематизированный обзор методов количественного анализа, используемых в риск-менеджменте, моделей ценообразования и стратегий применения производных финансовых инструментов. Приведен обзор основных положений Нового базельского соглашения по капиталу 2004 г., выполненных на основе последней редакции соглашения от ноября 2006 г. Книга предназначена для профессионалов, непосредственно занимающихся оценкой и управлением рисками, преподавателей, студентов и аспирантов экономических факультетов вузов. Она также может использоваться для подготовки к сдаче международных экзаменов по финансовому риск-менеджменту на получение сертификатов Financial Risk Manager (FRM®) и Professional Risk Manager (PRM®).

Содержание

Энциклопедия финансового риск-менеджмента

Издано при содействии ГК «Альт-Инвест»

Авторы: канд. физ. – мат. наук, проф. *В. Е. Барбаумов* (гл. 1, 2), канд. экон. наук, доц. *М. А. Рогов* (гл. 3), канд. экон. наук *Д. Ф. Щукин* (гл. 4), канд. экон. наук, доц. *Н. Ю. Ситникова* (гл. 5), канд. экон. наук *П. В. Бурков* (гл. 6), канд. экон. наук *С. Н. Тихомиров* (гл. 7), канд. экон. наук *А. А. Лобанов* (введение, гл. 8, 9), канд. экон. наук *С. В. Замковой* (гл. 9, 10), канд. экон. наук *В. К. Шпрингель* (гл. 10), докт. техн. наук, проф., FRM *Д. Ю. Голембиовский* (гл. 11)

Под общей редакцией канд. экон. наук *А. А. Лобанова, А. В. Чугунова*

Технический редактор *Н. Лисицына*

Корректоры *Е. Аксенова, О. Ильинская*

Компьютерная верстка *А. Фоминов*

Художник обложки *М. Соколова*

* * *

К читателям

Управление финансовыми рисками как самостоятельная дисциплина существует в нашей стране относительно недавно, а первые специализированные компании и профессиональные издания появились менее десяти лет назад. Тем не менее вопросы управления рисками решаются в разных отраслях на протяжении десятилетий и принятые в этой сфере подходы многократно применялись на практике. Кроме того, в финансовом риск-менеджменте, как и во всех вопросах, связанных с финансами, огромную, даже определяющую, роль играет зарубежный опыт. Поэтому тема, затронутая в энциклопедии, опирается на подходы и принципы, которые во многом уже являются классическими.

Управление финансовыми рисками можно условно разделить на несколько крупных разделов, относящихся к разным областям деятельности предприятия или частного инвестора. Во-первых, это риски, ожидающие инвестора или заемщика на финансовых рынках: рыночные и кредитные риски, риски определенных инвестиционных инструментов и в управлении портфелем. Во-вторых, это риски предприятия, связанные с его деятельностью: операционные, рыночные, экономические. И наконец, в-третьих, это специфические риски кредитных учреждений, требующие особого подхода.

Каждому из этих рисков в энциклопедии отведено несколько разделов, где они рассматриваются с разных позиций и где акцентируется внимание на отдельных аспектах анализа и управления риском. Еще один, вводный, раздел рассматривает общие основы финансовой математики, теории вероятности и статистики – аналитических инструментов, повсеместно применяющихся в управлении рисками. С учетом такой структуры, может быть, удобнее читать не всю книгу от начала до конца, а ее отдельные разделы – по мере возникновения потребности в аналитических техниках и подходах.

Как правило, управление рисками требуется тогда, когда вопросы ежедневного управления и выбора стратегических целей уже решены и создана среда для более тонких подходов. Это стоит принимать во внимание и во время чтения данной книги. Каждый раздел управления рисками потребует от читателя не только понимания сути возникающих в изучаемой области угроз, но и значительных навыков и опыта применения более простых, базовых методов анализа и управления финансовыми вложениями, доходами и затратами. Возвращайтесь к энциклопедии через год или через три – и вы обнаружите в ней все больше новых идей, полезных в работе.

Дмитрий Рябых,
генеральный директор ООО «Альт-Инвест»

Предисловие

С проблемами управления финансовыми рисками финансовые институты сталкиваются с давних пор, и этими вопросами занимались специалисты различных бизнес-подразделений. Например, банки – при кредитовании или управлении ликвидностью, инвестиционные компании – при управлении портфелем, клиринговые организации – при обслуживании биржи–организатора торгов производными инструментами, страховые компании – практически постоянно и т. д. В страховании этими вопросами традиционно занимались актуарии. Для остальных финансовых институтов риск-менеджмент выделился в самостоятельное направление, необходимое для ведения бизнеса, сравнительно недавно, в начале 1990-х гг. Ранее, в середине 1980-х, крупные инвестиционные банки начали создавать подразделения по управлению рисками на уровне derivatives desk, т. е. отделов, занимающихся операциями с производными финансовыми инструментами. Это явилось результатом возрастания сложности этих инструментов наряду с серией крахов, связанных с непониманием рисков, присущих производным, хотя сами инструменты были созданы в первую очередь для целей управления рисками.

С начала 1990-х гг. можно говорить о риск-менеджменте как о вполне сложившейся новой финансовой индустрии. Факторами, способствующими повышению роли риск-менеджмента, стали глобализация финансовых рынков, рост международной конкуренции, увеличение волатильности рынков и возрастание интенсивности дефолтов. Важную роль сыграли усилия регуляторов по поддержанию системной безопасности, в первую очередь разработанное в 1988 г. Базельским комитетом Соглашение о достаточности капитала для банков, осуществляющих международные операции. В 1996 г. появилось важное дополнение, касающееся рыночных рисков, а в 2004 г. принято новое Соглашение, касающееся управления кредитными и операционными рисками, надзора и рыночной дисциплины.

Риск-менеджмент сегодня осуществляется на уровне всей компании, охватывает все стороны финансовой деятельности и выступает как стратегический инструмент оптимизации использования капитала с учетом риска, причем уже не только в финансовых институтах, но и в крупных нефинансовых корпорациях с интенсивными денежными потоками. Качество риск-менеджмента считается одним из важнейших компонентов корпоративного управления и оказывает непосредственное влияние на рыночную стоимость компании, а рейтинговые агентства, такие как Standard & Poor's и Moody's, учитывают это при определении кредитного рейтинга. Сложились стандарты индустрии, такие как показатели VaR (Value-at-Risk) или RAROC (Risk-Adjusted Return on Capital). Одним из убедительных свидетельств успеха индустрии риск-менеджмента является возрастание количества программных продуктов по риск-менеджменту и рост их продаж.

Развитие риск-менеджмента, в свою очередь, стимулировало создание во второй половине 1990-х гг. производных финансовых инструментов нового типа, так называемых кредитных производных. Их появление было невозможно, пока не были разработаны эффективные модели оценки кредитных рисков – продукт деятельности подразделений по риск-менеджменту. Основное назначение этих производных – управление кредитными рисками, отсюда и название (ранее производные позволяли управлять только рыночными рисками). Широкое распространение на практике получила секьюритизация как способ изменения профиля кредитных рисков.

Возникли международные профессиональные организации риск-менеджеров – GARP[1], PRMIA[2], созданы сертификационные программы с регулярными экзаменами, разработан про-

[1] *Global Association of Risk Professionals* – Международная ассоциация профессионалов по управлению рисками, создана в 1996 г. Более подробную информацию см. на сайте http://www.garp.com.

фессиональный кодекс этики. Сегодня риск-менеджер – престижная и высокооплачиваемая профессия, требующая хорошего экономического мышления, аналитических способностей, понимания особенностей функционирования финансовых институтов, знания финансовых рынков и финансовых инструментов, хорошего владения математическим аппаратом.

В России первые подразделения по управлению рисками стали создаваться в крупных банках в 1996-1997 гг. Некоторые банки, которые сумели поставить риск-менеджмент в своей компании на должном уровне, извлекли из этого вполне реальную пользу – сумели выжить в жестких условиях кризиса 1998 г.

После кризиса риск-менеджменту стало уделяться серьезное внимание. Сегодня риск-менеджеры работают не только в крупных и средних банках, в крупных инвестиционных и страховых компаниях, но и в крупных корпорациях (таких как Аэрофлот, «Норильский никель»). Ряд банков внедрили в практику современные технологии риск-менеджмента.

В последнее время стал набирать обороты рынок производных финансовых инструментов, в частности на бирже РТС успешно торгуются фьючерсы и опционы на фьючерсы на наиболее ликвидные акции российских эмитентов и фондовые индексы. Дальнейшее развитие рынка производных финансовых инструментов, в особенности внебиржевого рынка, сдерживается недостаточной нормативной базой, приводящей к значительным юридическим рискам. Поэтому в настоящее время в Государственной думе рассматриваются возможные поправки в законодательство и законопроект о рынке производных финансовых инструментов.

Появление внебиржевого рынка производных финансовых инструментов, наиболее гибкого и эффективного средства управления рисками, крайне необходимо российской банковской системе для того, чтобы обеспечить конкурентоспособность по сравнению с западными банками в условиях либерализации рынка и интеграции в международную финансовую систему. Это также будет выдвигать повышенные требования к квалификации риск-менеджеров и финансовых инженеров.

Быстрыми темпами в России развивается потребительское кредитование, кредитные карты, ипотечное кредитование, создаются кредитные бюро. Это ставит перед риск-менеджерами и финансовыми инженерами новые задачи, например создание эффективных систем скоринга, использование секьюритизации для целей рефинансирования и управления кредитным риском.

С начала 2002 г. функционирует российское отделение международной профессиональной ассоциации риск-менеджеров PRMIA, основные направления деятельности которого – способствовать обмену опытом, разработке стандартов, а также сертификации и обучению. Под эгидой PRMIA постоянно действует научно-практический семинар[3], который собирает как практиков, так и представителей академических кругов, студентов и аспирантов. При поддержке российского отделения PRMIA проводятся международные конференции по управлению рисками[4].

Ряд российских учебных заведений готовят риск-менеджеров и проводят курсы повышения квалификации, в том числе Государственный университет управления, РЭА им. Г. В. Плеханова, Академия народного хозяйства при Правительстве РФ, Финансовая академия при Правительстве РФ, Государственный университет – Высшая школа экономики. Поскольку требования к квалификации риск-менеджеров постоянно растут, то растет и потребность в обу-

---

[2] Professional Risk Managers' International Association – международная профессиональная ассоциация риск-менеджеров, создана в 2002 г. Более подробную информацию см. на сайте http://www.prmia.org.

[3] Информацию о семинаре можно найти на сайте http://www.riskmanager.ru; для участия в нем или выступления с докладом не обязательно быть членом PRMIA, приглашаются все желающие.

[4] Информация о конференциях (включая материалы докладов прошедших мероприятий) размещена на сайте http://www.riskconference.ru.

чении и сертификации. Некоторые российские риск-менеджеры уже успешно сдали экзамены на сертификаты GARP или PRMIA.

В связи с этим очевидна необходимость пособия для риск-менеджеров на русском языке, которое бы достаточно широко охватило разные стороны практической деятельности и соответствующей теории. Предлагаемая читателю книга и является первой в таком жанре. Книга появилась во многом благодаря самоотверженным усилиям Алексея Лобанова, который взял на себя нелегкий труд по ее редактированию.

Обучить риск-менеджера – дело непростое. Для риск-менеджеров, например, полезны углубленные знания по теории вероятностей, математической статистике, теории случайных процессов, исследованию операций. Желательно владеть основами банковского дела, страхования, инвестиционного анализа, корпоративных финансов, анализа финансовой отчетности, налогообложения и т. д. Поэтому претендовать на полное покрытие всей тематики, связанной с управлением рисками, книга не может (вряд ли это вообще возможно). Тем не менее она будет, безусловно, полезна как практикам, так и тем, кто обучается риск-менеджменту, в том числе тем, кто готовится к сдаче сертификационных экзаменов.

С. Н. Смирнов,
директор российского отделения PRMIA,

заведующий кафедрой управления рисками и страхования
Государственного университета – Высшей школы экономики

Введение

Эта книга впервые увидела свет спустя ровно 30 лет с того момента, который многими в мире признается в качестве отправной точки в истории развития финансового риск-менеджмента как самостоятельного направления практической деятельности и раздела финансовой теории. В 1973 г. почти одновременно произошли три важнейших события, во многом определившие «финансовую картину мира» на десятилетия вперед: переход к системе свободно плавающих курсов основных мировых валют в результате отмены Бреттон-Вудских соглашений, начало работы Чикагской биржи опционов, ставшей первым в мире регулярным рынком опционных контрактов, и опубликование Блэком, Шоулзом и Мертоном своей знаменитой модели ценообразования европейских опционов. Не будет сильным преувеличением сказать, что если первое из этих событий «породило» рыночные риски в глобальном масштабе, то второе – вооружило участников рынка действенными инструментами управления рисками путем хеджирования, а третье – дало ключ к пониманию этих рисков и их научно обоснованной количественной оценке.

Но это было только начало. В последнее десятилетие XX в. финансовому риск-менеджменту было суждено испытать бурный расцвет, сравнимый с наиболее плодотворными периодами в развитии фундаментальных наук. Верным признаком такого расцвета может служить лавинообразный рост числа публикаций по данной тематике в последние годы. Новизна, высокая сложность и творческий характер задач, связанных с количественной оценкой и управлением рисками, стали одним из факторов прихода в эту сферу большого числа специалистов в области точных наук. Арсенал риск-менеджеров радикально преобразился за счет появления таких новых понятий, методик и инструментов, как показатель value-at-risk и стресс-тестирование, модели RiskMetrics и CreditMetrics, экономический капитал и RAROC, экзотические опционы и кредитные производные, секьюритизация и «Базель II». Многие из этих терминов стали нарицательными и прочно вошли в лексикон участников финансового рынка, регулирующих органов и средств массовой информации. Одновременно возникла насущная потребность в освещении этой «новой реальности» в научной и учебной литературе. Все эти современные подходы и технологии финансового риск-менеджмента и являются предметом рассмотрения в данной книге.

Прежде чем перейти к изложению конкретных подходов и принципов риск-менеджмента, необходимо хотя бы вкратце остановиться на том, какой смысл вкладывается в финансовой сфере в понятие риска, как на практике классифицируют его многочисленные источники и проявления и какие существуют способы управления риском и его последствиями.

Понятие риска. Основные виды рисков в финансовой сфере

Процесс принятия решений в экономике на всех уровнях управления происходит в условиях постоянно присутствующей неопределенности состояния внешней и внутренней среды, которая обусловливает частичную или полную неопределенность конечных результатов деятельности. В экономике под неопределенностью (uncertainty) понимается неполнота или неточность информации об условиях хозяйственной деятельности, в том числе о связанных с ней затратах и полученных результатах. Причинами неопределенности являются три основных фактора: незнание, случайность и противодействие. В частности, неопределенность объясняется тем, что экономические проблемы сводятся, в сущности, к задачам выбора из некоторого числа альтернатив, при этом экономические агенты – организации и индивиды – не располагают полным знанием ситуации для выработки оптимального решения, а также не имеют вычислительных средств достаточной мощности для адекватного учета всей доступной им информации.

В современной экономической теории в качестве «индикатора», или «двойника», неопределенности выступает категория риска. Основное различие между риском и неопределенностью заключается в том, известны ли принимающему решения субъекту количественные вероятности наступления определенных событий. Если риск характерен для производственно-экономических систем с массовыми, повторяющимися событиями, то неопределенность существует, как правило, в тех случаях, когда вероятности последствий приходится определять субъективно из-за отсутствия статистических данных за предшествующие периоды. Такой подход к интерпретации категорий риска и неопределенности принят в неокейнсианском направлении экономической науки, в то время как неоклассическая школа считает эти понятия тождественными.

В количественном отношении неопределенность подразумевает возможность отклонения результата от ожидаемого, или среднего, значения как в меньшую, так и в большую сторону. Такая неопределенность носит название «спекулятивной», в отличие от «чистой» неопределенности, предполагающей только возможность негативных отклонений конечного результата деятельности. В литературе понятие риска может соответствовать как спекулятивной неопределенности и включать положительные и отрицательные исходы (например, в отношении операций на финансовых рынках), так и чистой неопределенности (в этом смысле риск трактуется в страховом деле). В финансовом риск-менеджменте под риском (risk)[5] преимущественно понимается возможность потери части своих активов, недополучения доходов или появления дополнительных расходов в результате осуществления предпринимательской деятельности, что соответствует понятию чистой неопределенности.

В отличие от неопределенности как таковой, риск является измеримой величиной; его количественной мерой служит вероятность неблагоприятного исхода. В более узком смысле экономический риск определяется как измеримая вероятность недополучения прибыли либо снижения стоимости финансовых активов, компании в целом и т. д.[6] Однако не для всех видов риска, которым подвержены экономические агенты, можно одинаковым образом определить вероятность, в том смысле, в каком она обычно вводится для рыночного риска. Ввиду этого для единообразного определения риска прибегают к более многозначному понятию возможности (chance), которого мы и будем придерживаться ниже.

---

[5] Сведения об этимологии слова «риск» см. в книге: Рогов М.А. Риск-менеджмент. – М.: Финансы и статистика, 2001.

[6] Downes J., Goodman J. E. Dictionary of finance and investment terms. 4th ed. – N.Y.: Barron's, 1995.

На практике наибольшее внимание уделяется не вероятности неблагоприятного исхода как таковой, а стоимостной оценке подверженности риску (exposure)[7], которая может выражаться с помощью таких показателей, как максимальная сумма, которую можно потерять в результате изменения конкретного фактора риска, средняя величина убытков по данному виду операций за выбранный период времени, стандартное отклонение прибылей/убытков, максимальный размер потерь за определенный период времени с заданной вероятностью и т. д. Очевидно, что подверженность риску можно рассматривать как функцию от двух параметров: вероятности наступления негативного события и масштаба возможного ущерба, т. е. чувствительности портфеля (организации) к последствиям этого события.

Проблема управления рисками существует в любом секторе экономики – от сельского хозяйства и промышленности до торговли и финансов, что и объясняет ее постоянную актуальность. Поскольку все отрасли экономики связаны в единый механизм благодаря финансовой сфере, именно характерным для нее рискам и посвящена эта книга.

К настоящему времени в финансовой теории еще не разработано общепринятой и одновременно исчерпывающей классификации рисков. Это связано с тем, что на практике существует очень большое число различных проявлений риска, при этом в силу традиции один и тот же вид риска может обозначаться разными терминами. Кроме того, зачастую оказывается весьма сложным разграничить отдельные виды риска, например портфельный и рыночный.

Тем не менее определенный отраслевой консенсус в отношении основных типов или классов риска, которым подвержены финансовые посредники, все же достигнут. Важную роль в формировании общего взгляда на типологию финансовых рисков сыграл выход в свет в 1996 г. «Общепринятых принципов управления риском»[8], разработанных компанией Coopers & Lybrand. В соответствии с признанной ныне стандартной классификацией, главными угрозами для благополучия финансового института[9] являются рыночные, кредитные и операционные риски, риски ликвидности и риски события.

Рыночный риск (market risk) – возможность потерь в результате колебаний процентных ставок, курсов валют, цен акций и товарных контрактов. Разновидностями рыночного риска являются, в частности, валютный и процентный риски.

> Хотя валютный и процентный риски имеют общую экономическую природу с другими формами рыночного риска, они в ряде классификаций рассматриваются обособленно в связи с их особой важностью для всех хозяйствующих субъектов, особенно для банковского сектора.
>
> Валютный риск (currency risk) определяется как возможность потерь в связи с изменением курса одной иностранной валюты по отношению к другой, в том числе национальной, валюте при проведении кредитных и внешнеэкономических операций, а также при инвестировании средств за рубежом. Помимо чисто экономической составляющей, понятие валютного риска объединяет в себе и риски другой природы – трансляционный риск (риск перевода) и операционный валютный риск.
>
> Соответственно, процентный риск (interest rate risk) – это возможность потерь в результате изменения процентных ставок. Для кредитных учреждений одним из проявлений процентного риска может являться сокращение процентной маржи между ставками, выплачиваемыми по

---

[7] Термины risk management и exposure management часто используются как синонимы. См.: Gastineau G. L., Kritzman M. P. Dictionary of financial risk management. – N.Y.: Frank Fabozzi Associates, 1996.

[8] Generally accepted risk principles. – United Kingdom: Coopers & Lybrand, 1996.

[9] Следует отметить, что под финансовыми рисками в литературе зачастую понимаются не только те риски, которые имеют собственно финансовую природу (рыночный, кредитный риски и риск ликвидности), но и все те риски, которые возникают в деятельности организаций – финансовых посредников.

привлеченным средствам, и ставками по предоставленным кредитам. Другим примером процентного риска может служить риск реинвестирования средств при неустойчивых процентных ставках.

Кредитный риск (credit risk), или **риск контрагента** (counterparty risk), – возможность потерь в результате неспособности контрагентов (заемщиков) исполнять свои обязательства, в частности обязательства по выплате процентов и основной суммы долга в соответствии со сроками и условиями кредитного договора. К кредитному риску относят риск дефолта и риск потерь от изменения кредитного спреда.

Несмотря на внешнюю схожесть определений, кредитный риск, в отличие от риска рыночного, по своей природе является асимметричным. Это означает, что потенциальный выигрыш при операциях кредитования ограничен относительно небольшой положительной доходностью (очевидно, что ни один заемщик не заплатит банку больше того, что предусмотрено кредитным договором), зато потенциальный убыток банка может колебаться в гораздо более широком диапазоне: от нуля до более 100 % суммы размещенных средств (в наихудшем случае потери могут превысить номинальный размер ссуды за счет судебных издержек на востребование задолженности, недополученной прибыли, а также возможных штрафов и пеней, уплачиваемых кредитором при просрочке или невозможности возврата привлеченных для кредитования средств).

Кроме того, существует еще ряд рисков, которые не являются специфическими только для финансовой сферы, но значимость которых тем не менее трудно переоценить. К ним относятся:

• **риск ликвидности** (liquidity risk): а) **риск рыночной ликвидности** (market liquidity risk) – возможность потерь, вызванных невозможностью купить или продать актив в нужном количестве за достаточно короткий период времени по среднерыночной цене; б) **риск балансовой ликвидности** (funding liquidity risk) – возможность возникновения дефицита наличных средств или иных высоколиквидных активов для выполнения обязательств перед контрагентами;

• **операционный риск** (operational risk) – возможность потерь вследствие технических ошибок при проведении операций, умышленных и неумышленных действий персонала, аварийных ситуаций, сбоев аппаратуры, несанкционированного доступа к информационным системам и т. д. К операционным рискам часто относят и убытки, обусловленные неадекватностью используемых методов и моделей оценки и управления рисками;

• **риск (бизнес-)события** ([business] event risk) – возможность возникновения непредвиденных потерь вследствие форс-мажорных обстоятельств, изменений законодательства, действий государственных органов и т. д. К рискам события обычно относят юридические, бухгалтерские и налоговые риски, риск репутации, риск действий регулирующих органов и др.

Следует отметить, что последние два вида риска наиболее трудно поддаются формализации и количественной оценке. Отчасти это объясняется тем, что операционные риски и риски событий во многом обусловлены так называемым человеческим фактором.

Перечисленные риски будут иметь разную значимость для разных организаций. Так, например, в банковском деле наибольшие потери происходят вследствие кредитных и рыночных рисков, а для клиринговых организаций на передний план выходят операционные риски и риски контрагента. Наконец, предприятия промышленности, торговли и сферы услуг (за исключением финансовых) будут подвержены также и специфическим рискам, обусловленным их отраслевой принадлежностью и особенностями производственного процесса. Эти риски, обычно называемые техногенными или производственными, находятся за рамками данной книги.

Способы управления рисками

Основными способами снижения рисков в экономике независимо от отраслевой специфики являются страхование, резервирование (самострахование), хеджирование, распределение, диверсификация, минимизация (управление активами и пассивами) и избежание (отказ от связанной с риском операции)[10].

Перечисленные способы различаются в первую очередь по своей экономической сущности, состоящей в передаче риска третьему лицу (при страховании, хеджировании и распределении) либо в оставлении его на собственном удержании (при резервировании, диверсификации или минимизации путем управления активами и пассивами). Другим критерием классификации может служить объект управления, в качестве которого выступает вероятность наступления или подверженность риску (при хеджировании, распределении, диверсификации и управлении активами и пассивами) или чистый ущерб вследствие проявления риска (при резервировании и страховании). В рыночной экономике решения об уровне риске предприятия принимают его владельцы и управляющие, а усилия государства направлены в основном на минимизацию последствий реализации принятого риска.

По аналогии с анализом и синтезом можно провести различие между декомпозицией и агрегированием риска[11]. Под **декомпозицией риска** (risk disaggregation) понимается разложение риска, рыночная стоимость которого не может быть определена непосредственно, на отдельные компоненты, стоимость которых, по крайней мере некоторых из них, можно оценить по рыночным данным. Декомпозицию риска можно определить как аналитическую оценку стоимости не торгуемых на рынке инструментов на основе наблюдаемых рыночных цен других инструментов с целью их правильного ценообразования. Примером декомпозиции может служить представление опциона пут через опцион колл плюс позицию по базисному активу. **Агрегирование риска** (risk aggregation), напротив, предполагает создание портфеля, корреляция между элементами которого меньше единицы, что позволяет снизить риск путем его диверсификации. Примерами агрегирования риска являются расчет показателя VaR и стресс-тестирование на уровне портфеля. Агрегирование и декомпозицию риска не следует рассматривать как взаимоисключающие способы, поскольку агрегирование тоже опирается на рыночные оценки риска, без которых невозможно получить объективные оценки вероятностей и корреляций между проявлениями рисков, необходимых для реализации портфельного подхода.

В банковском деле **резервирование** – это один из основных способов управления совокупным риском, который не может быть передан страховщику или гаранту (посредством страхования или гарантирования) либо участникам финансового рынка (путем хеджирования производными инструментами). С целью компенсации ожидаемых потерь банки формируют собственные средства – капитал, а также обязательные резервы на возможные потери по ссудам и прочим активам, относимые на расходы банка (фактически это означает перенос риска на клиента посредством включения в цену услуги, например кредита). Минимальные требования к достаточности капитала лежат в основе государственного регулирования рисков банковской системы.

Страхование, как и резервирование, не ставит своей целью уменьшение вероятности проявления или подверженности риску, а нацелено преимущественно на возмещение материального ущерба от его проявления[12]. Для страхования подходят массовые виды риска, вероят-

[10] См. также табл. 8.2.

[11] Allen S. Financial risk management: A practitioner's guide to managing market and credit risk. – Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons, Inc., 2003.

[12] Страхование рисков обычно предполагает проведение предупредительных мероприятий по снижению вероятности наступления страховых событий, которые, однако, далеко не всегда достигают желаемой цели.

ности проявления которых известны с высокой степенью точности и не сильно коррелированы между собой. Из рассмотренных выше видов риска в наибольшей степени этим требованиям удовлетворяют некоторые операционные и кредитные риски.

Хеджирование представляет собой способ защиты от возможных потерь путем заключения уравновешивающей сделки (переноса риска изменения цены с одного лица на другое). Хеджирование предназначено для снижения возможных потерь вложений вследствие рыночного риска, реже кредитного риска и риска событий. Как и страхование, хеджирование требует отвлечения дополнительных ресурсов (например, уплаты опционной премии или внесения маржи).

Совершенное хеджирование предполагает полное исключение возможности получения какой-либо прибыли или убытка по данной позиции за счет открытия противоположной, или компенсирующей, позиции. Подобная «двойная гарантия» как от прибылей, так и от убытков отличает совершенное хеджирование от классического страхования. Хеджирование рыночных рисков осуществляется путем проведения операций с производными финансовыми инструментами – форвардами, фьючерсами, опционами и свопами. В последние годы появились инструменты хеджирования кредитных рисков и рисков события, к которым относятся, например, кредитные свопы и производные на погоду.

Снижение риска может быть достигнуто также путем его распределения между участниками сделки (включение риска в стоимость продукции и услуг, предоставление гарантий или поручительств, залог имущества, система взаимных штрафных санкций). Распределение риска подразумевает решения по расширению (сужению) числа потенциальных инвесторов или участников проекта.

Диверсификация – один из способов уменьшения совокупной подверженности риску путем распределения вложений и/или обязательств. Наиболее часто под диверсификацией понимается размещение финансовых средств в более чем один вид активов, цены или доходности которых слабо коррелированы между собой. Другой формой диверсификации является привлечение средств из различных, слабо зависящих друг от друга источников. Сущность диверсификации состоит в снижении максимально возможных потерь за одно событие, но при этом возрастает количество видов риска, которые необходимо контролировать, что влечет за собой рост транзакционных издержек. Диверсификация – это один из наиболее популярных механизмов снижения рыночных и кредитных рисков при формировании портфелей финансовых активов, банковских ссуд или пассивов. Следует помнить, что диверсификация позволяет уменьшить только несистематический риск (риск, связанный с конкретным инструментом), в то время как систематические риски, общие для всех рассматриваемых инструментов (например, риск циклического спада экономики), не могут быть уменьшены путем изменения структуры портфеля.

Минимизация преследует цель тщательной балансировки активов и обязательств, с тем чтобы свести к минимуму колебания чистой стоимости портфеля. Теоретически в этом случае не возникает необходимости в отвлечении ресурсов на формирование резерва или открытие компенсирующей позиции. Управление активами и пассивами направлено на избежание чрезмерного риска путем динамического регулирования основных параметров портфеля. Иными словами, этот метод нацелен на регулирование подверженности риску в процессе самой деятельности, в отличие от хеджирования, основанного на упреждающей нейтрализации риска. Управление активами и пассивами наиболее широко применяется в банковской практике для контроля за рыночными, главным образом валютными и процентными рисками.

Все перечисленные выше способы управления риском составляют арсенал финансового риск-менеджера, с помощью которых решается главная задача – обеспечение выживаемости компании в условиях конкуренции, повышение рыночной стоимости на уровне отдельного предприятия и поддержание стабильности функционирования финансовой системы на уровне отдельных стран и мировой экономики в целом.

О книге

Изначальный замысел книги состоял в том, чтобы создать на русском языке пособие учебного и справочного характера, в котором были бы систематизированно изложены подходы и методы количественной оценки и управления важнейшими видами финансовых рисков на уровне современных международных стандартов, выработанных профессиональными объединениями риск-менеджеров, такими как GARP и PRMIA. Это обусловило структуру книги, большинство глав которой ориентированы на соответствующие разделы программы квалификационного экзамена Financial Risk Manager (FRM®). Однако в процессе работы над книгой возникла логическая необходимость выйти за рамки первоначальных планов. Так, в нее были включены самостоятельные главы, посвященные рискам рыночной ликвидности, прогнозированию макроэкономических рисков и методам оптимизации портфелей активов и пассивов. Хотя эта книга не претендует на освещение всех аспектов современного финансового риск-менеджмента, по объему рассматриваемого материала данное издание не имеет аналогов в России.

Реализация проекта такого масштаба стала возможной только благодаря объединенным усилиям специалистов в различных областях финансового риск-менеджмента. Авторский коллектив включает ведущих представителей профессионального сообщества риск-менеджеров, стоявших у истоков развития в России этого нового направления деятельности.

Отличительной особенностью книги является то, что авторами предпринята попытка дать стандартную терминологию финансового риск-менеджмента на русском языке, учитывающую те реалии, которые сложились за последние годы. Во всех случаях параллельно с русскими эквивалентами в книге приведены и оригинальные термины на английском языке. В большинстве глав авторы стремились не только изложить необходимый минимум учебного материала, но и сопроводить его подробным указателем литературы по соответствующей тематике. Это может оказаться полезным для тех, кто желал бы более глубоко ознакомиться с интересующими аспектами риск-менеджмента.

Многообразие затронутых тем и широта их охвата вызвали немалые трудности в работе над книгой, но авторы искренне надеются, что полезность этой книги для специалистов-практиков будет возрастать по мере развития в России культуры риск-менеджмента.

Книга ориентирована в первую очередь на профессионалов, непосредственно занимающихся оценкой и управлением рисками в банковском секторе, в инвестиционных компаниях и фондах, страховых компаниях, на предприятиях реального сектора экономики. Однако она будет полезна всем читателям, желающим получить представление о финансовом риск-менеджменте или повысить свою квалификацию в этой области, в том числе преподавателям, студентам старших курсов и аспирантам экономических факультетов вузов. Пособие может использоваться в качестве учебного и справочного пособия при подготовке к сдаче международных профессиональных экзаменов по финансовому риск-менеджменту, таких как FRM® и PRM®.

Книга состоит из 11 глав, посвященных различным аспектам финансового риск-менеджмента. Многие из рассмотренных в ней тем впервые систематизированно излагаются на русском языке.

Первая глава книги, написанная В. Е. Барбаумовым, представляет собой краткий обзор математических методов, составляющих аппарат современного риск-менеджмента, в объеме, необходимом для понимания последующих глав. В главе излагаются базовые понятия и представления финансовой математики, теории вероятностей и математической статистики, включая стоимость денег во времени, доходность и волатильность, методы ценообразования облигаций и модели эволюции процентных ставок, важнейшие виды вероятностных распределений и случайных процессов, элементы регрессионного анализа и метод Монте-Карло, а также краткий обзор основных результатов математической теории рекордов (экстремальных значений), применяемых в финансовом риск-менеджменте. Теоретический материал главы богато иллюстрирован примерами, позволяющими лучше овладеть навыками финансовых вычислений.

Предметом рассмотрения второй главы являются производные финансовые инструменты: форвардные, фьючерсные и опционные контракты на различные активы, а также процентные и валютные свопы и облигации со встроенными опционами. В. Е. Барбаумов приводит их характеристики, модели ценообразования, включая известную модель Блэка-Шоулза, и основные спекулятивные и хеджирующие стратегии применения этих инструментов. Как и в предыдущей главе, изложение необходимых теоретических знаний сопровождается разбором многочисленных расчетных примеров.

В третьей главе представлен целостный взгляд на систему оценки и управления рыночными рисками. М. А. Рогов последовательно развивает различные по уровню сложности подходы к измерению рыночного риска: от простейших балансовых показателей и коэффициентов чувствительности производных инструментов до показателя value-at-risk (VaR) и так называемых когерентных мер риска. В главе дан сравнительный анализ различных методов расчета показателя VaR. Все важнейшие понятия рассмотрены на примерах, большинство из которых основано на реальных ценовых данных с российского финансового рынка. В приложении к главе содержатся рекомендации по построению системы управления рисками в российских корпорациях.

Одной из важных, но при этом и весьма сложных проблем, возникающих при оценке рыночного риска, является учет факторов ликвидности. Особенно остро эта проблема стоит на «развивающихся рынках», отличающихся малой глубиной и высокой волатильностью, к числу которых относится и Россия. Следует отметить, что эта тема весьма скупо освещена в мировой литературе, так как долгое время считалось, что этот вид риска не поддается количественной оценке. Однако к концу 1990-х гг. были предложены первые подходы к измерению ликвидности финансовых рынков и ее отражению в моделях расчета VaR. Данной теме посвящена четвертая глава книги, написанная Д. Ф. Щукиным. В ней подробно рассмотрены характеристики ликвидности рынка, предложенные Комитетом по глобальной финансовой системе при Банке международных расчетов, а также оригинальный подход к количественной оценке риска рыночной ликвидности, проиллюстрированный на примере российского рынка акций.

Кредитный риск общепризнан основным видом риска, с которым сталкиваются в своей деятельности финансовые институты. Этот риск подробно анализируется Н. Ю. Ситниковой в пятой главе. В первой части главы рассмотрен традиционный подход к анализу кредитоспособности заемщиков. Вторая часть представляет собой детальный экскурс в современные методы количественной оценки риска дефолта в разрезе его составляющих: вероятности дефолта, подверженности риску и уровня возмещения потерь. Основное внимание в этой части уделяется моделям оценки кредитного риска, ставшим отраслевыми стандартами, включая Z-модель Альтмана, модель ZETA и модель ожидаемой вероятности дефолта (EDF), разработанную компанией KMV. Ее дополняет сравнительный анализ современных моделей оценки кредитного риска портфеля: CreditMetrics, Credit Portfolio View, CreditRisk+ и Moody's KMV Portfolio Manager. В третьей части главы дан обзор основных способов управления кредитными рисками. Отдельные разделы главы посвящены страновому риску и основным видам кредитных производных инструментов.

Значимость операционных рисков в последние годы существенно возросла как вследствие целого ряда громких случаев потерь, причиной которых стали именно эти риски (в том числе и в России), так и из-за повышенного внимания, которое уделяет им финансовое сообщество, в частности Базельский комитет по банковскому надзору. В шестой главе П. В. Бурков представил широкий обзор методов идентификации и управления операционными рисками, делая особый акцент на рисках, связанных с использованием информационных систем. Отдельный раздел посвящен новейшим подходам Базельского комитета к расчету размера капитала, резервируемого против операционных рисков. Эти альтернативные подходы уже применяются банками развитых стран начиная с 2007 г. после выступления в силу Нового базельского соглашения по капиталу и вызывают значительный интерес у отечественных кредитных организаций. В приложениях к главе дана оригинальная авторская классификация операционных рисков, возникающих в деятельности инвестиционной компании, а также стандартная классификация операционных потерь, предложенная в Новом базельском соглашении по капиталу.

Грамотное управление финансовыми рисками в современных условиях невозможно без базовых знаний о юридических, бухгалтерских и налоговых аспектах заключаемых сделок. Они являются предметом рассмотрения в седьмой главе применительно к операциям с производными инструментами на международных рынках капитала. Основное внимание в этой главе С. Н. Тихомиров уделяет внебиржевым сделкам своп, для снижения рисков которых Международной ассоциацией по свопам и производным (ISDA) была разработана стандартная документация. Хотя в России срочный рынок находится пока еще в зачаточном состоянии, эти вопросы будут становиться все более актуальными по мере совершенствования законодательной базы, повышения ликвидности рынка и перехода его участников на Международные стандарты финансовой отчетности (МСФО).

Восьмая глава, написанная канд. экон. наук А. А. Лобановым, представляет собой попытку систематизированного изложения современных представлений об интегрированной оценке и управлении основными видами рисков на уровне всего предприятия: от организационных аспектов до оценки результатов деятельности с учетом риска, стресс-тестирования, управления модельным риском и торговыми лимитами. Для этого потребовалось предпринять краткий экскурс в историю финансового риск-менеджмента, а также рассмотреть факторы, вызывавшие к жизни новую парадигму управления рисками в масштабе предприятия.

В главе подробно проанализированы такие популярные показатели экономического эффекта и эффективности с учетом риска, как EVA и RAROC, а также возможности их использования в практике корпоративного управления. Центральное место в главе занимают методы расчета так называемого экономического капитала. Автору удалось свести воедино различные трактовки этого понятия и дать сравнительный анализ методов размещения капитала по подразделениям и видам деятельности. В самостоятельных разделах рассмотрены способы оценки портфеля на устойчивость к рыночным кризисам (стресс-тестирование), а также источники и способы снижения такого специфического феномена риск-менеджмента, как риск неадекватности применяемых моделей. В конце главы рассмотрены различные способы контроля за трейдерами, при этом особое внимание уделено методам расчета VaR-лимитов и современным подходам к управлению торговыми лимитами. Изложение основных теоретических концепций подкреплено целым рядом практических примеров.

В девятой главе, посвященной регулированию банковских рисков, А. А. Лобанов и С. В. Замковой подробно излагают различные нормативные подходы к расчету достаточности банковского капитала и страхования вкладов как двух основополагающих механизмов поддержания стабильности банковских систем. В ней последовательно рассматриваются подходы Базельского комитета по банковскому надзору к оценке кредитного и рыночного рисков активов: стандартный подход и подход на основе внутренних моделей банков, а также обсуждаются преимущества и недостатки подхода на основе предварительных обязательств, предложенного экономистами ФРС США. Сегодняшний день государственного регулирования банковских рисков представлен в главе обзором основных положений Нового базельского соглашения по капиталу 2004 г. (модифицированного стандартного подхода и подхода на основе внутренних рейтингов к оценке кредитного риска, функциям банковского надзора и требований к раскрытию информации по рискам). В главе также анализируются базовые принципы страхования банковских вкладов и приводятся рекомендации по построению систем гарантирования вкладов, вытекающие из теоретических работ и практического опыта различных стран.

Логическим развитием современного риск-менеджмента является применение концепций и методов, разработанных и успешно применяемых на уровне предприятия, к прогнозированию и контролю за системными рисками на макроэкономическом уровне. Эти риски рассматриваются С. В. Замковым и В. К. Шпрингелем в десятой главе книги, при этом основное внимание авторы уделили моделям прогнозирования банковских и финансовых кризисов.

Портфельный подход проходит красной нитью через большинство методик риск-менеджмента, и ему посвящена последняя, одиннадцатая глава книги, написанная Д. Ю. Голембиовским. В ней читатель найдет обзор методов оптимизации портфелей финансовых инструментов, в том числе описание современных моделей управления активами и пассивами.

Значительная часть материала этой книги была апробирована авторами на курсе по подготовке к сдаче международного экзамена FRM®, разработанном Исследовательской группой «РЭА – Риск-Менеджмент» при поддержке Фонда Евразия, который проводится регулярно с 2000 г.

Редакторы искренне благодарны всем авторам книги, инвестировавшим в ее создание свое время и интеллектуальный капитал. Глубокую признательность редакторы выражают С. Н. Смирнову за сделанные им ценные замечания, способствовавшие улучшению структуры и качества материала, а также О. К. Васильевой за помощь в процессе подготовки книги к печати. Отдельную благодарность редакторы приносят А. М. Ильину, выступившему в качестве инициатора данного проекта, М. Е. Савиной и А. А. Фоминову за их неиссякаемое терпение и понимание всех сложностей, связанных с созданием этой книги.

Изменения во втором издании

Во втором, исправленном и дополненном издании книги улучшения были внесены практически во все главы, при этом материал глав II, VIII, IX и X был существенно расширен. Так, в главе II более подробно освещены арбитражные и неарбитражные модели эволюции процентной ставки и методы ценообразования инструментов, производных от процентной ставки, в частности опционов на купонные облигации. В главе V приведена полная классификация событий, приводящих к операционным потерям, которая была предложена Базельским комитетом по банковскому надзору в Новом соглашении по капиталу. Глава VIII дополнена материалами по организационным аспектам риск-менеджмента, в том числе по построению «карты рисков»; также в ней приведены рекомендации Базельского комитета по проведению стресс-тестирования в рамках подхода на основе внутренних рейтингов. В главу IX добавлен раздел, посвященный рискам страхования банковских вкладов. Глава X расширена за счет включения нового раздела, посвященного анализу макроэкономических рисков как причин банковского кризиса в России в 1998 г.

Изменения в четвертом издании

В четвертом, исправленном и дополненном издании в главу I включены определения медианы и моды вероятностных распределений, характеристики биномиального распределения, распределения Пуассона, бета- и гамма-распределений, двумерного нормального распределения. Глава также дополнена разделом, посвященным теории экстремальных значений. В главе II приведена краткая характеристика соглашений о форвардной процентной ставке (FRA). В главу VIII включены новые комментарии к методу RAROC и его модификациям, описания актуальных сценариев для проведения стресс-тестирования, а также раздел, посвященный методам контроля за трейдерами и управлению торговыми лимитами. В главе IX полностью переработан и дополнен обзор Нового соглашения по капиталу 2004 г. («Базеля II»), выполненный на основе последней редакции этого соглашения от ноября 2006 г. Кроме того, существенно обновлена библиография глав VIII и IX.

Редакторы и авторы выражают благодарность всем читателям, приславшим свои отзывы и замечания к текстам предыдущих изданий книги.

А. А. Лобанов, А. В. Чугунов
Исследовательская группа «РЭА – Риск-Менеджмент»

I. Количественный анализ
В. Е. Барбаумов

1.1. Введение

Научно обоснованное управление финансовыми рисками невозможно без соответствующей методики измерения этих рисков. Существующие методы измерения финансовых рисков в основном опираются на современную теорию финансовых инструментов с фиксированными доходами, теорию вероятностей, математическую статистику и теорию случайных процессов. Именно эти вопросы составляют основное содержание первой главы настоящей книги.

В частности, при изучении финансовых инструментов с фиксированными доходами вводятся многие фундаментальные понятия теории финансов: будущая и приведенная стоимости инвестиций, внутренняя доходность облигаций, временная структура процентных ставок, кривая рыночных доходностей, дюрация и выпуклость портфелей облигаций. Все эти понятия широко используются как при измерении финансовых рисков, так и при построении стратегий хеджирования этих рисков.

После небольшого обзора основных положений теории вероятностей рассматриваются важнейшие статистические методы оценки различных финансовых показателей, используемых в риск-анализе.

В заключительной части главы вводятся основополагающие понятия теории случайных процессов: сечения и траектории, математическое ожидание и дисперсия, процесс случайного блуждания, биномиальная модель, винеровский случайный процесс, стохастические дифференциальные уравнения. Подробно исследуется процесс геометрического броуновского движения, который играет ключевую роль в оценке производных финансовых инструментов.

1.2. Будущая стоимость денежного потока

Предположим, что денежная сумма P инвестирована на T лет под годовую процентную ставку r(m) при начислении процентов m раз в год. Тогда будущая стоимость (future value) инвестиции может быть найдена следующим образом:

$$FV = P\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{T\cdot m}. \quad (1.1)$$

Если же денежная сумма P инвестирована под годовую процентную ставку $\tilde{r}$ при непрерывном начислении процентов, то будущая стоимость инвестиции определяется равенством:

$$FV = Pe^{\tilde{r}T},\ e = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} \approx 2,718. \quad (1.2)$$

Пример 1.1. Денежная сумма в 1 млн долл. инвестирована на 6 лет под годовую процентную ставку 6,4 %. Определим будущую стоимость инвестиции, если проценты начисляются: а) один раз в год; б) дважды в год; в) ежеквартально; г) непрерывно:

а) $FV_1 = 1\,000\,000\ (1+0,064)^6 = 1\,450\,941$ долл.;

б) $FV_2 = 1\,000\,000\ \left(1+\frac{0,064}{2}\right)^{6\cdot 2} = 1\,459\,340$ долл.;

в) $FV_3 = 1\,000\,000\ \left(1+\frac{0,064}{4}\right)^{6\cdot 4} = 1\,463\,690$ долл.;

г) $FV_4 = 1\,000\,000\cdot e^{0,064\cdot 6} = 1\,468\,145$ долл.

Очевидно, что будущая стоимость инвестиции возрастает при:

а) увеличении срока;

б) возрастании годовой процентной ставки;

в) росте частоты начисления процентов.

Годовые процентные ставки называют эквивалентными, если при инвестировании любой суммы P под эти ставки на один и тот же срок совпадают будущие стоимости.

В частности, годовые процентные ставки r(m) и r(n) при начислении процентов m и n раз соответственно оказываются эквивалентными тогда и только тогда, когда

$$r(m) = m\left[\left(1+\frac{r(n)}{n}\right)^{\frac{n}{m}} - 1\right]. \qquad (1.3)$$

Годовая процентная ставка $\tilde{r}$ при непрерывном начислении процентов эквивалентна годовой процентной ставке r(m) при начислении процентов m раз в год тогда и только тогда, когда

$$r(m) = m\left[e^{\frac{\tilde{r}}{m}} - 1\right]. \qquad (1.4)$$

$$\tilde{r} = m \cdot \ln\left(1+\frac{r(m)}{m}\right) \quad (\ln x \text{ — логарифм } x \text{ по основанию } e \approx 2,718). \qquad (1.5)$$

Пример 1.2. Банк предлагает по депозитам годовую процентную ставку в 8 % при начислении процентов один раз в год. Какую годовую процентную ставку можно требовать при начислении процентов: а) дважды в год; б) ежеквартально; в) непрерывно?

$$\text{а) } r(2) = 2[(1+0,08)^{\frac{1}{2}} - 1] = 0,0785, \text{ т. е. } 7,85\%;$$

$$\text{б) } r(4) = 4[(1+0,08)^{\frac{1}{4}} - 1] = 0,0777, \text{ т. е. } 7,77\%;$$

$$\text{в) } \tilde{r} = \ln[1+0,08] = 0,0770, \text{ т. е. } 7,70\%.$$

Предположим теперь, что инвестору обещают через t_1, t_2…., t_n лет денежные суммы P_{t1}, P_{t2}…., P_{tn} соответственно. Если инвестор предполагает инвестировать все поступающие денежные суммы под одну и ту же годовую процентную ставку, то через Т лет будущая стоимость денежного потока будет равна:

$$FV = \sum_{i=1}^{n} P_{t_i}\left[1+\frac{r(m)}{m}\right]^{(T-t_i)m} \text{ при начислении процентов } m \text{ раз в год} \qquad (1.6)$$

и

$$FV = \sum_{i=1}^{n} P_{t_i} e^{\tilde{r}(T-t_i)} \text{ при непрерывном начислении процентов.} \qquad (1.7)$$

Пример 1.3. Инвестору обещан следующий денежный поток:

Срок, лет	0,5	1,0	2,0
Платеж, долл.	500	1000	2000

Какова будущая стоимость денежного потока через 3 года, если инвестор предполагает инвестировать поступающие денежные суммы под 7 % при начислении процентов: а) дважды в год; б) непрерывно?

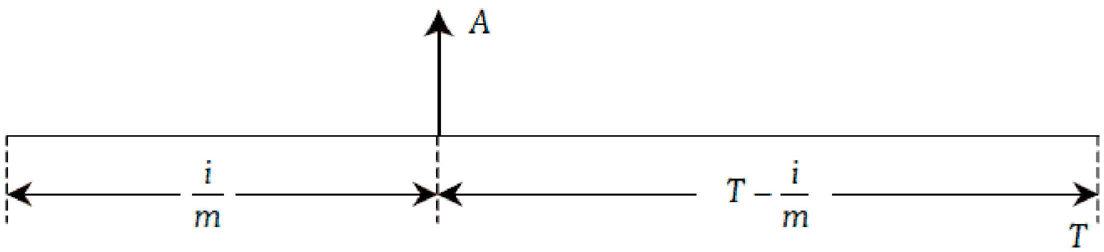
$$\text{а)}\quad (FV)_1 = 500\left(1+\frac{0,07}{2}\right)^{(3,0-0,5)2} + 1000\left(1+\frac{0,07}{2}\right)^{(3,0-1,0)2} +$$

$$+ 2000\left(1+\frac{0,07}{2}\right)^{(3,0-2,0)2} = 3883,82 \text{ долл.};$$

$$\text{б)}\quad (FV)_2 = 500e^{0,07\times 2,5} + 1000e^{0,07\times 2} + 2000^{0,07\times 1} = 3890,91 \text{ долл.}$$

Если одну и ту же денежную сумму выплачивают (или получают) периодически в течение ряда лет, то соответствующий денежный поток называют рентой[13] (annuity). Промежуток времени между двумя соседними платежами – это рентный период. Ренту называют обыкновенной (ordinary annuity), если первый рентный платеж приходится в точности на конец одного рентного периода.

Рассмотрим обыкновенную ренту размером A сроком на T лет, рентный период которой составляет $\frac{1}{m}$ года. По данной ренте будут произведены *Tm* платежей одной и той же величины A, причем i-й платеж (i = 1, 2…., *Tm*) должен быть произведен через $\frac{i}{m}$ лет.



Если предположить, что все рентные платежи будут инвестироваться под одну и ту же годовую процентную ставку r(m) при начислении процентов m раз в год, то будущая стоимость обыкновенной ренты через T лет может быть определена следующим образом:

[13] Другое название – **аннуитет**.

$$FV = \sum_{i=1}^{Tm} A\left[1+\frac{r(m)}{m}\right]^{\left(T-\frac{i}{m}\right)m}. \qquad (1.8)$$

Так как

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q-1},$$

то

$$FV = A\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{Tm-1} + A\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{Tm-2} + ... + A =$$

$$= \frac{A\left(\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{Tm} - 1\right)}{\left(1+\frac{r(m)}{m}\right) - 1} = \frac{A\cdot m}{r(m)}\left[\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{Tm} - 1\right]. \qquad (1.9)$$

Пример 1.4. Менеджер покупает облигацию, по которой выплачиваются проценты в размере 40 долл. каждые полгода в течение 10 лет и номинальная стоимость в 1000 долл. в конце десятого года. Определим будущую стоимость инвестиции через 10 лет, если все платежи реинвестируются под 6,7 %, а первый процентный платеж производится через 6 месяцев.

Денежный поток, определяемый облигацией, представляет собой обыкновенную ренту, в которой A = 40 долл., m = 2, T = 10 лет, и выплату 1000 долл. в конце десятого года. Отсюда

$$FV = \frac{40\cdot 2}{0,067}\left(\left[1+\frac{0,067}{2}\right]^{20} - 1\right) + 1000 = 2113,91 \text{ долл.}$$

1.3. Приведенная стоимость денежного потока

Денежную сумму, которую необходимо инвестировать сегодня, чтобы через определенное время получить данную будущую стоимость, называют приведенной стоимостью (present value).

Имеет место следующее равенство:

$$PV = \frac{FV}{\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{T \cdot m}}, \tag{1.10}$$

где

PV – приведенная стоимость инвестиции;

FV – будущая стоимость;

T – срок инвестиции;

$r(m)$ – процентная ставка при начислении процентов m раз в год.

Процентную ставку $r(m)$, используемую для определения приведенной стоимости инвестиции, называют ставкой дисконтирования (discount rate). Если ставка дисконтирования определяется при непрерывном начислении процентов, то формула (1.10) принимает вид:

$$PV = FV \cdot e^{-\bar{r}T}. \tag{1.11}$$

Пример 1.5. Менеджер пенсионного фонда должен через 6 лет выплатить 10 млн долл. В данный момент менеджер имеет возможность инвестировать любую сумму под 7,5 % при начислении процентов дважды в год. Сколько должен инвестировать менеджер пенсионного фонда, чтобы выполнить свое обязательство?

Приведенная стоимость 10 млн долл. может быть найдена по формуле (1.10):

$$PV = \frac{10\ 000\ 000}{\left(1 + \frac{0,075}{2}\right)^{12}} = 6\ 428\ 989,78 \text{ долл.}$$

Следовательно, менеджер должен инвестировать 6 428 989,78 долл., чтобы через 6 лет получить 10 млн долл.

Из равенства (1.10) следует, что при прочих равных условиях:

1) чем больше ставка дисконтирования, тем меньше приведенная стоимость, и наоборот;

2) чем меньше срок инвестиции, тем больше приведенная стоимость, и наоборот.

Приведенная стоимость потока денежных платежей определяется в виде суммы приведенных стоимостей платежей, образующих этот денежный поток.

Пример 1.6. Финансовый директор компании знает, что ему предстоит произвести следующие платежи:

Срок, лет	1,0	2,0	3,0
Платежи, долл.	200 000	300 000	400 000

Какую денежную сумму необходимо инвестировать сегодня, чтобы обеспечить выполнение обязательств, если процентная ставка равна 6 % при начислении процентов дважды в год?

Достаточно определить приведенную стоимость данного потока платежей:

$$PV = \frac{200\,000}{\left(1+\frac{0,06}{2}\right)^{2\cdot 1}} + \frac{300\,000}{\left(1+\frac{0,06}{2}\right)^{2\cdot 2}} + \frac{400\,000}{\left(1+\frac{0,06}{2}\right)^{2\cdot 3}} = 790\,059 \text{ долл.}$$

Если денежный поток представляет собой обыкновенную ренту, по которой *m* раз в год в течение *T* лет выплачивается одна и та же денежная сумма A, то приведенная стоимость такой ренты может быть найдена следующим образом:

$$PV = \frac{A}{1+\frac{r(m)}{m}} + \frac{A}{\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{2}} + \ldots + \frac{A}{\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{Tm}} = \frac{A\cdot m}{r(m)}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{Tm}}\right]. \qquad (1.12)$$

Пример 1.7. Банк согласился предоставить 30-летний ипотечный кредит в размере 100 000 долл. По условиям ипотечного кредитования ежемесячные платежи заемщика должны быть одинаковыми. Годовая процентная ставка, требуемая банком, равна 12 %. Какова величина ежемесячного платежа заемщика?

Величина ежемесячного платежа заемщика определяется из условия, что приведенная стоимость потока платежей заемщика должна составить 100 000 долл. Значит,

$$100\,000 = \frac{A\cdot 12}{0,12}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{360}}\right],$$

$$100\,000 = A\cdot 97,218, \text{ т. е. } A = 1028,61 \text{ долл.}$$

Обыкновенную ренту называют бессрочной[14] (perpetual annuity), если поток рентных платежей не ограничен по времени. Приведенная стоимость бессрочной ренты, по которой m раз в год выплачивается сумма A, может быть найдена следующим образом:

$$PV = \lim_{T \to \infty} \frac{A \cdot m}{r(m)} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{Tm}} \right] = \frac{A \cdot m}{r(m)}. \qquad (1.13)$$

[14] Другое название – **перпетуитет** (*perpetuity*).

1.4. Внутренняя доходность финансовых инструментов

Внутренней доходностью (internal rate of return – IRR) финансового инструмента называют процентную ставку, при которой приведенная стоимость потока платежей по данному финансовому инструменту совпадает с его рыночной ценой.

Пример 1.8. Финансовый инструмент продается по цене 1243,82 долл., и по нему каждые 6 месяцев выплачивается по 50 долл. в течение 5 лет и еще 1000 долл. в конце пятого года. Покажем, что внутренняя доходность данного финансового инструмента при начислении процентов дважды в год составляет 4,5 %.

Приведенная стоимость денежного потока по данному финансовому инструменту определяется следующим образом:

$$PV = \frac{50 \cdot 2}{r(2)}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r(2)}{2}\right)^{2 \cdot 5}}\right] + \frac{1000}{\left(1 + \frac{r(2)}{2}\right)^{2 \cdot 5}},$$

где r(2) – годовая процентная ставка при начислении процентов дважды в год.

При r(2) = 0,045 имеем

$$PV = \frac{50 \cdot 2}{0,045}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{0,045}{2}\right)^{10}}\right] + \frac{1000}{\left(1 + \frac{0,045}{2}\right)^{10}} = 1243,82.$$

Так как приведенная стоимость денежного потока, определяемого финансовым инструментом, совпала с его рыночной ценой, то внутренняя доходность этого инструмента действительно равна 4,5 %.

Рассмотрим финансовый инструмент со следующим потоком платежей:

Срок, лет	t_1	t_2	...	t_n
Платеж, долл.	C_{t_1}	C_{t_2}	...	C_{t_n}

Внутренняя доходность рассматриваемого финансового инструмента при начислении процентов *m* раз в год является решением уравнения:

$$P = \frac{C_{t_1}}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{t_1 \cdot m}} + \frac{C_{t_2}}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{t_2 \cdot m}} + \ldots + \frac{C_{t_n}}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{t_n \cdot m}}, \tag{1.14}$$

где P – рыночная цена финансового инструмента.

Функция $P(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_{t_i}}{\left(1+\frac{y}{m}\right)^{t_i \cdot m}},$ стоящая в правой части уравнения (1.14), всегда является убывающей и выпуклой. График функции изображен на рис. 1.1.

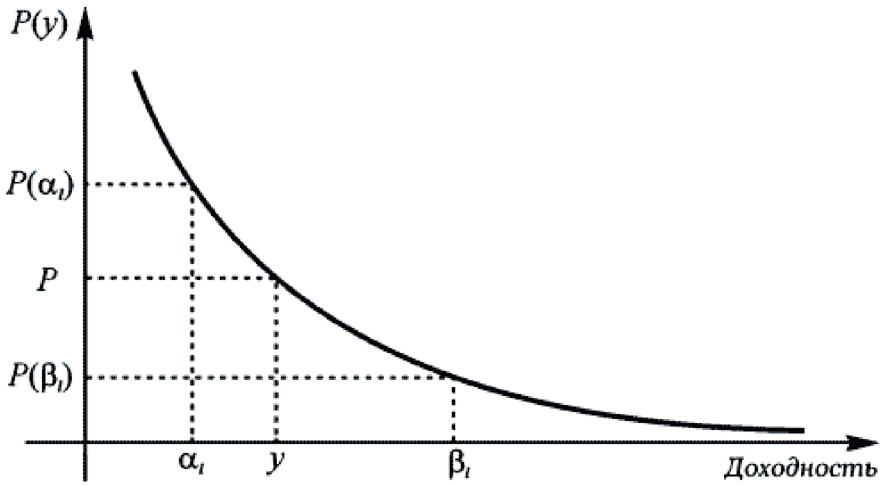


Рис. 1.1. Зависимость цены от внутренней доходности

Для решения уравнения (1.14) можно использовать метод проб и ошибок. Вначале найдем простым подбором числа α_1 и β_1 так, чтобы $P(\alpha_1) > P$, а $P(\beta_1) < P$ (рис. 1.2). Тогда искомая внутренняя доходность будет находиться между α_1 и β_1, т. е. $y \in (\alpha_1, \beta_1)$. Промежуток (α_1, β_1) разделим на 10 равных частей. И, вычисляя значение функции P(y) в точках деления, найдем числа α_2 и β_2 так, чтобы:

$$P(\alpha_2) > P, \quad P(\beta_2) < P.$$

Тогда $y \in (\alpha_2, \beta_2)$. Повторяя данную процедуру несколько раз, можно найти достаточно малый промежуток (α_1, β_1), на котором находится искомая внутренняя доходность. В этом случае искомую внутреннюю доходность можно определить на основе линейной интерполяции:

$$y = \alpha_l \frac{P(\beta_l) - P}{P(\beta_l) - P(\alpha_l)} + \beta_l \frac{P - P(\alpha_l)}{P(\beta_l) - P(\alpha_l)}. \tag{1.15}$$

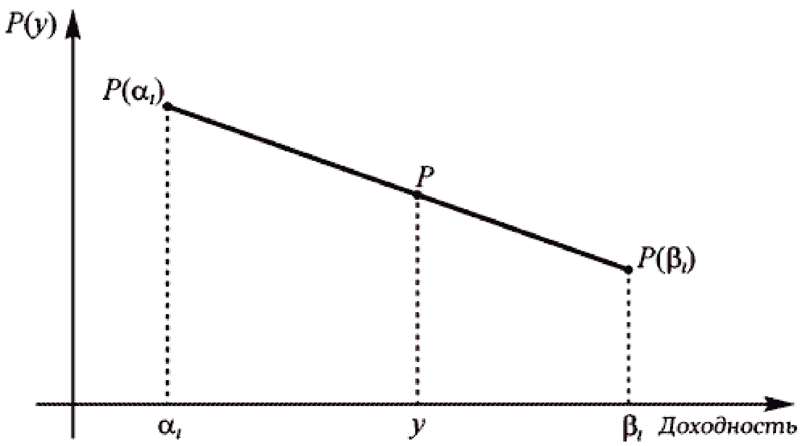


Рис. 1.2. Нахождение внутренней доходности методом линейной интерполяции

Пример 1.9. Финансовый инструмент определяется следующим денежным потоком:

Срок, лет	0,5	1,0	1,5
Платеж, долл.	2000	2500	3000

Определим внутреннюю доходность финансового инструмента при начислении процентов дважды в год, если рыночная цена финансового инструмента равна 7000 долл.

Чтобы определить искомую внутреннюю доходность, достаточно решить уравнение:

$$7000 = P(y),$$

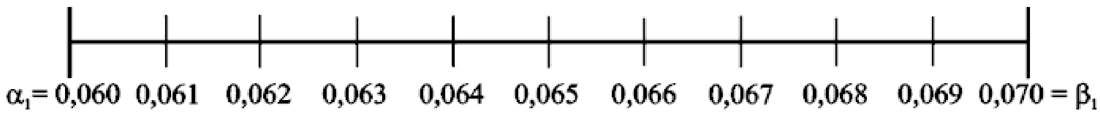
$$\text{где } P(y) = \frac{2000}{1 + \frac{y}{2}} + \frac{2500}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^2} + \frac{3000}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^3}.$$

Так как

$$P(0,06) = \frac{2000}{1+\frac{0,06}{2}} + \frac{2500}{\left(1+\frac{0,06}{2}\right)^2} + \frac{3000}{\left(1+\frac{0,06}{2}\right)^3} = 7043,66 > 7000,$$

$$P(0,07) = \frac{2000}{1+\frac{0,07}{2}} + \frac{2500}{\left(1+\frac{0,07}{2}\right)^2} + \frac{3000}{\left(1+\frac{0,07}{2}\right)^3} = 6971,97 < 7000,$$

то полагаем $\alpha_1 = 0{,}06$, $\beta_1 = 0{,}07$. Промежуток (α_1, β_1) разделим на 10 равных частей:



Заметим, что P(0,066) = 7000,5057 > 7000; P(0,067) = 6993,3546 < 7000. Значит, можно считать, что $\alpha_2 = 0{,}066$, а $\beta_2 = 0{,}067$.

Используя линейную интерполяцию, получим, что

$$y \approx 0,066 \cdot \frac{6993,3546 - 7000}{6993,3546 - 7000,5057} + 0,067 \cdot \frac{7000 - 7000,5057}{6993,3546 - 7000,5057} = 0,06607.$$

Так как P(0,06607) = 7000,005, то искомая внутренняя доходность составляет 6,607 %.

Если по данному финансовому инструменту приходится только один платеж, то его внутренняя доходность при начислении процентов m раз в год может быть найдена по формуле:

$$y = m\left[\left(\frac{C}{P}\right)^{\frac{1}{Tm}} - 1\right], \qquad (1.16)$$

где C – размер платежа по финансовому инструменту;

P – рыночная цена финансового инструмента;

T – срок платежа по финансовому инструменту.

1.5. Котируемая цена купонных облигаций

Купонной облигацией (coupon bond) называют финансовый инструмент, по которому периодически выплачиваются купонные проценты вплоть до погашения и номинальная стоимость в момент его погашения.

Отношение суммы купонных платежей за год к номинальной стоимости облигации называют купонной ставкой облигации (coupon rate).

Если f – купонная ставка облигации, то размер одного купонного платежа может быть найден по формуле:

$$q = \frac{A \cdot f}{m}, \tag{1.17}$$

где q – размер купонного платежа;

A – номинальная стоимость облигации;

m – количество купонных выплат за год.

Пример 1.10. Дана 9 %-ная купонная облигация с полугодовыми купонами и номинальной стоимостью 1000 долл. Определим поток платежей по облигации, когда до ее погашения остается 2,25 года.

В данном случае f = 0,09, A = 1000 долл., m = 2. Значит,

$$q = \frac{1000 \cdot 0,09}{2} = 45 \text{ долл.},$$

и поток платежей по облигации имеет вид:

Срок, лет	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25
Платеж, долл.	45	45	45	45	1045

Цена купонной облигации должна совпадать с приведенной стоимостью потока платежей, обещаемых по этой облигации. Чтобы определить приведенную стоимость потока платежей, необходимо знать ставку дисконтирования, которая в данном случае является требуемой доходностью (required yield).

Требуемая доходность для данной купонной облигации устанавливается на основе исследования внутренних доходностей финансовых инструментов, сравнимых с данной купонной облигацией. При этом учитываются такие факторы, как кредитный рейтинг эмитентов, ликвидность финансовых инструментов и т. д.

Котируемая цена (clean price) купонных облигаций определяется в моменты времени, когда происходят выплаты очередных купонных платежей. Котируемая цена купонной облигации с полугодовыми купонами может быть найдена по формуле:

$$P = \frac{q \cdot 2}{r}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^n}\right] + \frac{A}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^n}, \tag{1.18}$$

где P – котируемая цена облигаций;

$q = \dfrac{A \cdot f}{2}$ – размер одного купонного платежа;

r – требуемая доходность;

A – номинальная стоимость облигации;

n – количество купонных платежей, остающихся до погашения облигации.

Пример 1.11. Найдем цену 9 %-ной купонной облигации, номинальной стоимостью 1000 долл., когда до ее погашения остается 20 лет, а требуемая доходность составляет 8 %.

В данном случае A = 1000 долл., f = 0,09, $q = \dfrac{A \cdot f}{2}$ = 45 долл., $n = 40$, $r = 0{,}08$. Котируемую цену облигации можно найти по формуле (1.18):

$$P = \frac{45 \cdot 2}{0,08}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{0,08}{2}\right)^{40}}\right] + \frac{1000}{\left(1+\frac{0,08}{2}\right)^{40}} = 1098,96 \text{ долл.}$$

Говорят, что купонная облигация продается по номиналу (par value), если ее котируемая цена совпадает с номинальной стоимостью. Купонная облигация продается по номиналу тогда и только тогда, когда купонная ставка облигации равна требуемой доходности.

Облигация продается с премией (at a premium), если ее котируемая цена выше номинальной стоимости. Купонная облигация продается с премией тогда и только тогда, когда купонная ставка выше требуемой доходности. Размер премии для облигаций с полугодовыми купонами составляет:

$$P - A = A\left(\frac{f}{r} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^n}\right). \tag{1.19}$$

Говорят, что купонная облигация продается с дисконтом (at a discount), если ее котируемая цена ниже номинала. Облигация продается с дисконтом тогда и только тогда, когда купонная ставка облигации меньше требуемой доходности. Размер дисконта можно найти следующим образом:

$$A - P = A\left(1 - \frac{f}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{2}\right)^n}\right). \qquad (1.20)$$

Пример 1.12. Облигация из примера 1.11 продается с премией, так как ее купонная ставка f = 0,09 выше требуемой доходности r = 0,08. Размер премии можно определить по формуле (1.19):

$$P - A = 1000\left(\frac{0,09}{0,08} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{0,08}{2}\right)^{40}}\right) = 98,96 \text{ долл.}$$

Если с течением времени требуемая доходность не изменяется, то чем ближе дата погашения облигации, тем меньше размер премии (дисконта).

Зависимость котируемой цены облигации от количества купонных платежей, остающихся до погашения облигации, показана на рис. 1.3.

Котировкой облигации называют отношение

$$\frac{P}{A} \cdot 100,$$

где P – котируемая цена облигации;

A – номинальная стоимость облигации.

Зная котировку облигации и ее номинальную стоимость, можно найти котируемую цену облигации.

Пример 1.13. Если котировка облигации номинальной стоимостью 5000 долл. равна $98\frac{1}{4}$, то ее котируемая цена равна

$$\frac{98,25 \cdot 5000}{100} = 4912,50 \text{ долл.}$$

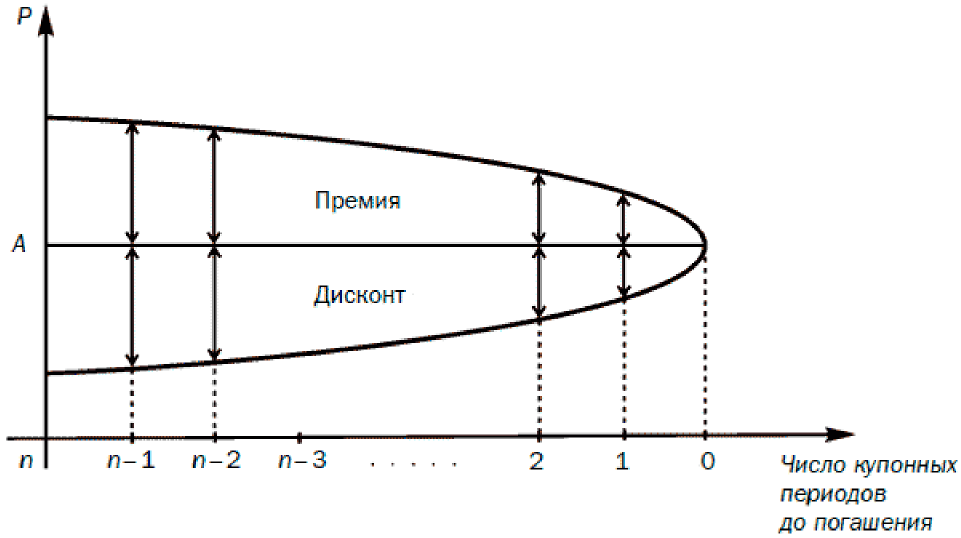


Рис. 1.3. Зависимость котируемой цены облигации от количества купонных платежей

1.6. Цена купонных облигаций

Рассмотрим некоторую облигацию с полугодовыми купонами. Будем считать, что требуемая доходность известна и равна r.

Если расчетная дата приходится на дату купонного платежа, то цена облигации считается равной ее котируемой цене и может быть найдена по формуле (1.18). Если же расчетная дата находится между датами купонных платежей, то цена облигации определяется следующим образом:

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{q}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{i+w}} + \frac{A}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{n-1+w}}, \qquad (1.21)$$

где P – цена облигации;

q – полугодовой купонный платеж;

A – номинальная стоимость облигации;

n – число купонных платежей, остающихся до погашения облигации;

w – отношение числа дней от расчетной даты до очередного купонного платежа к числу дней в купонном периоде.

Формулу (1.21) можно записать и в ином виде:

$$P = \frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{w}} \left[\frac{2q}{r}\left(1+\frac{r}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{n}}\right) + \frac{A}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{n-1}} \right]. \qquad (1.22)$$

Пример 1.14. Дана 10 %-ная облигация с полугодовыми купонами номиналом 100 долл., погашаемая 1 марта 2003 г. Определим, какова была цена этой облигации 17 июля 1997 г. при требуемой доходности в 7 %.

В данном случае A = 100 долл., q = 5 долл., r = 0,07, n = 12.

При расчете фактического числа дней между двумя датами принято учитывать только одну из этих дат. Тогда число дней между 1 марта и 1 сентября 1997 г. – 184, а между 17 июля и 1 сентября 1997 г. – 46. Значит,

$$w = \frac{46}{184} = 0,25.$$

По формуле (1.22) найдем, что

$$P = \frac{1}{\left(1+\frac{0,07}{2}\right)^{0,25}}\left[\frac{10}{0,07}\left(1+\frac{0,07}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{0,07}{2}\right)^{12}}\right)+\frac{100}{\left(1+\frac{0,07}{2}\right)^{11}}\right] =$$
$$= 117,49 \text{ долл.}$$

Замечание. В примере 1.14 мы определяли число дней между двумя датами по календарю. Так принято, в частности, на рынке казначейских облигаций США. Этот стандарт расчета числа дней обозначают Actual/Actual. На других рынках облигаций могут использоваться и другие стандарты. Например, стандарт 30/360, когда число дней в любом месяце считается равным 30, а число дней в году – 360.

Пример 1.15. Определим цену облигаций из примера 1.14, если на рынке действует стандарт 30/360.

При стандарте 30/360 число дней между 1 марта и 1 сентября считается равным 180, а между 17 июля и 1 сентября – 44. Тогда

$$w = \frac{44}{180} = 0,2444.$$

В этом случае цена облигации находится следующим образом:

$$P = \frac{1}{\left(1+\frac{0,07}{2}\right)^{0,2444}}\left[\frac{10}{0,07}\left(1+\frac{0,07}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{0,07}{2}\right)^{12}}\right)+\frac{100}{\left(1+\frac{0,07}{2}\right)^{11}}\right] =$$
$$= 117,51 \text{ долл.}$$

Если покупка облигации производится на бирже, то покупатель обязан уплатить котируемую цену облигации и накопленные проценты (accrued interest), которые рассчитываются следующим образом:

$$AI = q\frac{N_1}{N}, \tag{1.23}$$

где q – полугодовой купонный платеж;

N_1 – число дней от последнего купонного платежа до расчетной даты;

N – число дней в купонном периоде.

Сумму котируемой цены облигации и накопленных процентов называют «грязной» ценой (dirty price).

Пример 1.16. Определим величину накопленных процентов для облигации из примера 1.14.

При использовании стандарта Actual/Actual имеем:

$$AI = 5 \cdot \frac{184 - 46}{184} = 5 \cdot \frac{138}{184} = 3,75 \text{ долл.},$$

а при стандарте 30/360:

$$AI = 5 \cdot \frac{180 - 44}{180} = 5 \cdot \frac{136}{180} = 3,78 \text{ долл.}$$

1.7. Оценка доходности облигаций

На рынках облигаций используются различные меры доходности облигаций.

1.7.1. Текущая доходность

Текущей доходностью (currentyield) купонной облигации принято считать отношение суммы купонных платежей за год к рыночной цене облигации.

Пример 1.17. Определим текущую доходность 6 %-ной облигации с полугодовыми купонами номиналом 1000 долл., продающейся по цене 700,89 долл., когда до ее погашения остается 18 лет.

$$\text{Текущая доходность} = \frac{1000 \cdot 0,06}{700,89} = 0,0856, \ \text{т. е.}\ 8{,}56\%.$$

1.7.2. Доходность к погашению

Доходность к погашению (yield to maturity) облигации с полугодовыми купонами является решением уравнения:

$$P + AI = \frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{w}}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{q}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{i}} + \frac{A}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{n-1}}\right), \qquad (1.24)$$

где P – котируемая цена облигации;

AI – накопленные проценты на расчетную дату;

q – полугодовой купонный платеж;

A – номинальная стоимость облигации;

n – число купонных платежей, остающихся до погашения облигации;

w – отношение числа дней между расчетной датой и очередным купонным платежом к числу дней в купонном периоде.

Пример 1.18. Найдем доходность к погашению облигации из примера 1.17.

В данном случае

$$P = 700,89 \text{ долл.}, AI = 0, q = \frac{1000 \cdot 0,06}{2} = 30 \text{ долл.},$$

$$A = 1000 \text{ долл.}, n = 36, w = 1.$$

Следовательно, доходность к погашению удовлетворяет уравнению:

$$700,89 = \frac{60}{y}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{36}}\right) + \frac{1000}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{36}}.$$

Так как

$$\frac{60}{0,095}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{0,095}{2}\right)^{36}}\right) + \frac{1000}{\left(1+\frac{0,095}{2}\right)^{36}} = 700,8895 \text{ долл.},$$

то доходность к погашению облигации равна 9,50 %.

Нетрудно убедиться, что имеют место следующие утверждения:

1) если купонная облигация продается по номиналу, то купонная ставка равна текущей доходности облигации и ее доходности к погашению;

2) если купонная облигация продается с премией, то ее купонная ставка больше текущей доходности, которая, в свою очередь, больше доходности к погашению;

3) если же купонная облигация продается с дисконтом, то ее купонная ставка меньше текущей доходности, которая, в свою очередь, меньше доходности к погашению (см. примеры 1.17 и 1.18).

1.7.3. Доходность к отзыву

Во многих случаях при эмиссии облигаций оговаривается право эмитента выкупить всю эмиссию или некоторую ее часть до установленной даты погашения облигаций. Такие облигации принято называть отзывными (callable bonds). Для отзывных облигаций заранее устанавливается специальный график отзыва, показывающим цены отзыва в зависимости от времени, прошедшего после даты эмиссии; обычно через определенное время после эмиссии цена отзыва устанавливается выше номинала облигации, а затем она постепенно снижается до номинала.

Доходность к отзыву (yield to call) при условии, что расчетная дата приходится на дату купонного платежа, является решением уравнения следующего вида:

$$P = \sum_{i=1}^{n^*} \frac{q}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{i}} + \frac{A^*}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{n^*}}, \tag{1.25}$$

где P – котируемая цена облигации с полугодовыми купонами;

q – полугодовой купонный платеж;

n* – число купонных платежей, остающихся до рассматриваемой даты отзыва;

A* – цена отзыва в соответствующий момент времени.

Пример 1.19. Дана 11 %-ная облигация с полугодовыми купонами номиналом 1000 долл. и сроком погашения 19 лет, продающаяся по цене 1224,07 долл. Определим доходность облигации: а) к погашению; б) к отзыву через 6 лет по цене 1055 долл.; в) к отзыву через 10 лет по номиналу.

Доходность к погашению данной облигации должна удовлетворять следующему уравнению:

$$1224,07 = \frac{110}{y}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{38}}\right] + \frac{1000}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{38}}.$$

Решив уравнение, получим, что y = 0,0858. Таким образом, доходность к погашению составляет 8,58 %.

Доходность к отзыву через 6 лет является решением уравнения

$$1224,07 = \frac{110}{y}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{12}}\right] + \frac{1055}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{12}}.$$

Откуда y = 0,0710, т. е. 7,10 %.

Наконец, доходность к отзыву по номиналу равна 7,74 %, так как должна удовлетворять уравнению

$$1224,07 = \frac{110}{y}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{20}}\right] + \frac{1000}{\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{20}}.$$

1.7.4. Доходность к продаже

В некоторых случаях по условиям эмиссии держатель облигации имеет право продать облигацию эмитенту по заранее установленной цене, зависящей от времени, прошедшего с момента эмиссии. Такие облигации называют продаваемыми (putable bonds)[15]. Для продаваемых облигаций можно определить доходность к продаже (yield to put)[16] по аналогии с тем, как находится доходность к отзыву для отзывных облигаций.

Если же облигация одновременно является отзывной и продаваемой, то можно рассмотреть доходность до всех предполагаемых дат отзыва и доходность ко всем предполагаемым датам продажи. Наименьшая из всех таких доходностей называется доходностью к «наихудшему» (yield to worst).

1.7.5. Маржа дисконтирования

Мера доходности, называемая маржей дисконтирования (discounted margin), применяется только к облигациям с плавающей купонной ставкой (floating-rate securities). В простейшем случае плавающая купонная ставка определяется в установленные моменты времени по формуле:

$$\textit{Плавающая ставка} = \textit{Ставка-ориентир} + \textit{Фиксированная надбавка}.$$

Маржей дисконтирования называют надбавку к ставке-ориентиру, которую держатель облигации ожидает получить за все время существования облигации, если ставка-ориентир не будет отклоняться от своего текущего уровня.

Пример 1.20. Дана 6-летняя облигация с плавающей купонной ставкой номиналом 100 долл. Купонная ставка больше ставки-ориентира на 80 базисных пунктов и определяется каждые 6 месяцев. Определим маржу дисконтирования, если цена облигации 99,31 долл., а текущее значение ставки-ориентира – 10 %.

При определении маржи дисконтирования считается, что ставка-ориентир не меняется с течением времени. Значит, в этом случае полугодовой купонный платеж составит:

$$\frac{100 \cdot 0,108}{2} = 5,4 \text{ долл.}$$

Маржа дисконтирования должна удовлетворять следующему уравнению:

[15] Другое распространенное название – **облигация с офертой.**

[16] Другое распространенное название – **доходность к оферте.**

$$99,31 = \sum_{i=1}^{12} \frac{5,4}{\left(1 + \frac{0,1 + x}{2}\right)^i} + \frac{100,0}{\left(1 + \frac{0,1 + x}{2}\right)^{12}},$$

которое можно переписать в виде:

$$99,31 = \frac{2 \cdot 5,4}{0,1 + x}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{0,1 + x}{2}\right)^{12}}\right] + \frac{100,0}{\left(1 + \frac{0,1 + x}{2}\right)^{12}}.$$

Решив уравнение, получим, что x = 0,0096. Таким образом, маржа дисконтирования составляет 96 базисных пунктов.

1.8. Оценка доходности портфелей облигаций

Для оценки доходности портфелей облигаций чаще всего используются следующие две меры доходности: средневзвешенная доходность и внутренняя доходность.

1.8.1. Средневзвешенная доходность портфеля облигаций

Средневзвешенная доходность портфеля облигаций (weighted average portfolio yield) определяется по формуле:

$$y_П = \sum_{i=1}^{k} w_i y_i,$$

где k – число облигаций в портфеле;

y_i – доходность i-й облигации, i = 1, 2, …, k;

w_i – отношение рыночной стоимости i-й облигации к рыночной стоимости всего портфеля, i = 1, 2, …, k.

Пример 1.21. Портфель состоит из двух облигаций с полугодовыми купонами, параметры которых указаны в таблице:

Облигация	Купонная ставка, %	Срок до погашения, лет	Номинальная стоимость, долл.	Рыночная стоимость, долл.	Доходность к погашению, %
1	7	1	10 000	9 905,70	8
2	10	2	20 000	20 000	10

Определим средневзвешенную доходность портфеля облигаций. В данном случае

$$k = 2,\ y_1 = 0,08,\ y_2 = 0,10,\ w_1 = \frac{9905,70}{9905,70 + 20\,000} = 0,3312,$$

$$w_2 = \frac{20\,000}{9905,70 + 20\,000} = 0,6688.$$

Следовательно, средневзвешенная доходность портфеля равна

$y_П$ = 0,3312 • 0,08 + 0,6688 • 0,10 = 0,0934, т. е. 9,34 %.

1.8.2. Внутренняя доходность портфеля облигаций

Внутренней доходностью портфеля облигаций (portfolio internal rate of return) является процентная ставка, при которой приведенная стоимость потока платежей от портфеля совпадает с рыночной стоимостью этого портфеля. Следовательно, чтобы определить внутреннюю доходность портфеля облигаций, предварительно необходимо найти поток платежей по данному портфелю.

Пример 1.22. Найдем внутреннюю доходность портфеля облигаций из примера 1.21.

Поток платежей по рассматриваемому портфелю имеет следующий вид:

Срок, лет	0,5	1,0	1,5	2,0
Платеж, долл.	350+1000=1350	10 350+1000=11 350	1000	21 000

Следовательно, внутренняя доходность портфеля облигаций должна удовлетворять уравнению:

$$29\,905,70 = \frac{1350}{1+\frac{y}{2}} + \frac{11\,350}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^2} + \frac{1000}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^3} + \frac{21\,000}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^4}.$$

Значит, y = 0,0959.

Таким образом, внутренняя доходность портфеля облигаций составляет 9,59 %.

1.9. Кривые рыночных доходностей

Рассмотрим некоторую купонную облигацию. Каждый отдельный купонный платеж и каждую выплату номинальной стоимости можно интерпретировать как облигацию с нулевым купоном при соответствующем сроке до погашения. В этом случае саму облигацию можно рассматривать как портфель облигаций с нулевыми купонами.

Так как купонная облигация и портфель соответствующих облигаций с нулевыми купонами характеризуются одинаковыми потоками платежей, то должны совпадать и их цены. Следовательно, зная внутренние доходности облигаций с нулевыми купонами, можно найти цену купонной облигации.

Набор внутренних доходностей облигаций с нулевыми купонами, выпущенных эмитентами одного и того же кредитного рейтинга, называют временной структурой процентных ставок (term structure of interest rates).

Графическое изображение временной структуры процентных ставок принято называть кривой (рыночных) доходностей (yield curve, zero coupon curve).

Кривая доходностей может изменяться с течением времени. На рис. 1.4-1.7 показаны примеры кривых рыночных доходностей.

Кривую рыночных доходностей для казначейских (государственных) облигаций называют кривой спот-ставок (spot curve).

Если известна кривая спот-ставок, то можно определить цену любой купонной казначейской облигации.

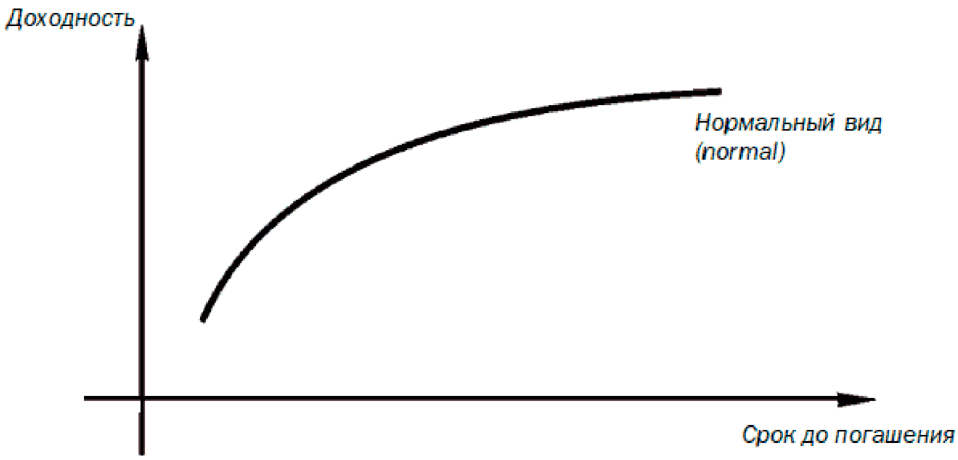


Рис. 1.4. Нормальный вид кривой доходностей

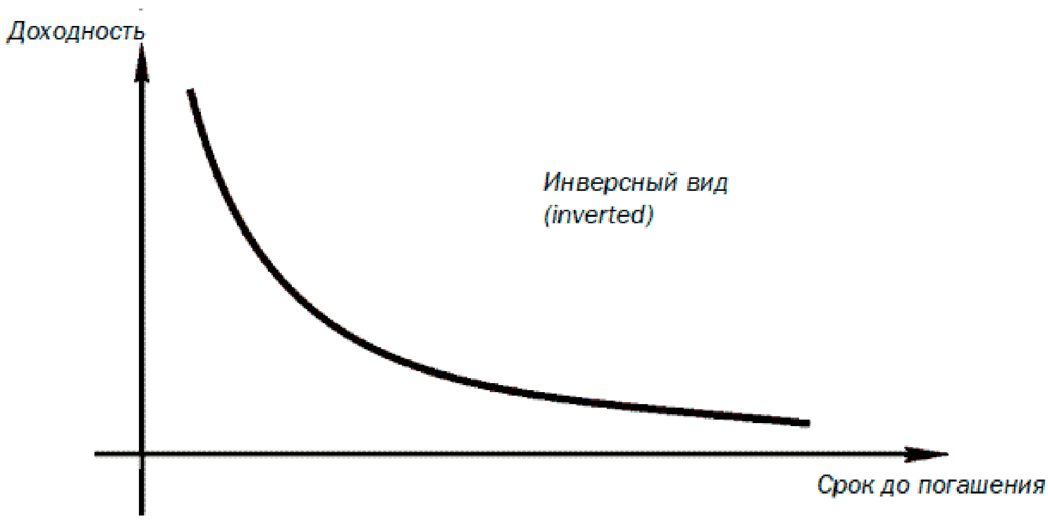


Рис. 1.5. Инверсный вид кривой доходностей

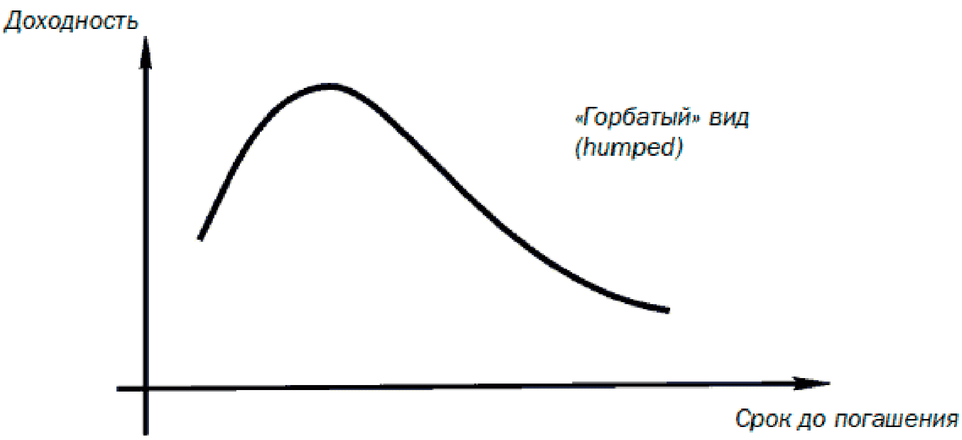


Рис. 1.6. «Горбатый» вид кривой доходностей

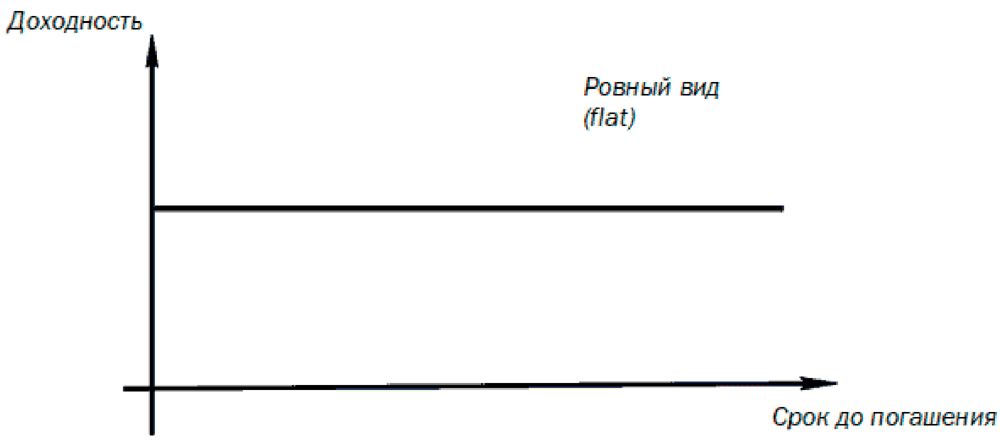


Рис. 1.7. Ровный вид кривой доходностей

Например, котируемая цена казначейских облигаций с полугодовыми купонами может быть найдена по следующей формуле:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{\left(1 + \frac{r_i}{2}\right)^i} + \frac{A}{\left(1 + \frac{r_n}{2}\right)^n}, \tag{1.26}$$

где P – котируемая цена облигации;

A – номинальная стоимость облигации;

n – число купонных платежей, остающихся до погашения облигации;

r_i – спот-ставка на i полугодовых периодов, i = 1, 2…, n.

Пример 1.23. Дана 8 %-ная казначейская облигация с полугодовыми купонами номиналом 100 долл. Определим цену этой облигации, когда до ее погашения остается 2 года, а спот-ставки на 0,5, 1,0, 1,5 и 2 года соответственно равны 6, 6,5, 6,8 и 7 %.

Согласно формуле (1.26), имеем:

$$P = \frac{4}{1 + \frac{0,06}{2}} + \frac{4}{\left(1 + \frac{0,065}{2}\right)^2} + \frac{4}{\left(1 + \frac{0,068}{2}\right)^3} + \frac{104}{\left(1 + \frac{0,07}{2}\right)^4} = 101,88 \text{ долл.}$$

Чтобы построить кривую спот-ставок, необходимо знать рыночные цены облигаций с нулевыми купонами при различных сроках до погашения. Однако обычно облигации с нулевыми купонами выпускаются лишь при небольших сроках до погашения. В таком случае кривую спот-ставок можно смоделировать на основе цен купонных облигаций с разными сроками до погашения.

Пример 1.24. На рынке имеются казначейские облигации с полугодовыми купонами номиналом 100 долл. со следующими данными:

Срок до погашения, лет	Купонная ставка	Цена, долл.
0,5	0,000	96,15
1,0	0,000	92,19
1,5	0,085	99,45
2,5	0,110	103,49

Выясним, как можно построить кривую спот-ставок в данной ситуации.

1. 6-месячную спот-ставку можно найти с помощью первой облигации. Так как должно выполняться равенство

$$96,15 = \frac{100}{1 + \frac{r_1}{2}},$$

то $r_1 = 0,080$, т. е. 8%.

2. Спот-ставку на год можно определить по второй облигации из нашего списка:

$$92,19 = \frac{100}{\left(1 + \frac{r_2}{2}\right)^2}, \text{ значит, } r_2 = 0,083, \text{ т. е. } 8,30\%.$$

3. Спот-ставку на 1,5 года будем искать с помощью третьей облигации, зная уже найденные спот-ставки r_1 и r_2.

Так как цена облигации должна совпадать с приведенной стоимостью потока платежей от этой облигации, то

$$99,45 = \frac{4,25}{1 + \frac{0,08}{2}} + \frac{4,25}{\left(1 + \frac{0,083}{2}\right)^2} + \frac{104,25}{\left(1 + \frac{r_3}{2}\right)^3}.$$

Следовательно, $r_3 = 0,0893$.

4. Спот-ставку r_4 найдем с помощью линейной интерполяции:

$$r_4 = \frac{0,0893 + r_5}{2}.$$

Тогда должно выполняться следующее равенство:

$$103,49 = \frac{5,5}{1 + \frac{0,08}{2}} + \frac{5,5}{\left(1 + \frac{0,083}{2}\right)^2} + \frac{5,5}{\left(1 + \frac{0,0893}{2}\right)^3} + \frac{5,5}{\left(1 + \frac{0,0893 + r_5}{4}\right)^4} + \frac{105,5}{\left(1 + \frac{r_5}{2}\right)^5},$$

т. е. мы имеем уравнение с одним неизвестным. Решив это уравнение методом проб и ошибок, получим, что $r_5 = 0{,}0948$. Тогда

$$r_4 = \frac{0,0893 + 0,0948}{2} = 0,09205.$$

В данном случае кривая спот-ставок имеет нормальный вид (рис. 1.8).

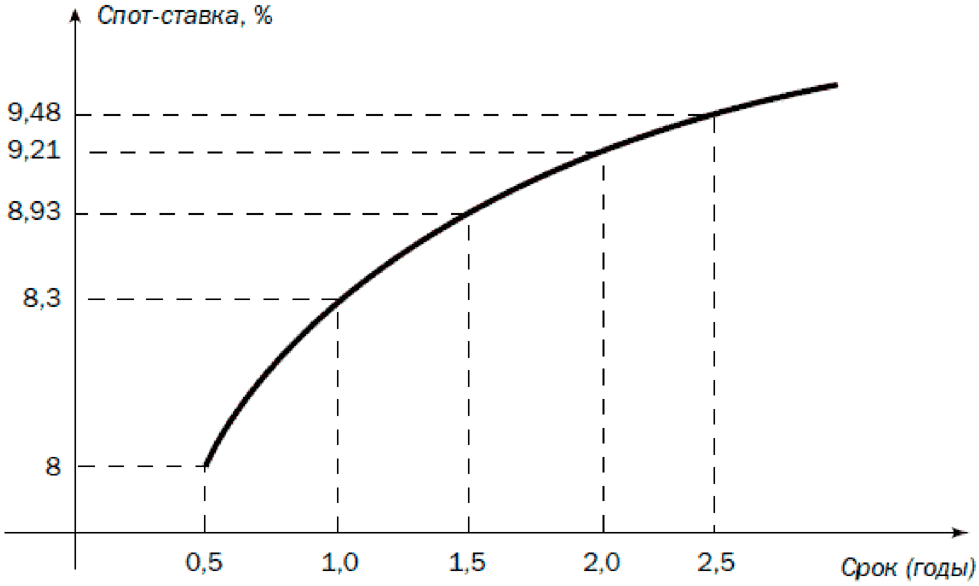


Рис. 1.8. Кривая спот-ставок из примера 1.24

В развитых финансовых системах государственные облигации считаются безрисковыми, а все остальные облигации принято с ними сравнивать. Для сравнения облигаций, выпущенных негосударственными эмитентами, с государственными облигациями можно использовать показатель, называемый спредом нулевой волатильности.

Спредом нулевой волатильности (zero-volatility spread) называют такую надбавку к спот-ставкам, при которой приведенная стоимость потока платежей от облигации совпадает с ее рыночной ценой.

Спред нулевой волатильности удовлетворяет следующему уравнению:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{\left(1 + \frac{r_i + x}{2}\right)^i} + \frac{A}{\left(1 + \frac{r_n + x}{2}\right)^n},$$

где P – котируемая цена облигации с полугодовыми купонами;

q – полугодовой купонный платеж;

A – номинальная стоимость облигации;

n – число купонных платежей, остающихся до погашения облигации;

r_i – спот-ставка на i полугодовых периодов, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пример 1.25. Дана 10 %-ная корпоративная облигация с полугодовыми купонами номиналом 1000 долл., когда до ее погашения остается 3 года. Определим спред нулевой волатильности, если облигация продается за 1002,75 долл., а спот-ставки на 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5 и 3 года соответственно равны 6, 6, 7, 7, 8 и 8 %.

Решив уравнение

$$1002,75 = \frac{50}{1+\frac{0,06+x}{2}} + \frac{50}{\left(1+\frac{0,06+x}{2}\right)^2} + \frac{50}{\left(1+\frac{0,07+x}{2}\right)^3} + \frac{50}{\left(1+\frac{0,07+x}{2}\right)^4} + \frac{50}{\left(1+\frac{0,08+x}{2}\right)^5} + \frac{1050}{\left(1+\frac{0,08+x}{2}\right)^6},$$

найдем, что $x = 0{,}02$. Таким образом, в данном случае спред нулевой волатильности составляет 200 базисных пунктов.

Замечание. Для сравнения краткосрочных облигаций можно использовать разницу между доходностями к погашению. Однако для долгосрочных облигаций спред нулевой волатильности дает более точную оценку.

1.10. Предполагаемые форвардные ставки

Если известна кривая рыночных доходностей, можно найти предполагаемые форвардные ставки.

Предполагаемая форвардная ставка (implied forward rate) через n полугодовых периодов на t периодов вперед определяется следующей формулой:

$$ {}_n f_t = 2\left[\frac{\left(1+\frac{r_{n+t}}{2}\right)^{\frac{n+t}{t}}}{\left(1+\frac{r_n}{2}\right)^{\frac{n}{t}}} - 1\right], \qquad (1.27) $$

где ${}_n f_t$ – предполагаемая форвардная ставка через n полугодовых периодов на t полугодовых периодов;

r_{n+t} – внутренняя доходность облигации с нулевым купоном, погашаемой через n + t полугодовых периодов;

r_n – внутренняя доходность облигации с нулевым купоном, погашаемой через n полугодовых периодов.

Чтобы выяснить смысл предполагаемых форвардных ставок, рассмотрим две стратегии.

Стратегия 1. Денежную сумму Q инвестируем на n + t полугодовых периодов под ставку r_{n+t} (это означает, что на сумму Q закупаются облигации с нулевыми купонами, погашаемые через n + t полугодовых периодов).

Стратегия 2. Денежную сумму Q инвестируем на n полугодовых периодов под ставку r_n, а затем накопленную сумму реинвестируем еще на t полугодовых периодов под ставку z_t.

Данные стратегии дадут один и тот же конечный результат тогда и только тогда, когда $z_t = {}_n f_t$.

Таким образом, предполагаемая форвардная ставка ${}_n f_t$ – это такая ставка, которую может себе обеспечить инвестор на t полугодовых периодов в будущем, оперируя на рынке облигаций с нулевыми купонами.

Пример 1.26. Рыночные доходности на 3 и 5 полугодовых периодов соответственно равны 8 и 9 %.

Предполагаемая форвардная ставка через 1,5 года на один год вперед может быть найдена следующим образом:

$$ {}_3 f_2 = 2\left[\frac{\left(1+\frac{0,09}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}{\left(1+\frac{0,08}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} - 1\right] = 0,10509, \text{ т. е. } 10,51\%. $$

Если 100 долл. инвестировать на 2,5 года под ставку 9 %, то через 2,5 года получим

$$100\left(1+\frac{0,09}{2}\right)^5 = 124,6182 \text{ долл.}$$

Если же 100 долл. инвестировать на 1,5 года под ставку 8 %, а затем накопленную сумму

$$100\left(1+\frac{0,08}{2}\right)^3 = 112,4864 \text{ долл.}$$

реинвестировать под предполагаемую форвардную ставку 10,51 % еще на один год, то получим

$$112,4864\left(1+\frac{0,1051}{2}\right)^2 = 124,6193 \text{ долл.}$$

Таким образом, обе рассмотренные стратегии дают один и тот же результат (небольшое расхождение объясняется погрешностями при расчетах).

Графическое изображение предполагаемых форвардных ставок $_nf_t$ при t = 1, 2, 3…. называют кривой форвардных ставок (forward rate curve) через n полугодовых периодов.

Можно доказать, что если кривая форвардных ставок является возрастающей (убывающей), то и кривая рыночных доходностей возрастает (убывает). Однако при возрастающей кривой рыночных доходностей кривая форвардных ставок не обязательно будет возрастающей.

Пример 1.27. На данный момент времени известны следующие рыночные доходности:

Срок до погашения, лет	0,5	1,0	1,5	2,0
Доходность	0,080	0,083	0,089	0,090

Таким образом, кривая рыночных доходностей возрастает. По определению предполагаемых форвардных ставок имеем:

$$_1f_1 = 2\left[\frac{\left(1+\frac{0,083}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{0,080}{2}\right)} - 1\right] = 0,086004;$$

$$_1f_2 = 2\left[\frac{\left(1+\frac{0,089}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{0,080}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1\right] = 0,093515;$$

$$_1f_3 = 2\left[\frac{\left(1+\frac{0,090}{2}\right)^{\frac{4}{3}}}{\left(1+\frac{0,080}{2}\right)^{\frac{1}{3}}} - 1\right] = 0,093344.$$

Следовательно, кривая форвардных ставок не является возрастающей ($_1f_2 > {}_1f_3$).

Если известны предполагаемые форвардные ставки, то можно определить и рыночные доходности:

$$r_t = 2\left\{\left[\left(1+\frac{_0f_1}{2}\right)\left(1+\frac{_1f_1}{2}\right)\left(1+\frac{_2f_1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{_{t-1}f_1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{t}} - 1\right\}. \tag{1.28}$$

Так как среднее геометрическое положительных чисел не больше среднего арифметического этих чисел, то

$$r_t \le 2\left(\frac{1+\frac{_0f_1}{2}+1+\frac{_1f_1}{2}+\ldots+1+\frac{_{t-1}f_1}{2}}{t} - 1\right) = \frac{_0f_1 + {}_1f_1 + \ldots + {}_{t-1}f_1}{t}.$$

С помощью предполагаемых форвардных ставок можно найти котируемую цену облигации с полугодовыми купонами:

$$P = \frac{q}{1 + \frac{{}_0f_1}{2}} + \frac{q}{\left(1 + \frac{{}_0f_1}{2}\right)\left(1 + \frac{{}_1f_1}{2}\right)} + \ldots + \frac{q + A}{\left(1 + \frac{{}_0f_1}{2}\right)\left(1 + \frac{{}_1f_1}{2}\right)\ldots\left(1 + \frac{{}_{n-1}f_1}{2}\right)}. \quad (1.29)$$

1.11. Относительное изменение цены купонной облигации

На данный момент времени цена купонной облигации зависит только от требуемой доходности. При этом чем выше требуемая доходность, тем ниже цена облигации, и, наоборот, чем ниже требуемая доходность, тем выше цена.

Обозначим через P(r) цену купонной облигации при требуемой доходности, равной r. Если Δr – некоторое положительное число, то величину

$$\frac{P(r-\Delta r)-P(r)}{P(r)}$$

назовем относительным ростом, а величину

$$\frac{P(r)-P(r+\Delta r)}{P(r)}$$

относительным снижением цены облигации.

Относительное изменение цены купонной облигации является важным показателем рискованности этой облигации.

Основные утверждения

1. При одном и том же изменении требуемой доходности относительный рост цены купонной облигации всегда больше относительного снижения (рис. 1.9).

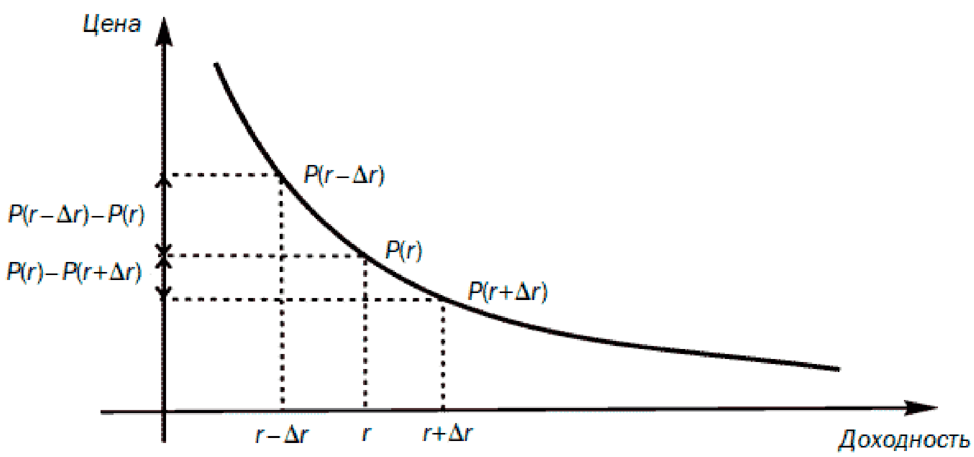


Рис. 1.9. Относительные рост и снижение цены купонной облигации

Пример 1.28. Дана 8 %-ная купонная облигация с полугодовыми купонами, до погашения которой остается 15 лет, когда требуемая доходность равна 10 %, а цена облигации – 84,6275 долл.

Относительный рост и относительное снижение цены облигации при различных изменениях требуемой доходности приведены в таблице:

Изменение требуемой доходности Δr, б. п.*	Цена облигации, долл.		Относительный рост цены $\frac{P(r-\Delta r)-P(r)}{P(r)}$, %	Относительное снижение цены $\frac{P(r)-(r+\Delta r)}{P(r)}$, %
	$P(r-\Delta r)$	$P(r+\Delta r)$		
1	84,6957	84,5595	0,08	0,08
10	85,3126	83,9505	0,81	0,80
50	88,1347	81,3201	4,14	3,91
200	100,0000	72,4703	18,16	14,37

* б. п. — базисный пункт (сотая доля процента).

Замечание. При достаточно малых изменениях требуемой доходности относительный рост цены облигации практически совпадает с относительным снижением.

2. Чем выше купонная ставка облигации, тем меньше относительное изменение цены купонной облигации.

Пример 1.29. Даны 5-летние облигации с полугодовыми купонами при требуемой доходности r = 10 %, купонные ставки которых равны 0, 8 и 12 %. Относительный рост и относительное снижение цен облигаций при изменении требуемой доходности на 10 базисных пунктов приведены в таблице:

Купонная ставка, %	Цена облигации, долл.			Относительный рост цены, %	Относительное снижение цены, %
	$P(r)$	$P(r-\Delta r)$	$P(r+\Delta r)$		
0	61,3913	61,6844	61,0997	0,48	0,47
8	92,2783	92,6465	91,9118	0,40	0,40
12	107,7217	108,1275	107,3179	0,38	0,38

Следствие. Среди облигаций с одним и тем же сроком до погашения, выпущенных данным эмитентом, наиболее рискованными являются облигации с нулевым купоном.

3. Чем выше требуемая доходность при прочих равных условиях, тем ниже относительное изменение цены купонной облигации.

Пример 1.30. Дана 8 %-ная купонная облигация с полугодовыми купонами, до погашения которой остается 15 лет, когда требуемая доходность равна 12 %, а цена облигации равна 72,4703 долл.

Относительный рост и относительное снижение цены облигации при различных изменениях требуемой доходности, приведенные в таблице, сравним с аналогичными показателями для облигации из примера 1.28:

Изменение требуемой доходности Δr, б. п.*	Цена облигации, долл.		Относительный рост цены, %	Относительное снижение цены, %
	$P(r - \Delta r)$	$P(r + \Delta r)$		
1	72,5245	72,4163	0,075	0,075
10	73,0144	71,9324	0,75	0,740
50	75,2532	69,8402	3,84	3,63
200	84,6275	62,7729	16,78	13,38

* б. п. — базисный пункт.

4. Чем меньше времени остается до погашения облигации, тем меньше относительное изменение цены облигации (за исключением долгосрочных облигаций, продающихся с дисконтом).

Пример 1.31. Рассмотрим 4 %-ную облигацию с полугодовыми купонами при разных сроках погашения, если требуемая доходность равна 10 %, а изменение требуемой доходности составляет 50 базисных пунктов.

Все расчеты приведены в таблице:

Срок до погашения, лет	Цена облигации, долл.			Относительный рост цены, %	Относительное снижение цены, %
	$P(r)$	$P(r - \Delta r)$	$P(r + \Delta r)$		
40	41,2106	43,5188	39,1279	5,6011	5,0538
30	43,2121	45,6813	40,9686	5,7140	5,1917
20	48,5227	51,1517	46,0906	5,4181	5,0122
10	62,6134	64,9907	60,3428	3,7968	3,6264
5	76,8348	78,5050	75,2063	2,1738	2,1195

Следствие. Если ожидается падение процентных ставок на рынке, то следует держать долгосрочные облигации, а если ожидается рост процентных ставок, то краткосрочные.

1.12. Цена базисного пункта

Для оценки рискованности облигаций используется показатель, называемый ценой базисного пункта.

Ценой базисного пункта (price value of a basis point – PVBP) называют изменение цены облигации номиналом 100 долл. при уменьшении требуемой доходности на один базисный пункт.

Таким образом, цена базисного пункта определяется следующей формулой:

$$\delta P = P(r - \Delta r) - P(r), \qquad (1.30)$$

где δP – цена базисного пункта облигации;

$P(r)$ – цена облигации номиналом 100 долл. при требуемой доходности, равной r;

$P(r - \Delta r)$ – цена облигации при требуемой доходности, равной $r - \Delta r$;

$\Delta r = 0{,}0001$.

Замечание

1. Изменение цены облигации номиналом 100 долл. при увеличении требуемой доходности на 1 базисный пункт практически совпадает с ценой базисного пункта этой облигации.

2. Изменение цены облигации номиналом 100 долл. при уменьшении (увеличении) требуемой доходности на x базисных пунктов при $x \le 10$ приблизительно равно произведению цены базисного пункта на число x.

Пример 1.32. Рассмотрим 6 %-ную облигацию с полугодовыми купонами, когда до погашения остается 10 лет, а требуемая доходность равна 10 %.

В данном случае

$$r = 0{,}1,\ \Delta r = 0{,}0001,\ r - \Delta r = 0{,}0999,$$

$$P(r) = \frac{6}{0{,}1}\left[1 - \frac{1}{(1{,}05)^{20}}\right] + \frac{100}{(1{,}05)^{20}} = 75{,}0756 \text{ долл.},$$

$$P(r - \Delta r) = \frac{6}{0{,}0999}\left[1 - \frac{1}{(1{,}04995)^{20}}\right] + \frac{100}{(1{,}04995)^{20}} = 75{,}1273 \text{ долл.},$$

и по формуле (1.30) цена базисного пункта

$$\delta_1 P = 75{,}1273 - 75{,}0756 = 0{,}0517 \text{ долл.}$$

Следовательно, изменение цены облигации при увеличении требуемой доходности на 8 базисных пунктов должно приблизительно равняться:

$$8\delta_1 P = 8 \cdot 0{,}0517 = 0{,}4136.$$

Точное значение этого изменения может быть найдено следующим образом:

$$P(r) - P(r + 0{,}0008) = 75{,}0756 - 74{,}6631 = 0{,}4125.$$

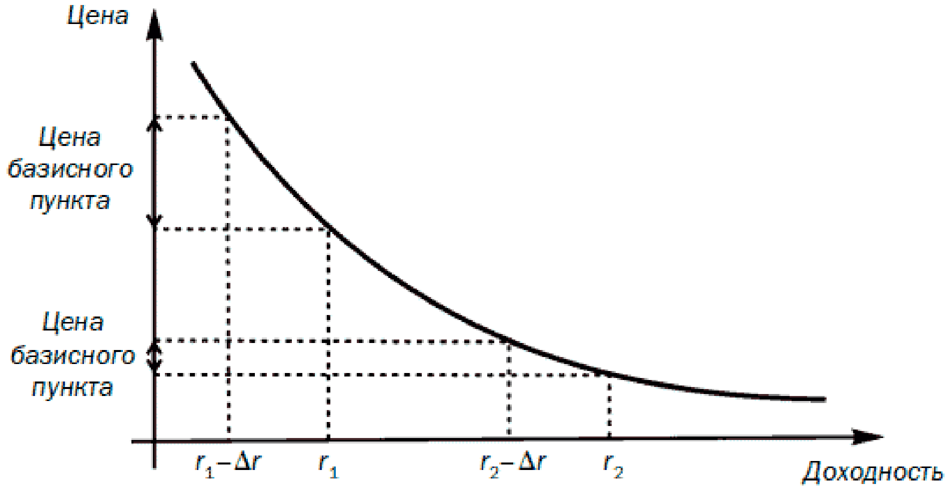


Рис. 1.10. Зависимость цены базисного пункта от доходности облигации

Нетрудно проверить, что имеет место следующее утверждение: чем выше требуемая доходность для данной облигации, тем ниже цена базисного пункта (рис. 1.10).

Пример 1.33. Рассмотрим облигацию из примера 1.32 при требуемой доходности 6 %. В этом случае цена базисного пункта

$$\delta_2 P = P(0,0599) - P(0,06) = 100,0744 - 100,0000 = 0,0744$$

превышает цену базисного пункта из примера 1.32.

Цена базисного пункта для портфеля облигаций находится по формуле:

$$PVBP_{П} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{100} \cdot \delta_k P,$$

где A*k* – номинальная стоимость облигации k-го вида

δ_kP – цена базисного пункта облигации k-го вида при номинале 100 долл.;

N – число облигаций в портфеле.

1.13. Дюрация финансовых инструментов

Рассмотрим финансовый инструмент со следующим потоком платежей:

Срок, лет	t_1	t_2	t_3	…	t_k
Платеж, долл.	C_{t_1}	C_{t_2}	C_{t_3}	…	C_{t_k}

Если требуемая доходность при начислении процентов дважды в год равна r, то дюрацией Маколея (Macaulay duration) данного финансового инструмента называется величина

$$D = \sum_{i=1}^{k} t_i \cdot \frac{ПV\left(C_{t_i}\right)}{P}, \tag{1.31}$$

где $ПV\left(C_{t_i}\right) = \dfrac{C_{t_i}}{\left(1+\dfrac{r}{2}\right)^{2t_i}}$ — приведенная стоимость i-го платежа, $i = 1, 2, \ldots, k$;

$P = \sum_{i=1}^{k} ПV\left(C_{t_i}\right)$ — текущая цена финансового инструмента.

Модифицированная дюрация (modified duration) финансового инструмента определяется равенством

$$D_{мод} = \frac{D}{1+\dfrac{r}{2}}, \tag{1.32}$$

где D – дюрация Маколея,

r – требуемая доходность при начислении процентов дважды в год.

Имеет место следующее равенство:

$$\frac{dP}{dr} = -D_{мод} \cdot P,$$

т. е. производная цены финансового инструмента по требуемой доходности равна произведению модифицированной дюрации этого инструмента на его цену с обратным знаком.

Основное свойство дюрации – при малых изменениях требуемой доходности имеет место равенство

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{мод} \cdot \Delta r, \tag{1.33}$$

где $\dfrac{\Delta P}{P} = \dfrac{P(r+\Delta r) - P(r)}{P(r)}$ — относительное изменение цены финансового инструмента при изменении требуемой доходности на величину Δr (положительную или отрицательную);

$D_{мод}$ — модифицированная дюрация.

Из равенства (1.33), в частности, следует, что

$$P(r+\Delta r) \approx P(r) - P(r) \cdot D_{мод} \cdot \Delta r. \tag{1.34}$$

Геометрическая иллюстрация равенства (1.34) приведена на рис. 1.11.

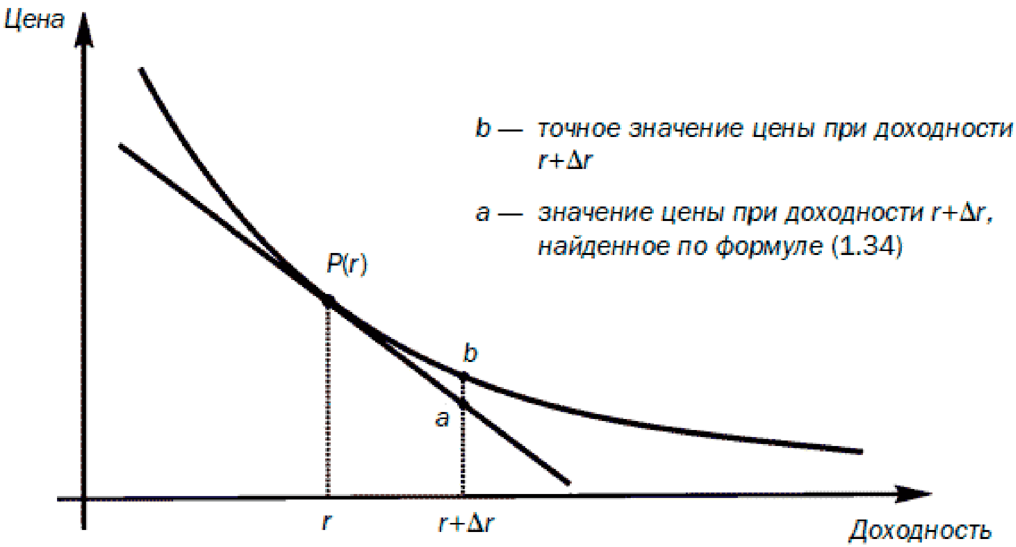


Рис. 1.11. Геометрический смысл основного свойства дюрации

Пример 1.34. Финансовый инструмент характеризуется следующим потоком платежей:

Срок, лет	1,0	1,5	2,0	3,0
Платеж, долл.	100	120	130	300

Расчет дюрации финансового инструмента при требуемой доходности 10 % приведен в таблице:

t_i	C_{t_i}	$ПV(C_{t_i})$	$\frac{ПV(C_{t_i})}{P}$	$t_i \cdot \frac{ПV(C_{t_i})}{P}$
1,0	100	90,70295	0,17271	0,17271
1,5	120	103,66051	0,19738	0,29607
2,0	130	106,95132	0,20365	0,40730
3,0	300	223,86462	0,42626	1,27878
Σ	–	**525,17940 (P)**	**1,00000**	**2,15486**

Таким образом, дюрация Маколея финансового инструмента равна 2,155 года.
Тогда модифицированная дюрация находится следующим образом:

$$D_{мод} = \frac{D}{1 + \frac{0,1}{2}} = \frac{2,155}{1,05} = 2,052 \text{ года.}$$

Если требуемая доходность увеличится на 10 базисных пунктов, то

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{мод} \cdot r = -2,052 \cdot 0,001 = -0,00205,$$

т. е. цена финансового инструмента упадет на 0,2 %.

Если же требуемая доходность мгновенно упадет на 200 базисных пунктов, то цена финансового инструмента вырастет приблизительно на 4,104 %, так как

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -2,052 \cdot (-0,02) = 0,04104.$$

Точные значения относительного изменения цены финансового инструмента в этих двух случаях соответственно равны -0,002049 и 0,04222.

Дюрацию обыкновенной ренты с полугодовыми платежами можно найти по формуле:

$$D = \frac{1+\frac{r}{2}}{r} - \frac{n}{2}\frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^n - 1}, \tag{1.35}$$

где r – требуемая доходность (при начислении процентов дважды в год);

n – число платежей ренты.

В частности, дюрация бессрочной ренты определяется равенством

$$D = \frac{1+\frac{r}{2}}{r}. \tag{1.36}$$

Дюрация Маколея облигации с полугодовыми купонами, когда до ее погашения остается в точности n полугодовых периодов, может быть найдена по формуле

$$D = \frac{1+\frac{r}{2}}{r}\cdot H + \frac{n}{2}\left(\frac{r-f}{r}\right)(1-H), \tag{1.37}$$

где r – требуемая доходность при начислении процентов дважды в год;

f – купонная ставка облигации;

H – отношение приведенной стоимости ренты из купонных платежей к цене облигации.

Пример 1.35. Дана 7 %-ная облигация с полугодовыми купонами, когда до ее погашения остается 20 лет, а требуемая доходность – 10 %.

В данном случае r = 0,1, f = 0,07, n = 40, q = 3,50 долл.

Приведенная стоимость ренты из полугодовых купонных платежей может быть найдена следующим образом:

$$\frac{q\cdot 2}{r}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^n}\right] = \frac{7}{0,1}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{0,1}{2}\right)^{40}}\right] = 60,05680.$$

Цена облигации

$$P = \frac{q\cdot 2}{r}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^n}\right] + \frac{A}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^n} = \frac{7}{0,1}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{0,1}{2}\right)^{40}}\right] + \frac{100}{\left(1+\frac{0,1}{2}\right)^{40}} = 74,26137.$$

Так как

$$H = \frac{60,05680}{74,26137} = 0,80872,$$

то

$$D = \frac{1,05}{0,1} \cdot 0,80872 + 20 \cdot \frac{0,03}{0,1}(1 - 0,80872) = 9,63924 \text{ года},$$

$$D_{мод} = \frac{D}{1 + \frac{r}{2}} = \frac{9,63924}{1,05} = 9,18023 \text{ года}.$$

Для расчета модифицированной дюрации любого финансового инструмента с заданным потоком платежей можно использовать следующую приближенную формулу:

$$D_{мод} \approx \frac{V(r - \Delta y) - V(r + \Delta y)}{2V(r) \cdot \Delta y}, \tag{1.38}$$

где r — требуемая доходность при начислении процентов дважды в год;
Δy — выбранное изменение требуемой доходности;
$V(r)$, $V(r - \Delta y)$, $V(r + \Delta y)$ — цены финансового инструмента при требуемой доходности, равной r, $r - \Delta y$, $r + \Delta y$ соответственно.

Пример 1.36. Рассмотрим облигацию из примера 1.35. Точное значение модифицированной дюрации этой облигации 9,18023 года. Найдем модифицированную дюрацию с помощью приближенной формулы (1.38) при Δy = 20 базисных пунктов.

Так как

$$V(0,1) = 74,26137;$$

$$V(0,098) = \frac{7}{0,098}\left[1 - \frac{1}{(1,049)^{40}}\right] + \frac{100}{(1,049)^{40}} = 75,64469;$$

$$V(0,102) = \frac{7}{0,102}\left[1 - \frac{1}{(1,051)^{40}}\right] + \frac{100}{(1,051)^{40}} = 72,91729,$$

то

$$D_{мод} = \frac{75,64469 - 72,91729}{2 \cdot 74,26137 \cdot 0,002} = 9,18175 \text{ года}.$$

Основные утверждения о дюрации Маколея *для купонных облигаций с полугодовыми купонами, когда до очередного купонного платежа остается 6 месяцев:*

1. Дюрация любой купонной облигации не превышает срока до ее погашения, а дюрация облигации с нулевым купоном всегда совпадает со сроком до ее погашения.

2. Если купонная ставка облигации отлична от нуля, то чем больше требуемая доходность, тем меньше дюрация.

3. Если до погашения облигации остается более одного купонного периода, то чем выше купонная ставка при неизменной требуемой доходности, тем меньше дюрация.

4. Чем меньше времени остается до погашения облигации при прочих неизменных факторах, тем меньше дюрация (за исключением долгосрочных облигаций, продающихся с дисконтом).

1.14. Модифицированная дюрация портфеля облигаций

Модифицированной дюрацией портфеля облигаций называют взвешенную по стоимости сумму модифицированных дюраций облигаций, входящих в этот портфель, т. е.

$$D_{П}^{мод} = \sum_{i=1}^{k} D_{i}^{мод} w_i, \qquad (1.39)$$

где $D_{П}^{мод}$ — модифицированная дюрация портфеля;

$D_{i}^{мод}$ — модифицированная дюрация i-й облигации, $i = 1, 2, \ldots, k$;

k — число облигаций в портфеле;

w_i — отношение рыночной стоимости i-й облигации к рыночной стоимости портфеля, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Основное свойство модифицированной дюрации портфеля облигаций: если требуемые доходности всех облигаций портфеля изменяются на одну и ту же достаточно малую величину, имеет место следующее приближенное равенство:

$$\frac{\Delta П}{П} \approx -D_{П}^{мод} \cdot \Delta r, \qquad (1.40)$$

где $\frac{\Delta П}{П}$ — относительное изменение цены портфеля при изменении требуемой доходности на величину Δr;

$D_{П}^{мод}$ — модифицированная дюрация портфеля.

Пример 1.37. Рассмотрим портфель, состоящий из трех облигаций с полугодовыми купонами при требуемой доходности 10 % со следующими данными:

Облигация	Номинал, долл.	Рыночная стоимость, долл.	Модифицированная дюрация, лет
10%-ная, 5-летняя	4 000 000	4 000 000	3,861
8%-ная, 15-летняя	5 000 000	4 231 375	8,047
14%-ная, 30-летняя	1 000 000	1 378 586	9,168

В данном случае начальная стоимость портфеля П = 9 609 961 долл. Тогда

$$w_1 = \frac{4\,000\,000}{9\,609\,961} = 0,416235;$$

$$w_2 = \frac{4\,231\,375}{9\,609\,961} = 0,440311;$$

$$w_3 = \frac{1\,378\,586}{9\,609\,961} = 0,143454.$$

Следовательно, модифицированная дюрация портфеля облигаций составляет

$$D_{П}^{мод} = 0,416235 \cdot 3,861 + 0,440311 \cdot 8,047 + 0,143454 \cdot 9,168 = 6,465 \text{ года.}$$

Если требуемые доходности мгновенно увеличатся на 60 базисных пунктов, то

$$\frac{\Delta П}{П} \approx -6,465 \cdot 0,006 = -0,0388,$$

т. е. цена портфеля упадет на 3,88 %.

Точное изменение цены портфеля равно -0,0376, т. е. -3,76 %.

Говорят, что инвестор занимает длинную позицию (long position) на рынке облигаций, если он купил некоторую облигацию на этом рынке.

Если же инвестор взял облигацию взаймы у дилера и продал ее на рынке, то говорят, что на рынке облигаций он занимает короткую позицию (short position). Инвестор, занимающий короткую позицию, обязан в определенный момент времени в будущем вернуть облигацию дилеру и выплатить компенсацию за недополученные купонные платежи. Рассмотрим на примере, как определить модифицированную дюрацию портфеля, состоящего из длинных и коротких позиций на рынке облигаций.

Пример 1.38. Портфель состоит из двух позиций: длинной позиции в размере 100 млн долл. по двухлетней облигации ценой 101 долл. с модифицированной дюрацией 1,7 и короткой позиции в размере 50 млн долл. по 5-летней облигации ценой 99 долл. с модифицированной дюрацией 4,1. Определим модифицированную дюрацию этого портфеля.

Исходная стоимость портфеля может быть найдена следующим образом:

$$\frac{100\,000\,000}{100} \cdot 101 - \frac{50\,000\,000}{100} \cdot 99 = 51\,500\,000.$$

Тогда

$$w_1 = \frac{101\,000\,000}{51\,500\,000} = 1,961165,\ w_2 = -\frac{49\,500\,000}{51\,500\,000} = -0,961165,$$

а модифицированная дюрация портфеля равна

$$1,961165 \cdot 1,7 - 0,961165 \cdot 4,1 = -0,607.$$

1.15. Приложения дюрации

1.15.1. Обмен облигаций

Предположим, что инвестор рассматривает вопрос об обмене облигации X стоимостью V_X с модифицированной дюрацией $D_X^{мод}$ на облигацию Y с модифицированной дюрацией $D_Y^{мод}$ при цене P_Y (на номинал 100 долл.).

Выясним, каким должен быть номинал облигации Y, чтобы обмен облигации X на облигацию Y не увеличивал подверженность инвестора процентному риску.

Если требуемая доходность облигации X изменится на величину Δr, то соответствующее изменение стоимости этой облигации определяется равенством

$$\Delta V_X \approx -D_X^{мод} \cdot V_X \cdot \Delta r. \tag{1.41}$$

Можно предположить, что на основе статистических исследований установлено, что при изменении требуемой доходности облигации X на величину Δr требуемая доходность облигации Y изменяется на величину βΔr.

Тогда соответствующее изменение стоимости облигации Y можно найти по формуле:

$$\Delta V_Y = -D_Y^{мод} \cdot \frac{A_Y}{100} \cdot P_Y \cdot \beta \cdot \Delta r, \tag{1.42}$$

где A_Y – номинал облигации Y.

Обмен облигаций не будет увеличивать подверженность процентному риску, если при любом Δr

$$\Delta V_X = \Delta V_Y,$$

т. е.

$$-D_X^{мод} \cdot V_X \cdot \Delta r = -D_Y^{мод} \frac{A_Y}{100} \cdot P_Y \cdot \beta \cdot \Delta r.$$

Следовательно,

$$A_Y = \frac{D_X^{мод}}{D_Y^{мод}} \frac{V_X}{\beta \cdot P_Y} \cdot 100. \tag{1.43}$$

Равенство (1.43) показывает, каким должен быть номинал облигации Y, чтобы при обмене облигации X на облигацию Y не увеличивался процентный риск.

Пример 1.39. Инвестор рассматривает вопрос об обмене облигации X стоимостью 8 млн долл. на облигацию Y при цене P_Y = 96 долл. Модифицированные дюрации облигаций X и Y равны 5 и 4 соответственно, а коэффициент β равен 1,6.

Чтобы при обмене не менялась подверженность процентному риску, номинал облигации Y должен удовлетворять равенству:

$$A_Y = \frac{5}{4} \cdot \frac{8\,000\,000}{1,6 \cdot 96} \cdot 100 = 6\,510\,417.$$

Таким образом, искомый номинал облигаций Y должен равняться 6 510 417.

1.15.2. Иммунизация портфеля облигаций

Предположим, что в данный (нулевой) момент времени инвестор владеет портфелем облигаций, который он собирается продать через T лет.

Если в данный момент времени все рыночные доходности одинаковы, т. е. кривая доходности имеет ровный вид, то будущая стоимость инвестиций $П^A(T)$ через T лет определяется следующим образом:

$$П^A(T) = П(r) \cdot \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2T},$$

где r – рыночная доходность,

П(r) – стоимость портфеля при рыночной доходности, равной r.

Будущую стоимость $П^A(T)$ будем называть целевой накопленной стоимостью портфеля облигаций.

Однако если между данным моментом времени и первым процентным платежом рыночные доходности изменяются на одну и ту же величину Δr, а в дальнейшем уже меняться не будут, то будущая стоимость инвестиции $П^Ф(T)$ через T лет удовлетворяет равенству

$$П^Ф(T) = П(r + \Delta r)\left(1 + \frac{r + \Delta r}{2}\right)^{2T}.$$

Будущую стоимость $П^Ф(T)$ будем называть фактической накопленной стоимостью портфеля облигаций.

Фактическая накопленная стоимость портфеля облигаций может оказаться выше или ниже целевой накопленной стоимости этого портфеля. Однако если временной горизонт инвестора T совпадает с дюрацией Маколея портфеля облигаций, то фактическая накопленная стоимость портфеля никогда не будет меньше его целевой накопленной стоимости.

Пример 1.40. Рассмотрим портфель из двух облигаций с полугодовыми купонами, когда все рыночные доходности равны 6 %. Основные данные об облигациях портфеля приведены ниже в таблице:

Облигация	Номинал	Стоимость	Дюрация Маколея
6%-ная, 4-летняя	1000	1000,00	3,615
8%-ная, 5-летняя	2000	2170,60	4,254

Дюрация Маколея данного портфеля облигаций находится следующим образом:

$$D(\Pi) = 3,615 \cdot \frac{1000}{3170,60} + 4,254 \cdot \frac{2170,60}{3170,60} = 4,053.$$

Целевая накопленная стоимость портфеля через 4,053 года будет равна:

$$3170,60 \cdot (1 + 0,03)^{4,053 \cdot 2} = 4029,02.$$

В таблице указаны фактические накопленные стоимости через 4,053 года при различных изменениях рыночных доходностей:

Изменение рыночной доходности Δr, %	Фактическая накопленная стоимость $\Pi^{\Phi}(T)$, где $T = D(\Pi)$
–2	4030,23
–1	4029,32
0	4029,02 = $\Pi^{A}(T)$
1	4029,35
2	4030,28

Стратегия иммунизации портфеля облигаций рассчитана на защиту портфеля облигаций от процентного риска. Эта стратегия предполагает следующие действия. В начальный момент времени формируется портфель облигаций так, чтобы дюрация Маколея этого портфеля совпадала с временным горизонтом инвестора. С годами портфель периодически пересматривается так, чтобы каждый раз дюрация Маколея совпадала с временным горизонтом инвестора.

1.16. Выпуклость финансовых инструментов

Рассмотрим финансовый инструмент со следующим потоком платежей:

Срок, лет	t_1	t_2	…	t_k
Платеж, долл.	C_{t_1}	C_{t_2}	…	C_{t_k}

Если требуемая доходность при начислении процентов дважды в год равна r, то выпуклостью (convexity) данного финансового инструмента называют число

$$C = \frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^{k} t_i \left(t_i + 0,5\right) \frac{ПV\left(C_{t_i}\right)}{P}, \qquad (1.44)$$

где $ПV\left(C_{t_i}\right) = \dfrac{C_{t_i}}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t_i}}$ — приведенная стоимость i-го платежа,

$i = 1, 2, \ldots, k;$

$P = \sum_{i=1}^{k} ПV\left(C_{t_i}\right)$ — цена финансового инструмента.

Имеет место следующее равенство:

$$\frac{d^2P}{dr^2} = C \cdot P,$$

т. е. производная второго порядка цены финансового инструмента по требуемой доходности равна произведению выпуклости этого финансового инструмента на его цену.

Основное свойство выпуклости

При малых изменениях требуемой доходности имеет место следующее приближенное равенство:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D_{мод} \cdot \Delta r + \frac{C}{2}(\Delta r)^2, \qquad (1.45)$$

где $\frac{\Delta P}{P}$ — относительное изменение цены финансового инструмента, соответствующее изменению требуемой доходности на величину Δr;

$D_{мод}$ — модифицированная дюрация финансового инструмента;

C — выпуклость финансового инструмента.

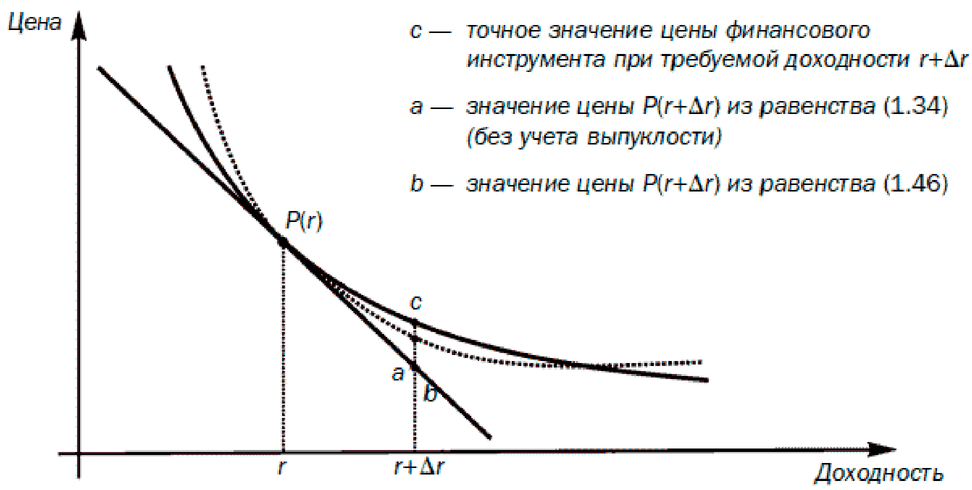


Рис. 1.12. Геометрический смысл основного свойства выпуклости

Равенство (1.45) можно переписать в следующем виде:

$$P(r+\Delta r) \approx P(r) - P(r) \cdot D_{мод} \cdot \Delta r + \frac{C}{2} P(r)(\Delta r)^2. \qquad (1.46)$$

Геометрический смысл этого равенства проиллюстрирован рис. 1.12.

Пример 1.41. Финансовый инструмент характеризуется следующим потоком платежей:

Срок, лет	1,0	1,5	2,0	3,0
Платеж, долл.	100	120	130	300

Расчет выпуклости данного финансового инструмента при требуемой доходности 10 % приведен в таблице:

t_i	C_{t_i}	$ПV(C_{t_i})$	$t_i \cdot \dfrac{ПV(C_{t_i})}{P}$	$t_i(t_i+0,5)\dfrac{ПV(C_{t_i})}{P}$
1,0	100	90,70295	0,17271	0,25907
1,5	120	103,66051	0,29607	0,59214
2,0	130	106,95132	0,40730	1,01825
3,0	300	223,86462	1,27878	4,47572
Σ	—	525,17940 (P)	2,15486 (D)	6,34518

Модифицированная дюрация финансового инструмента

$$D_{мод} = \frac{2,15486}{1,05} = 2,052 \text{ года},$$

а его выпуклость

$$C = \frac{6,34518}{(1,05)^2} = 5,755 \ (\text{года})^2.$$

Если требуемая доходность в начальный момент времени увеличится на 50 базисных пунктов, то цена финансового инструмента упадет приблизительно на 1,0188 %, так как

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -2,052 \cdot 0,005 + \frac{5,755}{2}(0,005)^2 = -0,010188.$$

Заметим, что относительное изменение цены финансового инструмента, найденное приближенно, без учета выпуклости, равно -0,01026, а точное значение этого изменения равно -0,010189.

Если же требуемая доходность в начальный момент времени упадет на 200 базисных пунктов, то цена финансового инструмента вырастет приблизительно на 4,219 %, так как

$$\frac{\Delta P}{P} \approx 2,052 \cdot 0,02 + \frac{5,755}{2}(0,02)^2 = 0,042191,$$

в то время как относительное изменение цены инструмента, найденное приближенно, без учета выпуклости, равно 0,04104, а точное значение этого изменения равно 0,04222.

Основные утверждения о выпуклости финансовых инструментов

1. Произведение начальной цены финансового инструмента на его модифицированную дюрацию называют долларовой дюрацией (dollar duration) этого инструмента. Производная долларовой дюрации финансового инструмента по требуемой доходности равна произведению выпуклости этого финансового инструмента на его цену с обратным знаком, т. е.

$$\frac{d\left(P \cdot D_{мод}\right)}{dr} = -C \cdot P.$$

Это означает, что выпуклость финансового инструмента является мерой скорости изменения долларовой дюрации этого инструмента.

2. При уменьшении требуемой доходности растут модифицированная дюрация и выпуклость финансового инструмента, причем

$$C > D_{мод}^2 + \frac{1}{1+\frac{r}{2}} \cdot \frac{D_{мод}}{2}.$$

3. Если финансовый инструмент имеет одинаковые модифицированные дюрации, то при достаточно малом изменении требуемой доходности у финансового инструмента с большей выпуклостью относительный рост цены больше, а относительное снижение цены – меньше. Это означает, что при одной и той же модифицированной дюрации для инвесторов более привлекателен финансовый инструмент с большей выпуклостью.

4. При заданных требуемой доходности и сроке до погашения купонной облигации: чем меньше купонная ставка, тем больше выпуклость.

Для оценки выпуклости любого финансового инструмента можно использовать следующую приближенную формулу:

$$C \approx \frac{V(r+\Delta y) + V(r-\Delta y) - 2V(r)}{V(r) \cdot (\Delta y)^2}, \tag{1.47}$$

где r — требуемая доходность при начислении процентов дважды в год;
Δy — выбранное положительное изменение требуемой доходности;
$V(r)$, $V(r-\Delta y)$, $V(r+\Delta y)$ — стоимости финансового инструмента при требуемых доходностях r, $r-\Delta y$, $r+\Delta y$ соответственно.

Пример 1.42. Рассмотрим 7 %-ную облигацию с полугодовыми купонами, когда до ее погашения остается 3 года, а требуемая доходность равна 10 %.

Оценим выпуклость данной облигации с помощью приближенной формулы (1.47), считая, что номинал облигации равен 100 долл. Изменение требуемой доходности выберем в 20 базисных пунктов ($\Delta y = 0{,}002$). Тогда

$$V(0,1) = 92,38646;$$

$$V(0,1 - \Delta y) = 92,87125;$$

$$V(0,1 + \Delta y) = 91,90480.$$

По формуле (1.47)

$$C = \frac{92,87125 + 91,90480 - 2 \cdot 92,38646}{92,38646 \cdot (0,002)^2} = 8,470 \text{ (года)}^2.$$

Расчет точного значения выпуклости данной облигации приведен в таблице:

t_i	C_{t_i}	$ПV(C_{t_i})$	$t_i(t_i + 0,5)\dfrac{ПV(C_{t_i})}{P}$
0,5	3,5	3,333333	0,018040
1,0	3,5	3,174603	0,051543
1,5	3,5	3,023432	0,098178
2,0	3,5	2,879459	0,155838
2,5	3,5	2,742342	0,222625
3,0	103,5	77,233294	8,777797
Σ	—	92,386463 (P)	9,324021

Значит,

$$C = \frac{9,324021}{(1,05)^2} = 8,457 \text{ (года)}^2.$$

Таким образом, приближенная формула (1.47) дает достаточно хорошую оценку выпуклости облигации.

1.17. Выпуклость портфеля облигаций

Выпуклостью портфеля облигаций называют взвешенную по стоимости сумму выпуклостей облигаций, из которых составлен этот портфель, т. е. по определению

$$C_П = \sum_{i=1}^{k} w_i C_i, \tag{1.48}$$

где $C_П$ — выпуклость портфеля облигаций;
C_i — выпуклость i-й облигации портфеля, $i = 1, 2, \ldots, k$;
w_i — отношение рыночной стоимости i-й облигации к рыночной стоимости всего портфеля, $i = 1, 2, \ldots, k$;
k — количество облигаций в портфеле.

Основное свойство выпуклости

Если требуемые доходности облигаций портфеля изменяются на одну и ту же величину, то имеет место следующее приближенное равенство:

$$\frac{\Delta П}{П} \approx -D_П^{мод} \cdot \Delta r + \frac{C_П}{2}(\Delta r)^2, \tag{1.49}$$

где $\frac{\Delta П}{П}$ — относительное изменение цены портфеля облигаций, соответствующее изменению требуемых доходностей на величину Δr;

$D_П^{мод}$ — модифицированная дюрация портфеля облигаций;
$C_П$ — выпуклость портфеля облигаций.

Заметим, что равенство (1.49) соблюдается тем точнее, чем меньше Δr (по абсолютной величине).

На основе равенства (1.49) можно сделать следующий вывод о роли выпуклости портфеля облигаций как меры процентного риска: если портфели облигаций имеют одну и ту же модифицированную дюрацию, то у портфеля с большей выпуклостью относительный рост цены больше, а относительное снижение цены – меньше.

Однако это утверждение справедливо лишь в том случае, когда требуемые доходности облигаций портфеля изменяются на одну и ту же величину.

Пример 1.43 [5]. Даны три облигации с полугодовыми купонами, основные показатели которых приведены в таблице:

Облигация	Купонная ставка, %	Срок до погашения, лет	Номинал, долл.	Доходность к погашению, %	Модифицированная дюрация, лет	Выпуклость
X	8,50	5	100	8,50	4,00544	19,8164
Y	9,50	20	100	9,50	8,88151	124,1702
Z	9,25	10	100	9,25	6,43409	55,4506

Из данных облигаций сформируем два портфеля: портфель A (50,2 % – облигация X и 49,8 % – облигация Y), портфель B (облигация Z).

Модифицированная дюрация и выпуклость портфеля A находятся следующим образом:

$$D_A = 0,502 \cdot 4,00544 + 0,498 \cdot 8,88151 = 6,434,$$
$$C_A = 0,502 \cdot 19,8164 + 0,498 \cdot 124,1702 = 71,7846.$$

Таким образом, дюрации портфелей A и B одинаковы, а выпуклость портфеля A выше выпуклости портфеля B.

Относительные изменения стоимостей портфелей A и B при различных изменениях требуемых доходностей облигаций на одну и ту же величину приведены в следующей таблице:

Изменение требуемой доходности, б. п.*	Относительное изменение стоимости портфеля, %	
	A	B
–200	14,462	14,053
–100	6,812	6,721
–50	3,309	3,287
–25	1,631	1,626
25	–1,586	–1,591
50	–3,129	–3,149
100	–6,092	–6,166
200	–11,565	–11,827

*б. п. — базисный пункт.

Таким образом, при различных параллельных сдвигах кривой доходностей относительное изменение стоимости портфеля A всегда больше относительного изменения стоимости портфеля B.

При непараллельных сдвигах кривой доходностей (yield curve twist), т. е. когда требуемые доходности изменяются по-разному, ситуация может оказаться противоположной. В частности, если требуемые доходности облигаций X, Y и Z уменьшаются на 75, 25 и 50 б. п. соответственно, то относительные изменения стоимостей портфелей A и B будут равны 2,662 и 3,287 %, т. е. относительный рост стоимости портфеля A окажется ниже относительного роста стоимости портфеля B.

Основные характеристики портфеля облигаций – средневзвешенная (или внутренняя) доходность, модифицированная дюрация и выпуклость – используются для сравнения портфеля облигаций с точки зрения их инвестиционного качества.

Однако эти характеристики не всегда дают возможность сделать правильный вывод.

Пример 1.44 [5]. Рассмотрим портфели A и B из предыдущего примера 1.43. Основные характеристики этих портфелей приведены в таблице:

Портфель	Средневзвешенная доходность, %	Мод. дюрация	Выпуклость
A	8,998	6,434	71,7846
B	9,25	6,434	55,4506

Для сравнения портфелей A и B воспользуемся показателем, называемым годовой реализуемой доходностью за 6 месяцев.

В данном случае годовая реализуемая доходность за 6 месяцев портфелей A и B может быть найдена по формуле:

$$R = \left(\frac{V + Q - V_0}{V_0}\right) \cdot 2,$$

где V_0 — начальная стоимость портфеля;
V — стоимость портфеля через 6 месяцев;
Q — проценты, выплаченные за 6 месяцев.

В таблице показаны разности годовых реализованных доходностей портфелей A и B (R_B – R_A) при различных сдвигах кривой доходностей:

Изменение доходности Δy, б. п.*	Параллельный сдвиг, % $\Delta r_x = \Delta y$ $\Delta r_y = \Delta y$ $\Delta r_z = \Delta y$	Непараллельный сдвиг (I), % $\Delta r_x = \Delta y + 25$ б. п. $\Delta r_y = \Delta y - 25$ б. п. $\Delta r_z = \Delta y$	Непараллельный сдвиг (II), % $\Delta r_x = \Delta y - 25$ б. п. $\Delta r_y = \Delta y + 25$ б. п. $\Delta r_z = \Delta y$
–300	–1,88	–4,26	0,36
–250	–1,15	–3,30	0,89
–150	–0,20	–1,97	1,47
–100	0,06	–1,54	1,57
–50	0,21	–1,24	1,57
–25	0,24	–1,14	1,53
0	0,25	–1,06	1,48
25	0,24	–1,01	1,41
50	0,21	–0,98	1,32
100	0,09	–0,98	1,09
150	–0,08	–1,05	0,81
250	–0,58	–1,36	0,14
300	–0,88	–1,58	–0,24
350	–1,21	–1,84	–0,64

* б. п. — базисный пункт.

Таким образом, инвестиционная эффективность не определяется основными характеристиками портфелей A и B, а зависит от того, какие изменения требуемых доходностей происходят на рынке.

1.18. Множества. Операции над множествами

Множество (set) – это совокупность некоторых объектов. Объекты, из которых состоит множество A, называют элементами этого множества.

Если a является элементом множества A, то пишут $a \in A$.

Задать множество можно, либо перечислив все его элементы, либо указав характеристическое свойство, которому должны удовлетворять все элементы этого множества.

Например, запись $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ означает, что множество A состоит из элементов a_1, a_2, a_3, a_4.

Множество B всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 - 2x + 3 \le 0$, можно записать следующим образом:

$$B = \{x \in R \mid x^2 - 2x + 3 \le 0\},$$

где R – множество всех действительных чисел.

Множество A называют подмножеством (subset) множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B (рис. 1.13).

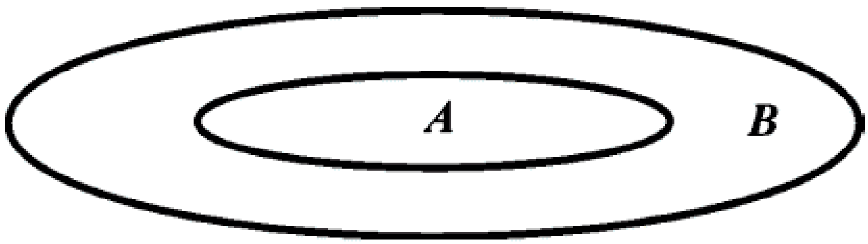


Рис. 1.13. Подмножество

Если множество A является подмножеством множества B, то пишут $A \subset B$. Например, множество $A = \{1, 2, 3\}$ является подмножеством множества $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Множество Z всех целых чисел является подмножеством множества R всех действительных чисел.

Разностью A\B двух множеств A и B называют множество всех элементов A, не попавших в множество B (рис. 1.14).

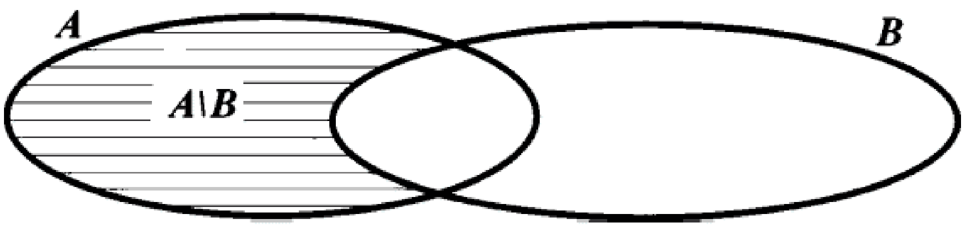


Рис. 1.14. Разность множеств

Если $B \subset A$, то разность $A \backslash B$ называют дополнением множества B до множества A. Например, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, а $B = \{3, 4, 5, 6\}$, то $A \backslash B = = \{1, 2\}$.

Пересечением двух множеств A и B называют множество, обозначаемое $A \cap B$, все элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B (рис. 1.15).

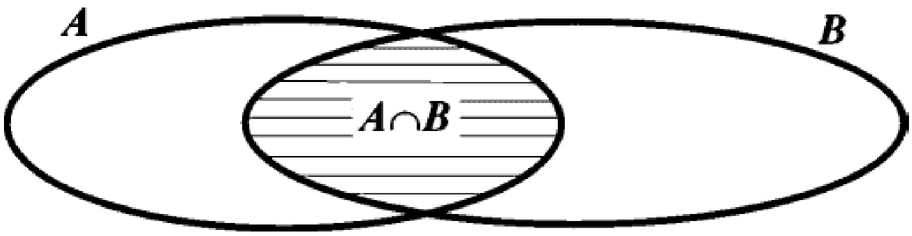


Рис. 1.15. Пересечение множеств

Например, если $A = \{1, 2, 3\}$, а $B = \{1, 3, 4, 5\}$, то $A \cap B = \{1, 3\}$.

Если множества A и B не содержат общих элементов, то говорят, что они не пересекаются, и пишут $A \cap B = \varnothing$ ($\varnothing$ – символ пустого множества).

Аналогично можно определить пересечение трех, четырех и более множеств. В частности, множество $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ является совокупностью всех элементов, принадлежащих каждому из множеств $A_1, A_2 \ldots, A_i \ldots$.

Объединением двух множеств A и B называют множество, обозначаемое $A \cup B$, все элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A и B (рис. 1.16).

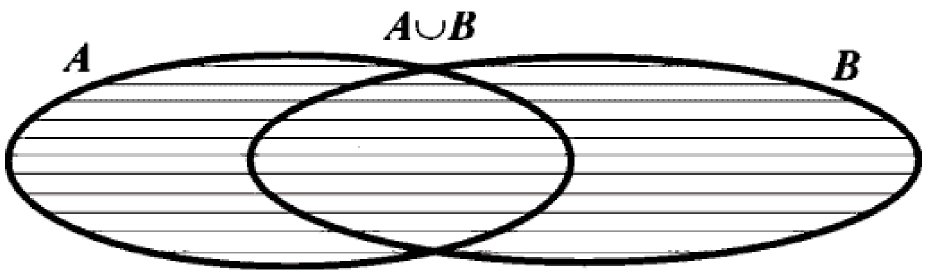


Рис. 1.16. Объединение множеств

Например, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, а $B = \{3, 4, 5, 6\}$, то $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Точно так же определяется объединение трех, четырех и более множеств. В частности, множество $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ – это совокупность всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A_1, $A_2 \ldots, A_i \ldots$.

1.19. Вероятностное пространство

Пусть Ω – некоторое множество. В дальнейшем элементы множества Ω будем называть элементарными событиями, а само множество Ω – пространством элементарных событий.

Набор β подмножеств множества Ω называется σ-алгеброй случайных событий при выполнении следующих трех условий:

1. $\Omega \in \beta$.

2. Если $A \in \beta$, то и $\overline{A} \in \beta$ ($\overline{A}$ — дополнение множества A до всего пространства Ω).

3. Если множества $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ принадлежат β, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \beta$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \beta$.

Если пространство элементарных событий конечно, т. е. состоит из конечного числа элементарных событий, то в качестве σ-алгебры случайных событий обычно рассматривают набор всех подмножеств этого пространства.

Пример 1.45. Бросается игральная кость. Пространство элементарных событий состоит из 6 событий: выпадение любого целого числа от 1 до 6. Выпадение четного числа является случайным событием, так как состоит из трех элементарных событий: выпадение чисел 2, 4 или 6. Выпадение числа, меньшего 3, также является случайным событием.

Говорят, что на σ-алгебре случайных событий β определена вероятностная мера P, если каждому случайному событию A ∈ β поставлено в соответствие неотрицательное число P(A) так, что выполняются следующие условия:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Если $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ последовательность попарно непересекающихся случайных событий, то $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Если пространство элементарных событий конечно, т. е. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, то на σ-алгебре случайных событий вероятностную меру можно задать следующим образом:

1. Элементарному событию ω_i поставить в соответствие неотрицательное число p_i, $i = 1, 2, \ldots n$, так, чтобы $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

2. Для случайного события A положить $P(A) = \sum_{i, \omega_i \in A} p_i$ (суммирование производится по тем номерам i, для которых $\omega_i \in A$).

Пример 1.46. Бросаются две одинаковые игральные кости. В данном случае элементарное событие характеризуется следующей парой чисел: числом, выпавшим на первой кости, и числом, выпавшим на второй кости, а пространство элементарных событий состоит из 36 событий:

(1, 1), (1, 2), ..., (1, 6)
(2, 1), (2, 2), ..., (2, 6)
....
(6, 1), (6, 2), ..., (6, 6).

Естественно считать, что вероятность каждого элементарного события равна $\frac{1}{36}$. Тогда вероятность того, что на двух костях в сумме окажется 10, равна $3 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$, так как это событие состоит из трех элементарных событий: (4, 6), (5, 5), (6, 4).

Основные свойства вероятностной меры

1. Для любого случайного события A

$0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1.$

2. Если A и B — случайные события и $A \subset B$, то

$\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B).$

3. Если A — случайное событие, то

$\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A).$

4. Для любых двух случайных событий A и B имеет место равенство:

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$

5. Если события A и B несовместны, т. е. $A \cap B = \varnothing$, то

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$

Случайные события A и B называются независимыми, если:

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$

Если события A и B независимы, то события $\overline{A}$ и B также независимы.

Вероятностное пространство определяется тройкой: пространством элементарных событий Ω, σ-алгеброй случайных событий β и вероятностной мерой P на σ-алгебре случайных событий.

Функция $\xi = \xi(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий Ω, называется **случайной величиной** (*random variable*), если для любого действительного числа x множество $\{\xi < x\} = \{\omega \in \Omega \,|\, \xi(\omega) < x\}$ является случайным событием.

Если $\xi = \xi(\omega)$ является случайной величиной, то $F_\xi(x) = \mathrm{P}\{\xi < x\}$, $x \in R$, называется **функцией распределения [вероятностей]** (*probability function*) случайной величины ξ.

Основные свойства функции распределения случайной величины

1. $\mathrm{P}\{\xi > x\} = 1 - F_\xi(x) - \mathrm{P}\{\xi = x\}$.
2. $\mathrm{P}\{x_1 \le \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$.
3. $F_\xi(x)$ — неубывающая функция, причем $0 \le F_\xi(x) \le 1$, $x \in R$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$.
5. $\lim\limits_{x\to t-0} F_\xi(x) = F_\xi(t)$, $t \in \mathrm{R}$.

Пример 1.47. Функция $F_\xi(x)$ является функцией распределения вероятностей случайной величины ξ. Найдем функцию распределения случайной величины

$$\eta = a\xi + b,$$

где a и b — некоторые числа, $a \ne 0$.

Если $a > 0$, то

$$F_\eta(x) = \mathrm{P}\{\eta < x\} = \mathrm{P}\{a\xi + b < x\} = \mathrm{P}\{a\xi < x - b\} =$$
$$= \mathrm{P}\left\{\xi < \frac{x-b}{a}\right\} = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Если же $a < 0$, то

$$F_\eta(x) = \mathrm{P}\{\eta < x\} = \mathrm{P}\{a\xi + b < x\} = \mathrm{P}\{a\xi < x - b\} = \mathrm{P}\left\{\xi > \frac{x-b}{a}\right\} =$$
$$= 1 - F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) - \mathrm{P}\left\{\xi = \frac{x-b}{a}\right\}.$$

1.20. Дискретные случайные величины

Случайная величина ξ называется дискретной случайной величиной (discrete random variable), если она принимает лишь конечное или счетное число различных значений.

Чтобы задать дискретную случайную величину, достаточно указать закон распределения вероятностей этой случайной величины в следующем виде:

ξ	X_1	X_2	…	X_i	…
P	P_1	P_2	…	P_i	…

$$(X_1 < X_2 < \ldots < X_i < \ldots),$$

т. е. для каждого возможного значения случайной величины ξ задать вероятность этого значения.

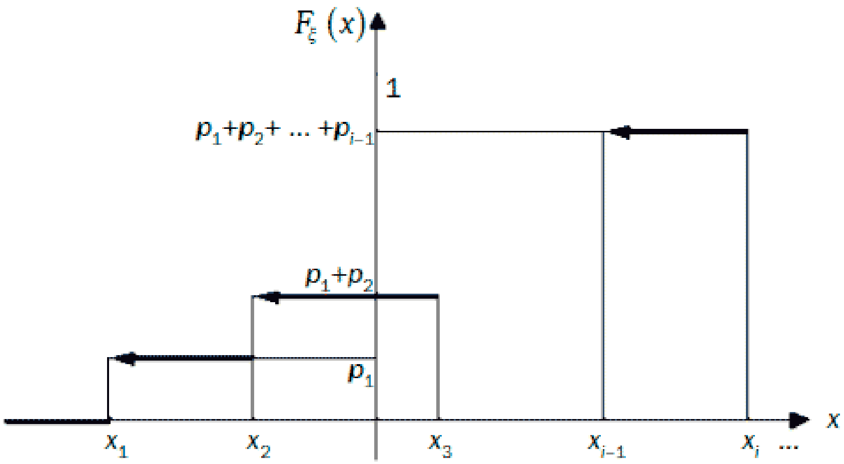


Рис. 1.17. Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины

Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины ξ показана на рис. 1.17.

Основные числовые характеристики дискретной случайной величины ξ определяются следующим образом:

1. **Математическое ожидание** (*mean, expected value*)

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \cdot P_i.$$

2. **Дисперсия** (*variance*)

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} (X_i - E(\xi))^2 \cdot P_i.$$

3. **Стандартное** (среднее квадратическое) отклонение (*standard deviation*)

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}.$$

Свойства математического ожидания и дисперсии

1. $E(a\xi + b) = aE(\xi) + b,$ где a и b — некоторые числа.
2. $E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta).$
3. $D\xi = E(\xi^2) - (E(\xi))^2.$
4. $D(a\xi + b) = a^2 D(\xi),$ где a и b — некоторые числа.

Пример 1.48. Дана 10 %-ная облигация с полугодовыми купонами, продающаяся по номиналу, когда до ее погашения остается 20,5 года. Инвестор считает, что доходность к погашению этой облигации через 6 месяцев может принять следующие значения:

Доходность к погашению через 6 месяцев (ξ), %	11,0	10,5	10,0	9,5	9,0	8,5
Вероятность	0,23	0,16	0,22	0,16	0,10	0,13

Законы распределения вероятностей цены облигации (η) и годовой реализуемой доходности за 6 месяцев (τ) указаны в таблице:

Вероятность	Доходность к погашению (ξ), %	Цена облигации (η), долл.	Реализуемая доходность (τ), %
0,23	11,0	91,98	–6,04
0,16	10,5	95,85	1,70
0,22	10,0	100,00	10,00
0,16	9,5	104,44	18,88
0,10	9,0	109,20	28,40
0,13	8,5	114,31	38,62

Например, если $\xi = 11{,}0$ %, то

$$\eta = \frac{5 \cdot 2}{0,11}\left[1 - \frac{1}{(1,055)^{40}}\right] + \frac{100}{(1,055)^{40}} = 91,98;$$

$$\tau = \frac{91,98 + 5 - 100}{100} \cdot 2 = -0,0604, \text{ т. е. } -6,04\%.$$

Математическое ожидание цены облигации через 6 месяцев и ее дисперсия могут быть найдены следующим образом:

$$\begin{aligned} E(\eta) &= 91,98 \cdot 0,23 + 95,85 \cdot 0,16 + 100 \cdot 0,22 + 104,44 \cdot 0,16 + \\ &+ 109,20 \cdot 0,10 + 114,31 \cdot 0,13 = 100,9821 \text{ долл.}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\eta) &= (91,98 - 100,98)^2 \cdot 0,23 + (95,85 - 100,98)^2 \cdot 0,16 + \\ &+ (100 - 100,98)^2 \cdot 0,22 + (104,44 - 100,98)^2 \cdot 0,16 + \\ &+ (109,20 - 100,98)^2 \cdot 0,10 + (114,31 - 100,98)^2 \cdot 0,13 = 54,82. \end{aligned}$$

Так как $\tau = \dfrac{\eta + 5 - 100}{100} \cdot 2,$

то

$$E(\tau) = \frac{E(\eta) - 95}{100} \cdot 2 = \frac{100,98 - 95}{100} \cdot 2 = 0,1196, \text{ т. е. } 11,96\%;$$

$$D(\tau) = \frac{D(\eta) \cdot 4}{(100)^2} = \frac{54,82 \cdot 4}{(100)^2} = 0,02192;$$

$$\sigma(\tau) = \sqrt{D(\tau)} = 0,1481, \text{ т. е. } 14,81\%.$$

Таким образом, ожидаемое значение реализуемой доходности облигации за 6 месяцев равно 11,96 %, а ее стандартное отклонение составляет 14,81 %.

Закон совместного распределения вероятностей двух случайных величин ξ и η может быть задан следующим образом:

$\xi \backslash \eta$	Y_1	Y_2	…	Y_j	…
X_1	P_{11}	P_{12}	…	P_{1j}	…
X_2	P_{21}	P_{22}	…	P_{2j}	…
…	…	…		…	
X_i	P_{i1}	P_{i2}		P_{ij}	…
…	…	…	…	…	…

P_{ij} – это вероятность того, что случайная величина ξ принимает значение X_i, а случайная величина η – значение Y_j, i = 1, 2, 3…, j = 1, 2, 3…, причем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} = 1.$$

Зная закон совместного распределения вероятностей двух случайных величин, можно найти закон распределения вероятностей каждой из этих случайных величин, так как

$$P(\xi = X_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij},\ i = 1,\ 2,\ 3, \ldots;$$

$$P(\eta = Y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} P_{ij},\ j = 1, 2, 3, \ldots\ .$$

Дискретные случайные величины ξ и η называются независимыми, если

$$P_{ij} = P\{\xi = X_i) \cdot P\{\eta = Y_j),\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \ j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ .$$

Для независимых случайных величин справедливы следующие два равенства:

$$E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta);$$
$$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta).$$

Ковариация (covariance) между двумя дискретными случайными величинами ξ и η определяется равенством

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}_{ij}\left(X_i - \mathrm{E}(\xi)\right)\left(Y_j - \mathrm{E}(\eta)\right).$$

Свойства ковариации

1. $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = \mathrm{E}(\xi \cdot \eta) - \mathrm{E}(\xi) \cdot \mathrm{E}(\eta)$.
2. $\mathrm{D}(\xi + \eta) = \mathrm{D}(\xi) + \mathrm{D}(\eta) + 2\mathrm{Cov}(\xi, \eta)$.
3. $\mathrm{D}(a\xi + b\eta) = a^2\mathrm{D}\xi + b^2\mathrm{D}\eta + 2ab\mathrm{Cov}(\xi, \eta)$.

Корреляция (correlation) между двумя случайными величинами ξ и η определяется следующим образом:

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)}.$$

Случайные величины называются некоррелированными, если корреляция между ними равна 0.

Свойства корреляции

1. $-1 \leqslant \rho(\xi,\eta) \leqslant 1$.
2. $\rho(\xi,\eta)=1 \Leftrightarrow \eta = a\xi + b$, где a и b — числа, причем $a > 0$.
3. $\rho(\xi,\eta)=-1 \Leftrightarrow \eta = a\xi + b$, где a и b — числа, причем $a < 0$.
4. Из независимости случайных величин всегда следует их некоррелированность, но не наоборот.

Пример 1.49. Совместное распределение вероятностей случайных величин ξ и η приведено в таблице:

ξ \ η	-2	-1	3
1	0,10	0,05	0,15
2	0,08	0,16	0,12
–3	0,20	0,10	0,04

Распределение вероятностей случайных величин ξ,η и ξη имеет следующий вид:

ξ	1	2	–3
P	0,30	0,36	0,34

η	–2	–1	3
P	0,38	0,31	0,31

$\xi\eta$	–9	–4	–2	–1	3	6
P	0,04	0,08	0,26	0,05	0,25	0,32

Тогда

$E(\xi) = 1 \cdot 0{,}30 + 2 \cdot 0{,}36 + (-3) \cdot 0{,}34 = 0;$

$E(\eta) = (-2) \cdot 0{,}38 + (-1) \cdot 0{,}31 + 3 \cdot 0{,}31 = -0{,}14;$

$E(\xi\eta) = (-9) \cdot 0{,}04 + (-4) \cdot 0{,}08 + (-2) \cdot 0{,}26 + (-1) \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 0{,}25 + 6 \cdot 0{,}32 = 1{,}42;$

$D(\xi) = 1^2 \cdot 0{,}30 + 2^2 \cdot 0{,}36 + (-3)^2 \cdot 0{,}34 = 4{,}8;$

$D(\eta) = (-2 + 0{,}14)^2 \cdot 0{,}38 + (-1 + 0{,}14)^2 \cdot 0{,}31 + (3 + 0{,}14)^2 \cdot 0{,}31 = 4{,}60;$

$\sigma(\xi) = 2{,}19;$
$\sigma(\eta) = 2{,}14.$

Ковариация и корреляция между случайными величинами ξ и η находятся следующим образом:

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)\cdot E(\eta) = 1,42 - 0 = 1,42;$$

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)} = \frac{1,42}{2,19\cdot 2,14} = 0,30.$$

1.21. Непрерывные случайные величины

Случайная величина ξ называется [абсолютно] непрерывной (continuous random variable), если существует неотрицательная функция $p_\xi(x)$, такая, что

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt, \qquad (1.50)$$

где $F_\xi(x)$ – функция распределения вероятностей случайной величины ξ.

Функция $p_\xi(x)$, удовлетворяющая условию (1.50), называется плотностью распределения вероятностей (probability density function – PDF) случайной величины ξ.

Равенство (1.50) означает, что заштрихованная площадь на рис. 1.18 под графиком плотности распределения равна вероятности того, что случайная величина принимает значение меньше x.

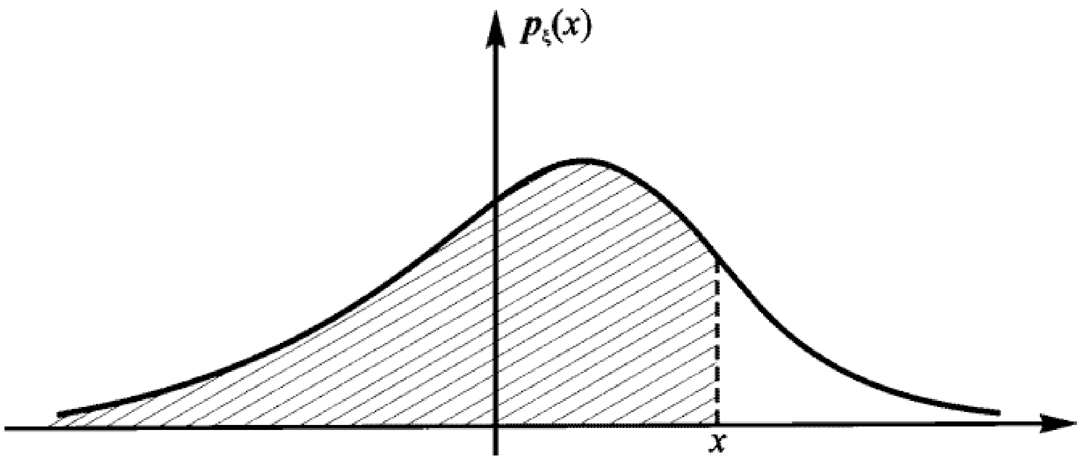


Рис. 1.18. Плотность распределения вероятностей

Свойства непрерывных случайных величин

1. Вероятность того, что непрерывная случайная величина принимает значение между x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$), совпадает с заштрихованной площадью на рис. 1.19.

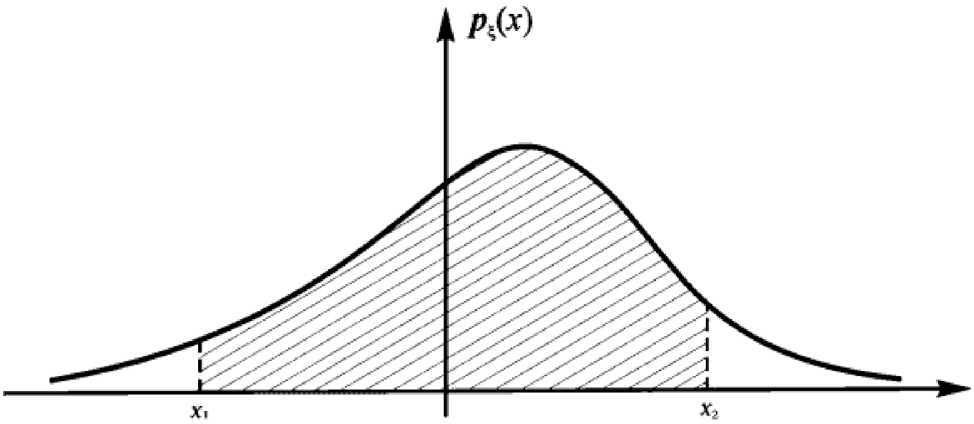


Рис. 1.19

2. Если $p_\xi(x)$ – плотность распределения вероятностей случайной величины, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)\,dx = 1.$$

3. Вероятность того, что непрерывная случайная величина ξ принимает то или иное значение, всегда равна нулю, т. е. $P\{\xi = x\} = 0$.

4. Производная функции распределения вероятностей непрерывной случайной величины равна плотности распределения вероятностей этой случайной величины, т. е.

$$\frac{dF_\xi(x)}{dx} = p_\xi(x). \qquad (1.51)$$

Из равенства (1.51) следует, что

$$P\{x \le \xi < x + \Delta x\} \approx p_\xi(x)\cdot\Delta x, \qquad (1.52)$$

где x — любое число;
Δx — достаточно малое положительное число.

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины ξ могут быть найдены следующим образом:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)\,dx;$$

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(\xi))^2 p_\xi(x)\,dx,$$

где $P_\xi(x)$ – плотность распределения вероятностей случайной величины ξ. Стандартное отклонение случайной величины определяется обычно как:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}.$$

Если f(t) – некоторая непрерывная функция, а ξ – непрерывная случайная величина, то

$$E(f(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p_\xi(x)\,dx.$$

Пример 1.50. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке [a, b], если

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } x \in [a,b]. \end{cases}$$

Функцию распределения случайной величины ξ можно найти следующим образом:

если $x < a$, то

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0,$$

если же $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} p_\xi(t)\,dt + \int_{a}^{x} p_\xi(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a}\,t\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

При $x > b$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} p_\xi(t)\,dt + \int_{a}^{b} p_\xi(t)\,dt + \int_{b}^{x} p_\xi(t)\,dt = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dt = 1.$$

Таким образом,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a,b]; \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ можно найти следующим образом:

$$\mathrm{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2};$$

$$\mathrm{E}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{-\infty} x^2 p_\xi(x)\,dx = \int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right);$$

$$\mathrm{D}(\xi) = \mathrm{E}(\xi^2) - \left(\mathrm{E}(\xi)\right)^2 = \frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример 1.51. Случайная величина ξ распределена показательно, если

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \ge 0 \end{cases} \qquad (\lambda > 0).$$

Функция распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x \ge 0. \end{cases}$$

Тогда при $\lambda = 1$

$$\mathrm{P}\{1 \le \xi < 1,02\} = F_\xi(1,02) - F_\xi(1) = 1 - e^{-1,02} - \left(1 - e^{-1}\right) = e^{-1} - e^{-1,02} = 0,00728.$$

С другой стороны, из равенства (1.52) следует, что

$$\mathrm{P}\{1 \le \xi < 1,02\} \approx p_\xi(1)\cdot 0,02 = e^{-1}\cdot 0,02 = 0,00736.$$

Для показательно распределенной случайной величины ξ имеем

$$\mathrm{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda},\ \mathrm{D}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Асимметрией (skewness) распределения вероятностей случайной величины ξ называется число

$$a(\xi)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\mathrm{E}(\xi)\right)^{3}p_{\xi}(x)\,dx}{\sigma^{3}(\xi)},$$

где $p_{\xi}(x)$ — плотность распределения вероятностей случайной величины ξ;
$\sigma(\xi)$ — ее стандартное отклонение.

Если $a(\xi) = 0$, то плотность распределения вероятностей случайной величины ξ симметрична относительно математического ожидания этой случайной величины (рис. 1.20).

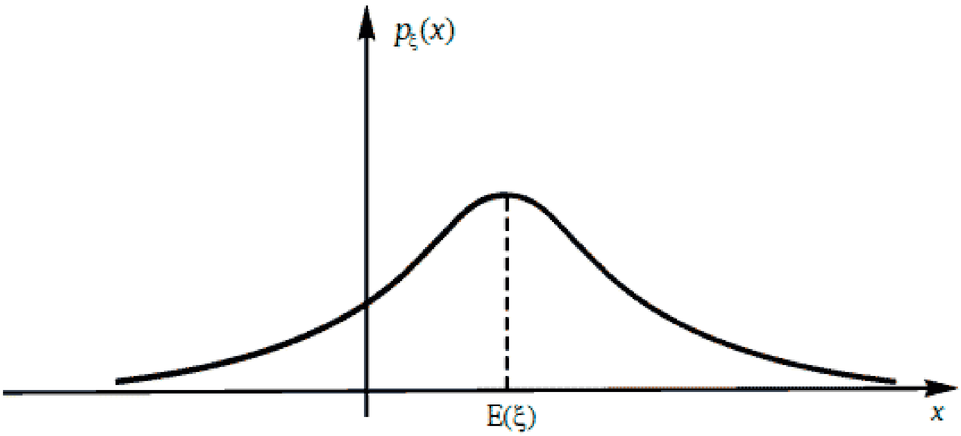


Рис. 1.20. Распределение с нулевой асимметрией

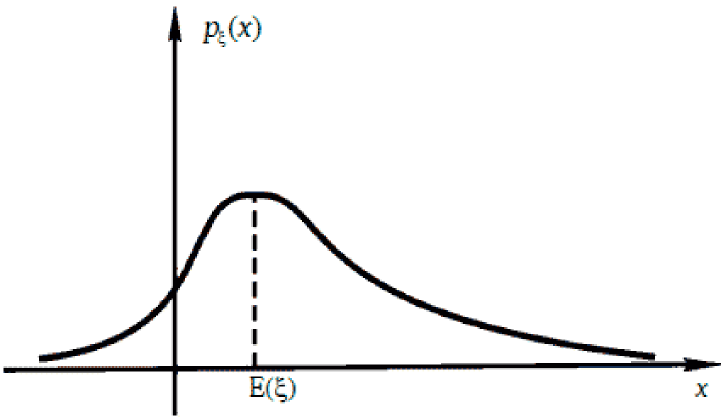


Рис. 1.21. Распределение с правосторонней асимметрией

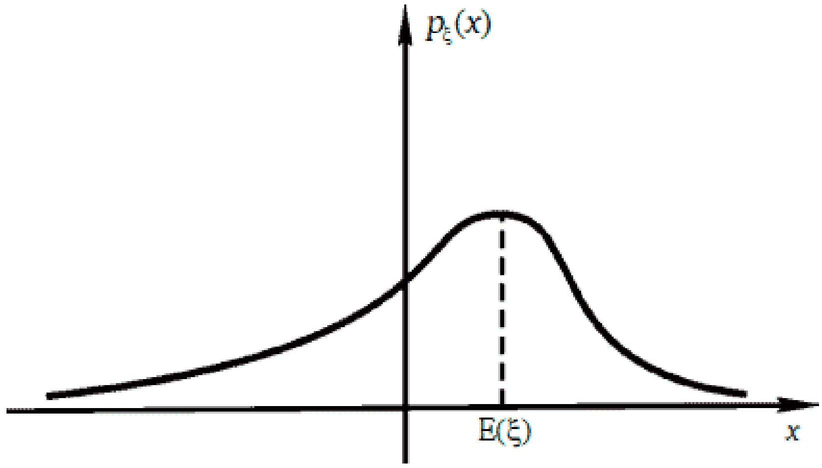


Рис. 1.22. Распределение с левосторонней асимметрией

При положительной (правосторонней) асимметрии распределения правая ветвь (tail) плотности распределения вероятностей случайной величины «длиннее» левой ветви. Соответственно, при отрицательной (левосторонней) асимметрии правая ветвь плотности распределения вероятностей случайной величины будет «короче» левой ветви (рис. 1.21 и 1.22).

Эксцессом (kurtosis) распределения вероятностей случайной величины ξ называется число

$$k(\xi) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{E}(\xi))^4 p_\xi(x)\,dx}{\sigma^4(\xi)}.$$

При одном и том же стандартном отклонении чем больше эксцесс, тем «тяжелее» ветви плотности распределения вероятностей случайной величины (рис. 1.23).

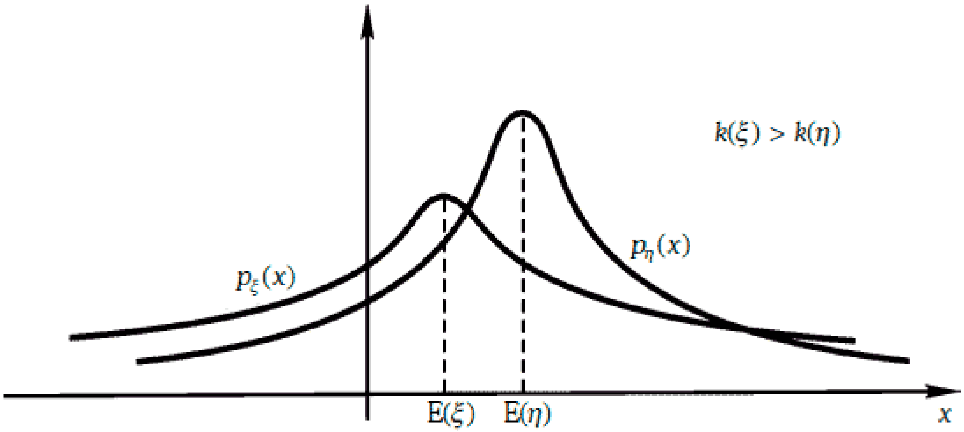


Рис. 1.23. Распределения с различным эксцессом

Распределение вероятностей с большим эксцессом называют распределением с «тяжелыми» ветвями (leptokurtic/fat-tailed distribution).

Медианой (median) распределения случайной величины ξ называется число Me, удовлетворяющее условию:

$$P\{\xi \le \mathrm{Me}\} = P\{\xi \ge \mathrm{Me}\} = \frac{1}{2}. \qquad (1.53)$$

Модой (mode) распределения случайной величины ξ называется любая точка локального максимума плотности распределения $P_\xi(x)$ этой случайной величины.

Распределение с одной модой Mo называется унимодальным (unimodal).

Свойства унимодальных распределений

1. Если $a(\xi) = 0$, то $E(\xi) = \mathrm{Me} = \mathrm{Mo}$.
2. Если $a(\xi) > 0$, то $E(\xi) > \mathrm{Me} > \mathrm{Mo}$.
3. Если $a(\xi) < 0$, то $E(\xi) < \mathrm{Me} < \mathrm{Mo}$.

Если даны две случайные величины ξ_1 и ξ_2, то можно рассмотреть двумерную случайную величину $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$.

Двумерная случайная величина $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ называется **[абсолютно] непрерывной**, если существует неотрицательная функция $p_{\bar{\xi}}(x_1, x_2)$, такая, что при любых числах x_1 и x_2 справедливо равенство

$$\mathrm{P}\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2\} = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p_{\bar{\xi}}(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2. \tag{1.54}$$

Функция $P\xi(x_1, x_2)$, удовлетворяющая равенству (1.54), называется плотностью совместного распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2.

Если двумерная случайная величина $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ является абсолютно непрерывной, то **ковариацией** между случайными величинами ξ_1 и ξ_2 является число

$$\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mathrm{E}(\xi_1))(x_2 - \mathrm{E}(\xi_2))\, p_{\bar{\xi}}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2,$$

а корреляция между ними определяется следующим образом:

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sigma(\xi_1) \cdot \sigma(\xi_2)}.$$

Если $p_{\bar{\xi}}(x_1, x_2)$ — плотность совместного распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2, то случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы тогда и только тогда, когда

$$p_{\bar{\xi}}(x_1, x_2) = p_{\xi_1}(x_1) \cdot p_{\xi_2}(x_2).$$

Все основные свойства числовых характеристик, рассмотренные нами для дискретных случайных величин, сохраняются и в непрерывном случае.

1.22. Важнейшие виды распределений случайных величин

1.22.1. Биномиальное распределение

Дискретная случайная величина ξ имеет биномиальное распределение (binomial distribution) B(n, p), если она принимает значения: 0, 1, 2, …, n, причем

$$P\{\xi = k\} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n, \tag{1.55}$$

где $p > 0,\ q > 0,\ p + q = 1;\ C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Свойства биноминального распределения

1. Если случайная величина ξ имеет биномиальное распределение $B(n,\ p)$, то $E(\xi) = n \cdot p$, $D(\xi) = n \cdot p \cdot q$.
2. Предположим, что случайные величины $\mu_1,\ \mu_2,\ \dots,\ \mu_n$ независимы и одинаково распределены, причем

   $$\mu_i = \begin{cases} 1, \text{ с вероятностью } p,\ 0 < p < 1, \\ 0, \text{ с вероятностью } q = 1 - p, \end{cases}$$

   где $i = 1, 2, ...,\ n$,

   тогда случайная величина $\xi = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$ имеет биномиальное распределение $B(n,\ p)$.

Пример 1.52. Рассмотрим портфель из 20 облигаций, выпущенных различными эмитентами с одним и тем же кредитным рейтингом. Предположим, что дефолты по облигациям независимы, а вероятность дефолта по любой облигации в течение одного года равна 10 %.

Обозначим через ξ число дефолтов по данному портфелю в течение одного года. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение B(20, 0,1), следовательно, ожидаемое число дефолтов по портфелю облигаций в течение одного года составит:

$$E(\xi) = 20 \cdot 0{,}1 = 2.$$

Вероятность того, что в течение года произойдет два дефолта, находится следующим образом:

$$P\{\xi = 2\} = C_{20}^2 \cdot (0{,}1)^2 \cdot (0{,}9)^{18} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} \cdot (0{,}1)^2 \cdot (0{,}9)^{18} = 0{,}2852, \text{ или } 28{,}52\%.$$

Вероятность, что в течение года произойдет 5 дефолтов, составит величину:

$$P\{\xi = 5\} = C_{20}^{5} \cdot (0,1)^5 \cdot (0,9)^{15} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} \cdot (0,1)^5 \cdot (0,9)^{15} = 0,0319, \text{ или } 3,19\%.$$

1.22.2. Распределение Пуассона

Случайная величина ξ, принимающая значения 0, 1, 2, …, k, …, имеет распределение Пуассона (Poisson's distribution) с параметром $\lambda > 0$, если

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \qquad (1.56)$$

Свойства распределения Пуассона

1. Если случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ, то $E(\xi) = \lambda$, $D(\xi) = \lambda$.
2. Если случайные величины ξ и η независимы и имеют распределения Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно, то случайная величина $\xi + \eta$ распределена по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1 + \lambda_2$.
3. Дана последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$, где случайная величина ξ_n имеет биномиальное распределение $B(n, p_n)$. Если $np_n \to \lambda$ при $n \to +\infty$, то последовательность $\{\xi_n\}$ сходится по распределению к случайной величине ξ, имеющей распределение Пуассона с параметром λ, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi_n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Следствие. Рассмотрим портфель из большого числа облигаций. Если дефолты по облигациям независимы, а вероятности дефолтов по всем облигациям портфеля достаточно малы, то можно считать, что число дефолтов по портфелю распределено по закону Пуассона с параметром λ, где λ — ожидаемое число дефолтов.

Пример 1.53. Число дефолтов по портфелю облигаций в течение одного года имеет распределение Пуассона. Ожидаемое число дефолтов равно 8.

Вероятность того, что в течение года произойдет ровно два дефолта, можно найти по следующей формуле:

$$P\{\xi = 2\} = \frac{8^2}{2!} \cdot e^{-8} = 0,0107, \text{ т.е. } 1,07\%.$$

1.22.3. Нормальное распределение

Говорят, что случайная величина ξ распределена нормально (normal distribution), если ее плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot S} e^{-\frac{(x-a)^2}{2S^2}}, \qquad (1.57)$$

где $\pi \approx 3{,}14$;
a — некоторое действительное число;
S — положительное число.

График плотности нормального распределения приведен на рис. 1.24.

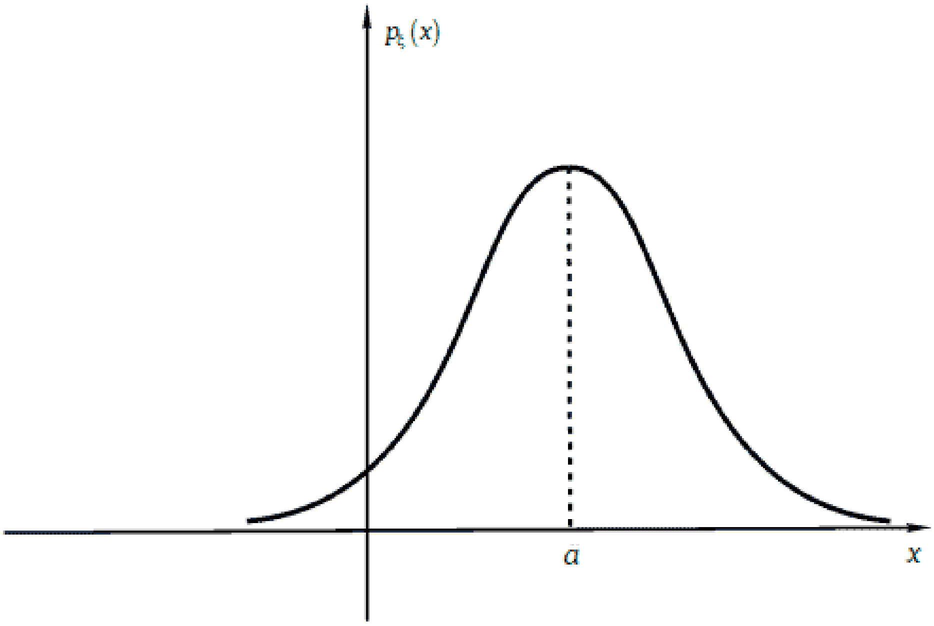


Рис. 1.24. График плотности нормального распределения

Основные свойства нормального распределения

1. Если случайная величина ξ распределена нормально с плотностью

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot S} e^{-\frac{(x-a)^2}{2S^2}},$$

то $\mathrm{E}(\xi) = a$; $\sigma(\xi) = S$.

2. Плотность нормально распределенной случайной величины симметрична относительно математического ожидания этой случайной величины, т. е. асимметрия a(ξ) = 0.

В частности,

$$P\{\xi \leqslant E(\xi)\} = P\{\xi \geqslant E(\xi)\} = 0,5.$$

Эксцесс нормального распределения всегда равен 3.

3. Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина будет отличаться от своего ожидаемого значения на величину, не превышающую одного, двух или трех ее стандартных отклонений, равна 68,3, 95,5 и 99,75 % соответственно.

Пример 1.54. Инвестор считает, что реализуемая доходность его портфеля облигаций за 6 месяцев имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 7 % и стандартным отклонением 4 %.

Вероятность того, что реализуемая доходность окажется:

между 7% – 4% = 3% и 7% + 4% = 11% равна 68,3%;
между 7% – 2 · 4% = –1% и 7% + 2 · 4% = 15% равна 95,5%.

4. Если случайная величина ξ распределена нормально с параметрами (a, S), то случайная величина

$$\eta = \frac{\xi - a}{S}\left(a = \mathrm{E}(\xi), S = \sigma(\xi)\right)$$

распределена нормально с параметрами (0, 1), т. е. имеет стандартное нормальное распределение.

При этом если $x_1 < x_2$, $z_1 = \frac{x_1 - a}{S}$, $z_2 = \frac{x_2 - a}{S}$, то

$$P\{x_1 \le \xi \le x_2\} = P\{z_1 \le \eta \le z_2\} = \\ = \begin{cases} \Phi(z_1) - \Phi(z_2), & \text{если } z_1 \ge 0; \\ 1 - \Phi(z_2) - \Phi(-z_1), & \text{если } z_1 < 0, \text{ а } z_2 \ge 0; \\ \Phi(-z_2) - \Phi(-z_1), & \text{если } z_2 \le 0. \end{cases} \quad (1.58)$$

Значения функции $\Phi(z) = P\{\eta \geqslant z\}$ при $z \geqslant 0$ приведены в табл. 1.1.

Следовательно, соотношение (1.58) позволяет находить различные вероятности вида

$$P\{x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2\}$$

для произвольных нормально распределенных случайных величин.

Таблица 1.1

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\Phi(z) = P\{\eta \geq z\}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,305	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,209	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1445	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010

Пример 1.55. Менеджер считает, что стоимость управляемого им портфеля облигаций распределена нормально с математическим ожиданием 10 млн долл. и стандартным отклонением 2 млн долл. Его интересует, какова вероятность, что стоимость портфеля окажется между 6 млн и 11 млн долл.

В данном случае

$$z_1 = \frac{6 \text{ млн долл.} - 10 \text{ млн долл.}}{2 \text{ млн долл.}} = -2;$$

$$z_2 = \frac{11 \text{ млн долл.} - 10 \text{ млн долл.}}{2 \text{ млн долл.}} = 0,5;$$

$\Phi(-z_1) = 0,0228$; $\Phi(z_2) = 0,3085$ (см. табл. 1.1).

Тогда

$$P\{6 \text{ млн долл.} \le \xi \le 11 \text{ млн долл.}\} = 1 - \Phi(-z_1) - \Phi(z_2) =$$
$$= 1 - 0,0228 - 0,3085 = 0,6687, \text{ или } 66,87\%.$$

Пример 1.56. Предположим, что в условиях примера 1.55 менеджер хочет найти доверительный интервал для стоимости управляемого им портфеля с надежностью 95 %. Иными словами, требуется найти интервал

$$u = \left(E(\xi) - y; E(\xi) + y\right)$$

так, чтобы $P\{\xi \in u\} = 0,95$.

Имеем следующее равенство:

$$0,95 = P\{\xi \in u\} = 1 - 2\Phi(z),$$

где $z = \frac{y}{S}$.

Тогда Φ(z) = 0,025. С помощью табл. 1.1 найдем значение z = 1,96. Значит, y = z · S = 1,96 · 2 млн долл. = 3,92 млн долл.

Искомый доверительный интервал: (6,08 млн долл.; 13,92 млн долл.).

5. Линейная комбинация нормально распределенных случайных величин также распределена нормально. В частности, если случайные величины ξ и η независимы и распределены нормально с параметрами (a_1, S_1) и (a_2, S_2) соответственно, то их сумма $\xi + \eta$ распределена нормально с параметрами $\left(a_1 + a_2, \sqrt{S_1^2 + S_2^2}\right)$.
6. Некоррелированные нормально распределенные случайные величины всегда независимы.
7. Последовательность случайных величин

$$\eta_1 = \xi_1, \eta_2 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \ \ldots, \ \eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}, \ \ldots$$

сходится к нормально распределенной случайной величине, если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ взаимно независимы и одинаково распределены (центральная предельная теорема).

Это означает, что при взаимно независимых одинаково распределенных случайных величинах $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ с математическим ожиданием, равным a, и дисперсией σ^2 случайная величина

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$$

распределена асимптотически нормально с параметрами $\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

1.22.4. Логарифмически нормальное (логнормальное) распределение

Говорят, что положительная случайная величина ξ распределена логнормально (lognormal distribution), если ln ξ имеет нормальное распределение вероятностей. Таким образом, плотность логнормального распределения имеет вид:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot S \cdot x} \cdot e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2S^2}}, \tag{1.59}$$

где $a = \mathrm{E}(\ln \xi)$,

$S = \sigma(\ln \xi)$,

$\pi = 3{,}14.$

График плотности логнормального распределения приведен на рис. 1.25.

Свойства логнормального распределения

1. Логнормальное распределение обладает правосторонней асимметрией (positively skewed), а при малых значениях S = σ(lnξ) близко к нормальному распределению.

2. Если случайная величина ξ имеет логнормальное распределение с параметрами a и S, то

$$\mathrm{E}(\xi) = e^{a+\frac{S^2}{2}},\ \mathrm{D}(\xi) = e^{2a+S^2}\left(e^{S^2} - 1\right),$$

а при $0 < x_1 < x_2$

$$\mathrm{P}\{x_1 < \xi < x_2\} = \begin{cases} \Phi(z_1) - \Phi(z_2), & \text{если } z_1 > 0, \\ 1 - \Phi(z_2) - \Phi(-z_1), & \text{если } z_1 < 0,\ z_2 \geq 0, \\ \Phi(-z_2) - \Phi(-z_1), & \text{если } z_2 < 0, \end{cases}$$

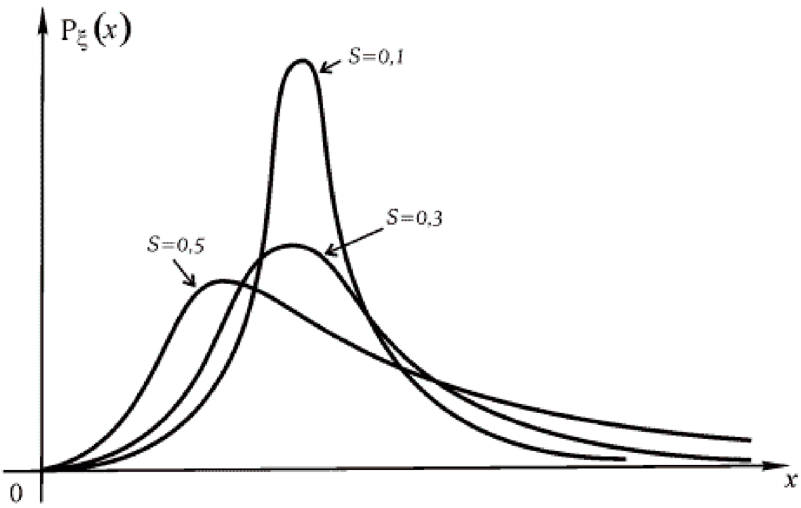


Рис. 1.25. Графики плотности логнормального распределения

где $z_1 = \dfrac{\ln x_1 - a}{S}$,

$z_2 = \dfrac{\ln x_2 - a}{S}$,

Φ(z) — вероятность, что случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение, принимает значение, большее z.

Пример 1.57. Будем считать, что доходность 10-летних облигаций с нулевыми купонами имеет логнормальное распределение с параметрами a = -2,70; S = 0,30.

Чтобы найти вероятность $P\{\xi < 0,05\}$, т. е. вероятность того, что доходность окажется меньше 5%, положим $z_1 = -\infty$, $z_2 = \dfrac{\ln 0,05 + 2,7}{0,3} = -0,99$.

Тогда

$P\{\xi < 0,05\} = \Phi(-z_2) - \Phi(-z_1) = \Phi(0,99) - 0 = 0,1611$, т. е. 16,11%.

Если нас интересует вероятность $P\{0,06 < \xi < 0,08\}$, то

$z_1 = \dfrac{\ln 0,06 + 2,7}{0,3} = -0,38$; $z_2 = \dfrac{\ln 0,08 + 2,7}{0,3} = 0,58.$

Значит,

$$P\{0,06 < \xi < 0,08\} = 1 - \Phi(z_2) - \Phi(-z_1) =$$
$$= 1 - \Phi(0,58) - \Phi(0,38) = 0,3670, \text{ т. е. } 36,7\%.$$

3. Если две случайные величины распределены логнормально, то их произведение также имеет логнормальное распределение.

1.22.5. Распределение x^2 (хи-квадрат)

Говорят, что случайная величина z имеет распределение x^2 (chi-squared distribution) с n степенями свободы, если она представима в виде суммы n квадратов взаимно независимых величин со стандартными нормальными распределениями.

Свойства распределения X^2

1. Если случайная величина z имеет распределение χ^2 с n степенями свободы, то

   $$\mathrm{E}(z) = n,\ \mathrm{D}(z) = 2n,$$

   асимметрия распределения χ^2 положительна.
2. При возрастании числа степеней свободы распределение χ^2 стремится к нормальному. Таким образом, случайная величина, имеющая распределение χ^2 с n степенями свободы, распределена асимптотически нормально с параметрами $\left(n, \sqrt{2n}\right)$.
3. Критическим значением распределения χ^2 с n степенями свободы называют число $\chi^2_\alpha(n)$, удовлетворяющее условию

   $$\mathrm{P}\left\{z > \chi^2_\alpha(n)\right\} = \alpha,$$

   где α — заданная вероятность.

   Критические значения распределения x^2 указаны в табл. 1.2.

4. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ взаимно независимы и распределены нормально с параметрами (a, σ), то случайная величина

   $$\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2},$$

   где $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k - \hat{a}\right)^2,\ \hat{a} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k,$

   имеет распределение χ^2 с $n-1$ степенями свободы.

   Это, в частности, означает, что оценка дисперсии $\hat{\sigma}^2$ распределена асимптотически нормально с параметрами

   $$\left(\sigma^2, \sigma^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right).$$

Таблица 1.2

КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ χ^2

Вероятность (α) / Число степеней свободы (n)	0,99	0,98	0,95	0,05	0,02	0,01
4	0,297	0,429	0,711	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	15,507	18,168	20,090
9	2,068	2,532	3,325	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,940	18,307	21,161	23,209

Пример 1.58. Даны 10 дневных наблюдений доходности 30-летних казначейских облигаций с нулевым купоном:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ξ_t, %	6,694	6,699	6,710	6,675	6,555	6,583	6,569	6,583	6,555	6,593

Если допустить, что доходность распределена нормально, то оценки математического ожидания и дисперсии доходности можно найти следующим образом:

t	ξ_t	$(\xi_t - \hat{a})^2$
1	6,694	0,005242
2	6,699	0,005991
3	6,710	0,007815
4	6,675	0,002852
5	6,555	0,004436
6	6,583	0,001490
7	6,569	0,002767
8	6,583	0,001490
9	6,555	0,004436
10	6,593	0,000818
$\sum$	66,216	0,037337

$$\hat{a} = \frac{66,216}{10} = 6,6216; \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{0,037337}{9} = 0,004149.$$

Доверительный интервал для дисперсии доходности с надежностью 96 % можно найти из условия

$$P\left\{\chi^2_{0,98}(9) < \frac{9 \cdot \hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < \chi^2_{0,02}(9)\right\} = 0,96,$$

т. е.

$$P\left\{2,532 < \frac{9 \cdot \hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < 19,676\right\} = 0,96.$$

Таким образом, с надежностью 96%

$$0,0147 = \frac{9 \cdot \hat{\sigma}^2}{2,532} > \sigma^2 > \frac{9 \cdot \hat{\sigma}^2}{19,679} = 0,0019.$$

1.22.6. Распределение Стьюдента

Распределение вероятностей случайной величины

$$t = \frac{\xi \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{\eta}} \tag{1.60}$$

называется распределением Стьюдента (Student’s t-distribution) с n степенями свободы, если случайные величины ξ и η независимы, ξ имеет стандартное нормальное распределение, а η – распределение x^2 с n степенями свободы.

Свойства распределения Стьюдента

1. Если случайная величина t имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы, то

$$E(t) = 0,\ D(t) = \frac{n}{n-2}.$$

Асимметрия распределения Стьюдента равна 0.

2. При возрастании числа степеней свободы распределение Стьюдента стремится к стандартному нормальному распределению. При этом распределение Стьюдента имеет более тяжелые ветви, чем стандартное нормальное распределение. На рис. 1.26 изображены графики плотности стандартного нормального распределения и распределения Стьюдента с тремя степенями свободы.

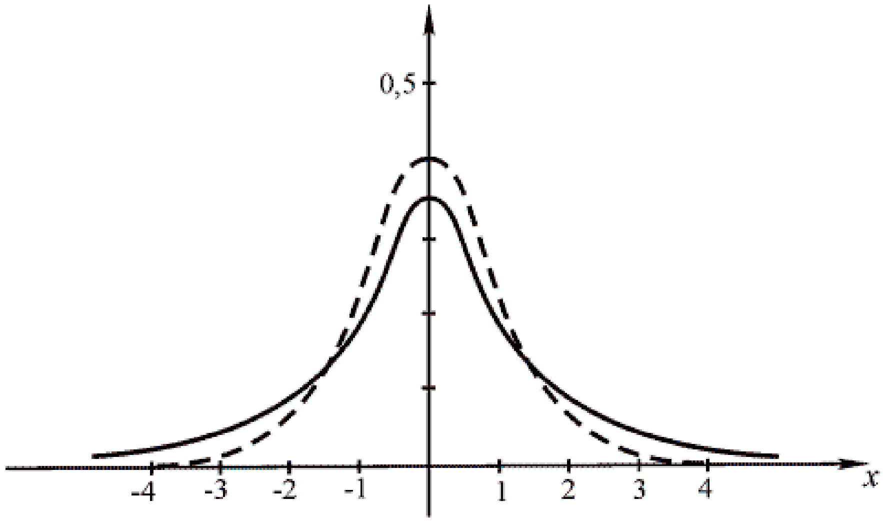


Рис. 1.26. Графики плотности нормального распределения и распределения Стьюдента

3. Критическим значением распределения Стьюдента с и степенями свободы называют число $t_a(n)$, удовлетворяющее условию:

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \alpha,$$

где α – заданная вероятность.

Критические значения распределения Стьюдента указаны в табл. 1.3.

4. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n$ взаимно независимы и распределены нормально с параметрами (a, σ), то случайная величина

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{a}-a)}{\hat{\sigma}},$$

где $\hat{a}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k;\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-\hat{a}\right)^2,$

имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Пример. 1.59. В условиях примера 1.58 найдем доверительный интервал для ожидаемой доходности с надежностью 95 %.

Так как

$$\hat{a}=6{,}6216,\ \hat{\sigma}=0{,}0644,$$

то искомый доверительный интервал можно найти на основе равенства

$$\mathrm{P}\left\{-t_{0{,}025}(9)<\frac{\sqrt{10}\,(6{,}6216-a)}{0{,}0644}<t_{0{,}025}(9)\right\}=0{,}95.$$

Таблица 1.3

КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА

Вероятность (α) / Число степеней свободы (n)	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169

Согласно табл. 1.3, критическое значение распределения Стьюдента $t_{0{,}025}(9)=2{,}262$. Следовательно,

$$6{,}6216-2{,}262\cdot\frac{0{,}0644}{\sqrt{10}}<a<6{,}6216+2{,}262\cdot\frac{0{,}0644}{\sqrt{10}}.$$

Таким образом, с надежностью 95 % ожидаемая доходность казначейских облигаций находится между 6,57 и 6,67 %.

1.22.7. Гамма-распределение

Плотность гамма-распределения Γ(α, γ) имеет следующий вид:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\gamma^{\alpha}}\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-\frac{x}{\gamma}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0,\end{cases} \tag{1.61}$$

где $\gamma>0,\ \alpha>0,\ \Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ (гамма-функция).

Если случайная величина ξ имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha,\gamma)$, то $E(\xi)=\alpha\cdot\gamma$, $D(\xi)=\alpha\cdot\gamma^2$.

1.22.8. Бета-распределение

Плотность бета-распределения B(α, β) записывается в виде:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\cdot x^{\alpha-1}\cdot(1-x)^{\beta-1}, & \text{если } x\in(0;1);\\ 0, & \text{если } x\notin(0;1);\end{cases} \tag{1.62}$$

где $\alpha>0,\ \beta>0$.

Если случайная величина ξ имеет бета-распределение B(α, β), то

$$E(\xi)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\ D(\xi)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}.$$

1.22.9. Двумерное нормальное распределение

Плотность двумерного нормального распределения имеет следующий вид:

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-a)(x-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x-b)^2}{\sigma_2^2}\right)},$$

где $\sigma_1>0,\ \sigma_2>0,\ |\rho|<1$.

Свойства двумерного нормального распределения

1. Если двумерная случайная величина $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ распределена нормально, то $\mathrm{E}(\xi_1) = a$, $\mathrm{E}(\xi_2) = b$, $\mathrm{D}(\xi_1) = \sigma_1^2$, $\mathrm{D}(\xi_2) = \sigma_2^2$, $Cov(\xi_1, \xi_2) = \sigma_1\sigma_2\rho$.

2. Предположим, что двумерная случайная величина $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ распределена нормально, тогда

а) любая линейная комбинация случайных величин ξ_1 и ξ_2 распределена нормально;

б) случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, если они не коррелированы.

1.23. Расчет волатильности финансовых показателей на основе исторических данных

Волатильность, или изменчивость (volatility), финансовых показателей играет очень важную роль в управлении финансовыми рисками.

Пусть Y_t – некоторый финансовый показатель (например, цена или доходность некоторого финансового инструмента), наблюдаемый в день t, t = 0, 1, 2, …, T. Положим

$$X_t = 100 \ln \frac{Y_t}{Y_{t-1}}, \; t = 1, 2, \ldots, T.$$

Случайная величина X_t представляет собой натуральный логарифм относительного изменения этого показателя за один день, выраженный в процентах. Тогда дневную волатильность данного показателя можно оценить следующим образом:

$$\sigma_{дн} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)^2}{T-1}}, \qquad \bar{X} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_t}{T}.$$

Иными словами, дневная волатильность принимается равной стандартному отклонению логарифма относительного изменения финансового показателя за один день.

t	Y_t, %	$X_t = 100 \ln \frac{Y_t}{Y_{t-1}}$	$\left(X_t - \bar{X}\right)^2$
0	6,694	—	—
1	6,699	0,07467	0,034533
2	6,710	0,16407	0,075752
3	6,675	–0,52297	0,169587
4	6,555	–1,81411	2,900039
5	6,583	0,42624	0,288799
6	6,569	–0, 21290	0,010351
7	6,583	0,21290	0,105015
8	6,555	–0,42625	0,099282
9	6,593	0,57804	0,474997
10	6,620	0,40869	0,270244
Σ	—	–1,11162	4,428599

Пример 1.60. В течение 11 последовательных рабочих дней биржи определялась доходность 30-летних казначейских облигаций с нулевыми купонами. Расчет дневной волатильности доходности на основе этой информации приведен ниже.

$$\overline{X} = \frac{-1,11162}{10} = -0,11116; \qquad \sigma_{дн} = \sqrt{\frac{4,428599}{9}} = 0,70147.$$

Таким образом, дневная волатильность доходности 30-летних облигаций с нулевыми купонами оценивается в 0,70 %.

Если случайные величины X_t не коррелируют между собой, то, зная дневную волатильность доходности финансового инструмента, можно оценить волатильность доходности этого инструмента за данный период времени:

$$\sigma_{пер} = \sigma_{дн} \cdot \sqrt{\tau_{пер}},$$

где $\sigma_{пер}$ — волатильность доходности за рассматриваемый период времени;
$\sigma_{дн}$ — дневная волатильность;
$\tau_{пер}$ — число дней в периоде.

В частности, для того чтобы определить годовую волатильность, необходимо для каждого конкретного случая правильно определить число рабочих дней в году. Число рабочих дней в году может быть равным 250, 260 или 365.

Пример 1.61. В примере 1.60 была найдена дневная волатильность доходности 30-летних казначейских облигаций с нулевыми купонами: $\sigma дн = 0,70147$.

Ниже указана годовая волатильность доходности при разных оценках числа дней в году:

Число дней в году	Годовая волатильность, %
250	11,09
260	11,31
360	13,31
365	13,40

Предположим, что в данный момент времени доходность финансового инструмента равна r. Можно считать, что доходности за один день распределены логнормально с параметрами 0 и $\sigma дн$. Если логарифмы относительных изменений доходности не коррелируют между собой, то отношение доходности через год к доходности r будет распределено также логнормально, но с параметрами (0, σ*год*). Следовательно, сама доходность финансового инструмента через год должна иметь логнормальное распределение с параметрами (ln r, σ*год*).

Если годовая волатильность доходности достаточно мала, то можно считать, что доходность финансового инструмента через год распределена приблизительно нормально с параметрами r и rσ*год*.

Пример 1.62. Текущая доходность 10-летних казначейских облигаций с нулевым купоном равна 8 %, а годовая волатильность этой доходности равна 15 %.

Можно предположить, что доходность 10-летних облигаций с нулевыми купонами через год будет приблизительно распределена нормально с ожидаемым значением 0,08 и стандартным отклонением 0,08-0,15 = 0,012. Отсюда, в частности, следует, что с вероятностью 95,5 % доходность через год окажется между 0,08-2 • 0,012 = 0,056 и 0,08 + 2 • 0,012 = 0,104, т. е. будет принимать значение между 5,60 и 10,40 %.

1.24. Элементы регрессионного анализа

Во многих случаях требуется установить зависимость между двумя случайными величинами. Чаще всего предполагается линейная зависимость. Например, при обмене облигаций использовалась линейная зависимость между изменениями доходностей двух облигаций.

Рассмотрим две случайные величины ξ и η и предположим, что когда случайная величина ξ принимает значения $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то случайная величина η принимает соответственно значения $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

Линейной регрессионной моделью называют уравнение следующего вида:

$$\eta = a + b\xi + \varepsilon, \tag{1.64}$$

где a и b — некоторые числа (коэффициенты регрессии);
ε — случайная погрешность.

При построении линейной регрессионной модели коэффициенты a и b необходимо подобрать так, чтобы влияние случайной погрешности ξ на случайную величину η было как можно меньше.

Из уравнения (1.64) следует, в частности, что

$$Y_k = a + bX_k + \varepsilon_k, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Коэффициенты регрессии a и b чаще всего подбираются методом наименьших квадратов (least squares), который сводится к отысканию значений a и b так, чтобы достигалось наименьшее значение функции

$$\sum_{k=1}^{n} (Y_k - a - bX_k)^2. \tag{1.65}$$

Нетрудно проверить, что наименьшее значение функции (1.65) достигается при

$$a = \hat{a},\ b = \hat{b},$$

где $$\hat{b} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k Y_k - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)}{\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2};$$

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - \frac{1}{n}\hat{b}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

При выборе коэффициентов регрессии указанным выше способом будут выполняться следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = 0,\ \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot \hat{\varepsilon}_k = 0 \quad (\hat{\varepsilon}_k = Y_k - \hat{a} - \hat{b}X_k),$$

$$\overline{Y} = \hat{a} + \hat{b}\overline{X}\left(\overline{X} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}, \overline{Y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{n}\right). \tag{1.66}$$

Пример 1.63. Построение линейной регрессионной зависимости доходности среднесрочных корпоративных облигаций одного и того же кредитного рейтинга (η) от доходности 10-летних казначейских облигаций (ξ). Исходная информация и предварительные расчеты приведены в таблице ниже.

Коэффициенты регрессии находят следующим образом:

$$\hat{b} = \frac{846,5312 - \frac{1}{10}(87,555)(96,400)}{769,1671 - \frac{1}{10}(87,555)^2} = 0,9696,$$

k (№ наблюдения)	Доходность облигаций, %		$X_k Y_k$	X^2_k	Y^2_k
	казначейских X_k	корпоративных Y_k			
1	9,057	9,900	89,6643	82,0292	98,0100
2	9,140	10,000	91,4000	83,5396	100,0000
3	8,983	9,800	88,0334	80,6943	96,0400
4	9,298	10,250	95,3045	86,4528	105,0625
5	9,279	10,100	93,7179	86,0998	102,0100
6	9,057	9,950	90,1172	82,0292	99,0025
7	8,598	9,550	82,1109	73,9256	91,2025
8	8,079	9,000	72,7110	65,2702	81,0000
9	7,808	8,700	67,9296	60,9649	75,6900
10	8,256	9,150	75,5424	68,1615	83,7225
Σ	87,555	96,400	846,5312	769,1671	931,7300

$$\hat{a} = \frac{1}{10} \cdot 96,400 - \frac{1}{10} \cdot 0,9696 \cdot 87,555 = 1,1507.$$

Уравнение регрессии в данном случае имеет вид:

$$\eta = 1,1507 + 0,9696\xi + \varepsilon.$$

Из соотношения (1.66) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n}\left(Y_k - \overline{Y}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\hat{a} + \hat{b}X_k + \hat{\varepsilon}_k - \left(\hat{a} + \hat{b}\overline{X}\right)\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\hat{b}\left(X_k - \overline{X}\right) + \hat{\varepsilon}_k\right)^2 = \hat{b}^2 \sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\hat{\varepsilon}_k^2.$$

Таким образом, полная сумма квадратов отклонений зависимой величины от своего среднего значения состоит из двух частей: $\hat{b}^2 \sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2$, называемой суммой квадратов, объясняемой регрессией, и $\sum_{k=1}^{n}\hat{\varepsilon}_k^2$, называемой суммой квадратов, не объясненной регрессией.

Отношение суммы квадратов, объясняемой регрессией, к полной сумме квадратов называют коэффициентом детерминации и обозначают R^2. Таким образом,

$$R^2 = \hat{b}\,\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k Y_k - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)}{\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2}.$$

Коэффициент детерминации всегда находится между 0 и 1, причем чем ближе коэффициент детерминации к единице, тем выше качество регрессионной модели.

Пример 1.64. Оценим качество регрессионной модели, построенной в примере 1.63.

В данном случае коэффициент детерминации может быть найден следующим образом:

$$R^2 = 0,9696 \cdot \frac{846,5312 - \frac{1}{10}(87,400)(96,400)}{931,7300 - \frac{1}{10}(96,400)^2} = 0,9963.$$

Так как коэффициент детерминации очень близок к единице, то качество регрессионной модели достаточно высокое.

Оценка коэффициентов регрессии получена нами в зависимости от выборки значений X_1, X_2…, X_n независимой случайной величины ξ и соответствующих им значений зависимой случайной величины η. Для другой выборки значений случайной величины ξ будут получены, вообще говоря, другие оценки коэффициентов регрессии и другая случайная погрешность. В связи с этим возникает задача построения доверительных интервалов для коэффициентов регрессии.

Если предположить, что случайные погрешности не коррелируют между собой (т. е. отсутствует автокорреляция), то доверительные интервалы для коэффициентов регрессии с надежностью 95 % строятся следующим образом:

$$\hat{b} - t_{0,025}(n-2) \cdot \frac{\mu_{cm}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}} < b < \hat{b} + t_{0,025}(n-2) \cdot \frac{\mu_{cm}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}},$$

$$\hat{a} - t_{0,025}(n-2) \cdot \mu_{cm} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}} < a < \hat{a} + t_{0,025}(n-2) \cdot \mu_{cm} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}},$$

где $t_{0,025}(n-2)$ — критическое значение для распределения Стьюдента с $n-2$ степенями свободы (табл. 1.3);

$$\mu_{cm} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} \hat{\varepsilon}_k^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-R^2}{n-2}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right)}$$ — стандартная оценка ошибки.

Если случайная величина ξ принимает значение X, то согласно линейной регрессионной модели:

$$\eta = \hat{a} + \hat{b}\xi + \varepsilon,$$

а ожидаемое значение случайной величины η равно

$$Y_{ож} = \hat{a} + \hat{b}X.$$

При отсутствии автокорреляции[17] и гетероскедастичности[18] доверительный интервал для значения случайной величины η при заданном уровне надежности может быть найден в виде:

$$(Y_{ож} - \Delta Y, Y_{ож} + \Delta Y),$$

где $$\Delta Y = t_{0,025}(n-2) \cdot \mu_{cm} \cdot \sqrt{\frac{(X-\bar{X})^2}{\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2} + \frac{1}{n}}.$$

[17] **Автокорреляция** (autocorrelation, serial correlation) – корреляционная связь между значениями одного и того же случайного процесса в различные моменты времени.

[18] **Гетероскедастичность** (heteroscedasticity) – отсутствие гомоскедастичности, т. е. неоднородность дисперсии, подсчитанной по разным группам (в данном случае – неоднородность дисперсии во времени).

Пример 1.65. Инвестор считает, что через месяц доходность 10-летних казначейских облигаций окажется равной 8 %. Тогда согласно регрессионной модели, построенной в примере 1.63, ожидаемое значение доходности корпоративных облигаций будет равно

$$1{,}1507 + 0{,}9696 \cdot 8\% = 8{,}91\%.$$

Для определения доверительного интервала для доходности корпоративных облигаций с надежностью 95 % найдем:

$$t_{0,025}(n-2) = 2,31 \qquad (n-2=8);$$

$$\mu_{cm} = \sqrt{\frac{1-0,9963}{8}\left(931,7300 - \frac{1}{10}(96,400)^2\right)} = 0,0336;$$

$$\sqrt{\frac{\left(X-\overline{X}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2} + \frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{(8\% - 8,7555\%)^2}{769,1671 - \frac{1}{10}(87,555)^2} + \frac{1}{10}} = 0,5668;$$

$$\Delta Y = 2,31 \cdot 0,0336 \cdot 0,5668 = 0,044.$$

Следовательно, искомый доверительный интервал: (8,87 %; 8,95 %).

1.25. Метод Монте-Карло

Случайная величина γ, принимающая 10 значений: 0, 1, 2, 3, …, 9 с одинаковой вероятностью, называется случайной цифрой.

Предположим, что мы произвели N независимых опытов, в результате которых получили N случайных цифр. Записав эти цифры (в порядке их появления) в таблицу, получим то, что называется таблицей случайных цифр. Например, таблица из 150 случайных цифр может иметь следующий вид (цифры разбиты на группы для удобства чтения таблицы):

86515	90795	66155	66434	56558	12332
69186	03393	42502	99224	88955	53758
41686	42163	85181	38967	33181	72664
86522	47171	88059	89342	67248	09082
72587	93000	89688	78416	27589	99528

Случайным числом (random number) называется случайная величина

$$\delta = \frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{100} + \dots + \frac{\gamma_s}{10^s} + \dots ,$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s,$ … — независимые случайные цифры.

Иными словами, случайное число – это случайная величина, равномерно распределенная на промежутке [0, 1).

Если задана таблица случайных цифр, то можно строить различные случайные числа, как, например:

$$\begin{gathered} 0{,}86;\ 0{,}51;\ 0{,}59;\ 0{,}07;\ 0{,}95;\ 0{,}66;\ 0{,}15;\ 0{,}56;\ 0{,}64;\ 0{,}34; \\ 0{,}45;\ 0{,}65;\ 0{,}58;\ 0{,}12;\ 0{,}33;\ 0{,}26;\ 0{,}91;\ 0{,}86;\ 0{,}03;\ 0{,}39. \end{gathered} \tag{1.67}$$

В настоящее время существуют специальные компьютерные программы для построения случайных чисел в любом количестве. Такие программы называют генераторами случайных чисел.

Рассмотрим теперь дискретную случайную величину ξ, распределение которой имеет вид:

X_1	X_2	…	X_n
P_1	P_2	…	P_n

Для моделирования случайной величины ξ промежуток [0, 1) разделим на участки Δ_i так, чтобы длина промежутка Δ_i равнялась P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Новая случайная величина $\hat{\xi}$, определяемая равенством:

$$\hat{\xi} = X_i, \text{ если } \delta \in \Delta_i, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.68}$$

где δ — случайное число,

имеет такое же распределение, что и случайная величина ξ.

Равенство (1.68) позволяет каждому случайному числу приписать определенное значение случайной величине ξ. Такой процесс приписывания значений случайной величине ξ часто называют разыгрыванием этой случайной величины.

Пример 1.66. Случайная величина ξ принимает значения 1 и 2 с вероятностью 0,6 и 0,4 соответственно. В данном случае

$$\Delta_1 = [0; \quad 0,6), \; \Delta_2 = [0,6; 1).$$

Значения этой случайной величины, приписываемые случайным числом из последовательности (1.67), приведены ниже:

j	0,86	0,51	0,59	0,07	0,95	0,66	0,15	0,56	0,64	0,34
ξ	2	1	1	1	2	2	1	1	2	1

j	0,45	0,65	0,58	0,12	0,33	0,26	0,91	0,86	0,03	0,39
ξ	1	2	1	1	1	1	2	2	1	1

Частоты появления 1 и 2 соответственно равны $\frac{13}{20} = 0,65; \; \frac{7}{20} = 0,35$ и близки к их вероятностям. Чтобы получить лучшую модель, необходимо рассмотреть большее количество случайных чисел.

Предположим, что даны две случайные величины ξ и η, совместное распределение которых имеет вид:

ξ \ η	Y_1	…	Y_j	…	Y_n
X_1	P_{11}	…	P_{1j}	…	P_{1n}
…	…	…	…		…
X_i	P_{i1}	…	P_{ij}	…	P_{in}
…	…		…		
X_m	P_{m1}	…	P_{mj}		P_{mn}

Для моделирования пары случайных величин (ξ, η) промежуток $[0, 1)$ разделим на части Δ_{ij} так, чтобы длина полуинтервала Δ_{ij} равнялась P_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

В этом случае пара случайных величин $\left(\hat{\xi}, \hat{\eta}\right)$, где

$$\hat{\xi} = X_i, \hat{\eta} = Y_i \text{ при } \delta \in \Delta_{ij}, \tag{1.69}$$

имеет такое же распределение, что и пара (ξ, η).

Равенство (1.69) позволяет каждому случайному числу приписать определенную пару значений случайных величин ξ и η. Такой процесс приписывания значений паре случайных величин (ξ, η) называют разыгрыванием этой пары.

Если случайные величины ξ и η независимы, то для разыгрывания пары (ξ, η) достаточно разыграть каждую случайную величину в отдельности. Для разыгрывания непрерывной случайной величины можно вначале найти дискретную случайную величину, близкую к данной случайной величине, а затем разыграть эту дискретную случайную величину.

Метод Монте-Карло позволяет численно находить различные вероятностные характеристики случайной величины η, зависящей от большого числа других случайных величин ξ_1, $\xi_2\ldots, \xi_n$. Этот метод сводится к следующему: разыгрывается последовательность случайных величин $(\xi_1, \xi_2\ldots, \xi_n)$, для каждого розыгрыша определяется соответствующее значение случайной величины η, а по найденным значениям строится эмпирическое распределение вероятностей этой случайной величины.

Пример 1.67 [5]. Инвестор владеет портфелем, состоящим из одной казначейской облигации и двух корпоративных облигаций одного и того же кредитного рейтинга. Основные параметры портфеля указаны в таблице:

Облигация	Срок до погашения, лет	Купонная ставка, %	Номинал, млн долл.	Доходность к погашению, %
Казначейская	5,5	6,0	5	6,0
Корпоративная	15,5	9,0	4	9,0
Корпоративная	25,5	10,5	6	10,5

Инвестора интересует реализуемая доходность портфеля облигаций за 6 месяцев. По его мнению, реализуемая доходность портфеля будет определяться следующими двумя факторами: кривой доходностей казначейских облигаций через 6 месяцев и спредом между доходностями корпоративных и казначейских облигаций. Предположим, что инвестор располагает еще и следующей информацией:

Доходности казначейских облигаций, %			Вероятность	Разбиение промежутка [0, 1)
5 лет	15 лет	25 лет		
4	6	7	0,20	[0; 0,20)
5	8	9	0,15	[0,20; 0,35)
6	7	7	0,10	[0,35; 0,45)
7	8	8	0,10	[0,45; 0,55)
9	9	9	0,20	[0,55; 0,75)
10	8	8	0,25	[0,75; 1,00)

Величина спреда между доходностями, б. п.*	Вероятность	Разбиение промежутка [0, 1)
75	0,10	[0; 0,10)
100	0,20	[0,10; 0,30)
125	0,25	[0,30; 0,55)
150	0,25	[0,55; 0,80)
175	0,15	[0,80; 0,95)
200	0,05	[0,95; 1,00)

* б. п. — базисный пункт.

Для определения реализуемой доходности портфеля облигаций можно использовать метод Монте-Карло.

Первая итерация (случайные числа: 0,91 для кривой доходностей и 0,12 для спреда между доходностями). В этом случае доходности казначейских облигаций со сроком до погашения 5, 15 и 25 лет составят соответственно 10, 8 и 8 %, а доходности корпоративных облигаций со сроком до погашения 15 и 25 лет – 9 и 9 %.

Тогда цены облигаций (на номинал в 100 долл.) через 6 месяцев определяются следующим образом:

$$P_1 = \frac{6}{0,1}\left[1 - \frac{1}{(1+0,05)^{10}}\right] + \frac{100}{(1+0,05)^{10}} = 84,55653,$$

$P_2 = 100$ (купонная ставка совпадает с доходностью),

$$P_3 = \frac{10,5}{0,09}\left[1 - \frac{1}{(1,045)^{50}}\right] + \frac{100}{(1,045)^{50}} = 114,82151.$$

Значит, реализуемая доходность портфеля облигаций составит:

$$2 \cdot \frac{P_1 \cdot 50\ 000 + P_2 \cdot 40\ 000 + P_3 \cdot 60\ 000 + 150\ 000 + 180\ 000 + 315\ 000 - 15\ 000\ 000}{15\ 000\ 000} =$$

$= 0,1016$, т. е. 10,16%.

Предположим, что было проведено 100 итераций. При этом оказалось, что наименьшая реализуемая доходность портфеля равна -3,905 %, а наибольшая реализуемая доходность составляет 24,97 %.

Разделив отрезок [-3,905 %; 24,97 %] на достаточно большое число частей, подсчитаем для каждой части число итераций, дающих реализуемую доходность из этой части.

Таким образом, будет построено эмпирическое распределение вероятностей реализуемой доходности портфеля облигаций. После чего можно получить различные числовые характеристики этой реализуемой доходности: среднее значение, стандартное отклонение и т. д.

1.26. Случайные процессы и их основные характеристики

Дано основное вероятное пространство

$$(\Omega, \beta, P),$$

где Ω – пространство элементарных событий;

β – σ-алгебра случайных событий;

P – вероятностная мера.

Рассмотрим некоторое числовое множество V, элементы которого в дальнейшем будем считать моментами времени.

Функция $\xi(w, t)$ двух переменных $w \in \Omega$ и $t \in V$ называется случайным процессом (stochastic process), определенным на множестве V, если для любых $t \in V$ и $x \in R$ (R – множество всех действительных чисел) множество

$$\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \xi(\omega, t) < x\right\} \in \beta, \tag{1.70}$$

т. е. является случайным событием.

Из условия (1.70) следует, что если на множестве V определен случайный процесс $\xi(w, t)$, то каждому моменту времени $t \in V$ поставлена в соответствие случайная величина $\xi_t(w) = \xi(w, t)$. Случайная величина $\xi_t(w)$ называется сечением случайного процесса в момент времени t.

Таким образом, чтобы на множестве V задать некоторый случайный процесс, достаточно каждому моменту времени $t \in V$ поставить в соответствие ту или иную случайную величину $\xi_t(w)$ – сечение этого случайного процесса. В силу этого случайный процесс можно обозначить как $\xi_t(w)$ или просто ξ_t.

Если на множестве V задан случайный процесс $\xi(w, t)$, то при каждом фиксированном элементарном событии $w \in \Omega$ мы имеем функцию одного переменного t. Эту функцию, определенную на множестве V, называют траекторией, или реализацией, случайного процесса $\xi(w, t)$.

Пример 1.68. Рассмотрим случайный процесс

$$\xi(\omega, t) = t \cdot \eta(\omega) + 1,$$

где $t \in [0, +\infty)$;

$$\eta(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью} \quad 0{,}4, \\ -1 & \text{с вероятностью} \quad 0{,}6. \end{cases}$$

Сечением данного случайного процесса в момент времени $t = 2$ является случайная величина $2\eta(w) + 1$. Траектории случайного процесса $\xi(w, t)$ изображены на рис. 1.27.

Пример 1.69. Случайный процесс на $[0, +\infty)$ определен следующим образом:

$$\xi(\omega,t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t < \eta(\omega); \\ 2, & \text{если} \quad t \geq \eta(\omega), \end{cases}$$

где $\eta(\omega)$ — некоторая положительная случайная величина.

Сечением случайного процесса ξ(w, t) в момент времени t является случайная величина, принимающая значение 1 с вероятностью, равной P{η(w) > t}, и значение 2 с вероятностью, равной P{η(w) ≤ t}.

Траектория случайного процесса ξ(w, t) имеет вид, изображенный на рис. 1.28. Важнейшими характеристиками случайных процессов являются математическое ожидание и дисперсия.

Математическим ожиданием случайного процесса $\xi(\omega,\ t)$, $t \in V$, называется функция $m_\xi(t)$, равная математическому ожиданию сечения $\xi_t(\omega)$, т. е.

$$m_\xi(t) = \mathrm{E}(\xi_t(\omega)),\ t \in V.$$

Дисперсией случайного процесса $\xi(\omega,\ t)$, $t \in V$, является функция $\mathrm{D}_\xi(t)$, равная дисперсии сечения $\xi_t(\omega)$ этого случайного процесса, т. е.

$$\mathrm{D}_\xi(t) = \mathrm{D}(\xi_t(\omega)),\ t \in V.$$

Пример 1.70. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайного процесса из примера 1.68.

По определению

$$m_\xi(t) = \mathrm{E}(\xi_t(\omega)) = \mathrm{E}(t\eta(\omega)+1) = t\mathrm{E}(\eta)+1.$$

Так как $\mathrm{E}(\eta) = 1 \cdot 0,4 + (-1) \cdot 0,6 = -0,2$, то $m_\xi(t) = -0,2t + 1$.

С другой стороны,

$$\mathrm{D}_\xi(t) = \mathrm{D}(\xi_t(\omega)) = \mathrm{D}(t\eta(\omega)+1) = t^2\mathrm{D}(\eta),$$

$$\mathrm{D}(\eta) = (1+0,2)^2 \cdot 0,4 + (-1+0,2)^2 \cdot 0,6 = 0,96.$$

Значит,

$$\mathrm{D}_\xi(t) = 0,96 \cdot t^2.$$

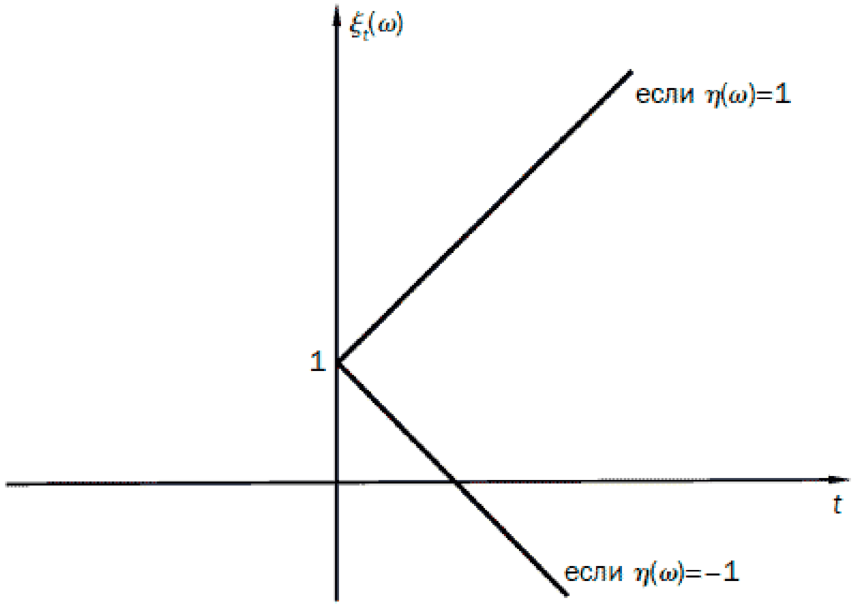


Рис. 1.27. Траектория случайного процесса из примера 1.68

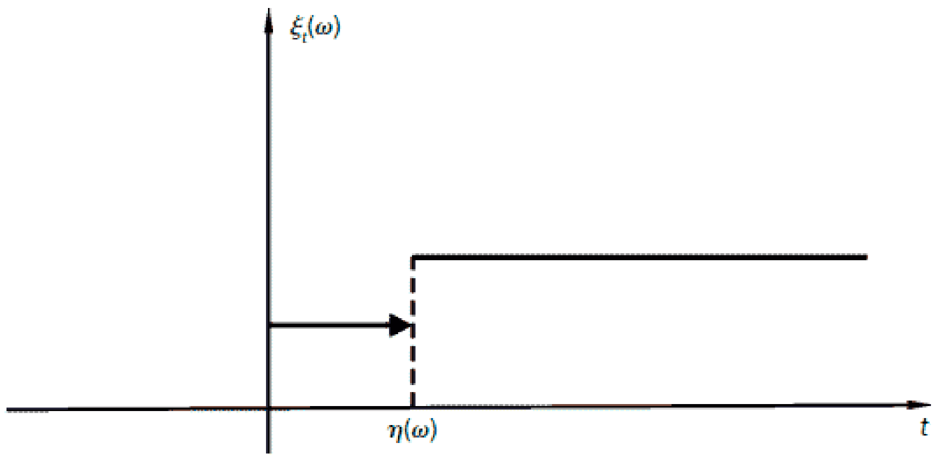


Рис. 1.28. Траектория случайного процесса из примера 1.69

Пример 1.71. Рассмотрим случайный процесс из примера 1.69, считая, что случайная величина η(w) распределена показательно с плотностью

$$P_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ e^{-x}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Так как $P\{\eta(\omega) \leq t\} = 1 - e^{-t}$, $P\{\eta(\omega) > t\} = e^{-t}$, то

$$E(\xi_t(\omega)) = 1 \cdot e^{-t} + 2 \cdot (1 - e^{-t}) = 2 - e^{-t};$$

$$D(\xi_t(\omega)) = \left(1 - (2 - e^{-t})\right)^2 \cdot e^{-t} + \left(2 - (2 - e^{-t})\right)^2 (1 - e^{-t}) = e^{-t}(1 - e^{-t}).$$

Следовательно,

$$m_\xi(t) = 2 - e^{-t}, \; D_\xi(t) = e^{-t}(1 - e^{-t}).$$

Говорят, что случайный процесс $\xi(\omega, t)$, $t \in V$, обладает **независимыми приращениями**, если при любых t_1, t_2, ..., $t_n \in V$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, случайные величины $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \xi_{t_3} - \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ независимы.

Случайные процессы с независимыми приращениями играют важную роль при моделировании эволюции финансовых показателей. Это объясняется тем, что финансовый рынок принято считать эффективным (efficient), если цены активов на этом рынке полностью отражают всю имеющуюся информацию об этих активах. На эффективном финансовом рынке изменения цен активов могут происходить только из-за появления новой информации (которая, вообще говоря, непредсказуема). Это означает, что изменения цены активов на таком рынке должны быть в некотором смысле независимы.

1.27. Важнейшие виды случайных процессов

1.27.1. Случайное блуждание

Случайный процесс $\alpha(\omega, t)$, определенный на множестве

$$V = \{t_0,\ t_0 + h,\ t_0 + 2h,\ \dots,\ t_0 + kh,\ \dots\},\ h > 0,$$

называется **случайным блужданием** (*random walk*), если

$$\begin{cases} \alpha_{t_0}(\omega) = x \quad (x \text{ — некоторое случайное число}), \\ \alpha_{t_0+kh}(\omega) = \alpha_{t_0+(k-1)h}(\omega) + \mu_k(\omega), \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots, \end{cases}$$

где случайные величины $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \dots$ независимы и

$$\mu_k = \begin{cases} \Delta & \text{с вероятностью } 0{,}5, \\ -\Delta & \text{с вероятностью } 0{,}5 \end{cases} \quad (\Delta > 0).$$

Сечением случайного блуждания в момент времени $t_0 + kh$ является дискретная случайная величина, закон распределения вероятностей которой имеет вид:

X	$x - k\Delta$	$x - (k-2)\Delta$	...	$x - (k-2i)\Delta$	...	$x + (k-2i)\Delta$	...	$x + (k-2)\Delta$	$x + k\Delta$
P	$(0{,}5)^k$	$C_k^{k-2} \cdot (0{,}5)^k$	...	$C_k^{k-2i} \cdot (0{,}5)^k$	...	$C_k^{k-2i} \cdot (0{,}5)^k$	...	$C_k^{k-2} \cdot (0{,}5)^k$	$(0{,}5)^k$

$$\left(C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!}, \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \right).$$

Траектории случайного блуждания изображены на рис. 1.29 (точками выделена одна из траекторий).

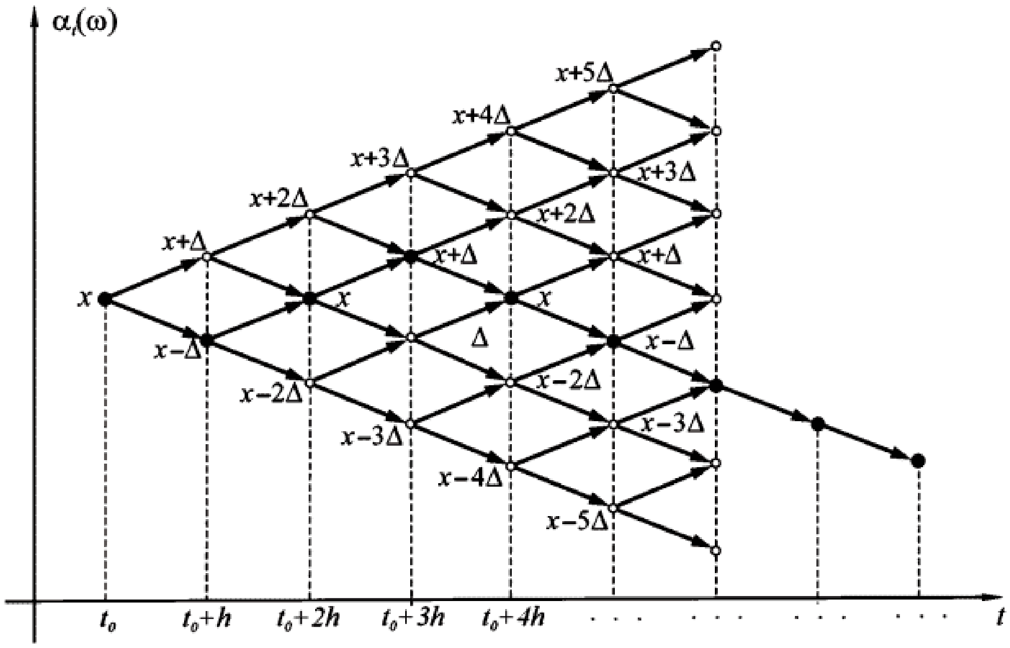


Рис. 1.29. Траектории случайного блуждания

Случайное блуждание α (w, t) обладает независимыми приращениями, причем

$$m_\alpha(t_0 + kh) = x,\ \mathrm{D}_\alpha(t_0 + kh) = k \cdot \Delta^2,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots .$$

1.27.2. Биномиальная модель

Случайный процесс β(w, t), определенный на множестве

$$V = \{t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, \ldots, t_0 + kh, \ldots\},\ h > 0,$$

называется биномиальной моделью (binominal model), если

$$\begin{cases} \beta_{t_0}(\omega) = x \quad (x \text{ — некоторое число}), \\ \beta_{t_0+kh}(\omega) = \beta_{t_0+(k-1)h}(\omega) \cdot \varepsilon_k(\omega), \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \end{cases}$$

где случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ независимы,

$$\varepsilon_k = \begin{cases} u & \text{с вероятностью } p \\ d & \text{с вероятностью } 1 - p \end{cases} \qquad (u > 1,\ \ 0 < d < 1).$$

Сечением биномиальной модели в момент времени $t_0 + kh$ является дискретная случайная величина, закон распределения вероятностей которой имеет вид:

X	xd^k	xud^{k-1}	...	$xu^i d^{k-i}$	...	$xu^{k-1} \cdot d$	xu^k
P	$(1-p)^k$	$c^1_k p \cdot (1-p)^{k-1}$	...	$c^i_k p^i \cdot (1-p)^{k-i}$	...	$c^{k-1}_k p^{k-1}(1-p)$	p^k

Траектории биноминальной модели изображены на рис. 1.30.

Если случайный процесс β (w, t) является биномиальной моделью с параметрами u, d, p, то

$$m_\beta(t_0 + kh) = x\left[up + d(1-p)\right]^k,$$

$$D_\beta(t_0 + kh) = x^2\left\{\left[u^2p + d^2(1-p)\right]^k - \left[up + d(1-p)\right]^{2k}\right\},$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots .$$

Приращения биномиальной модели, вообще говоря, не являются независимыми. Однако случайный процесс ln β (w, t) имеет независимые приращения.

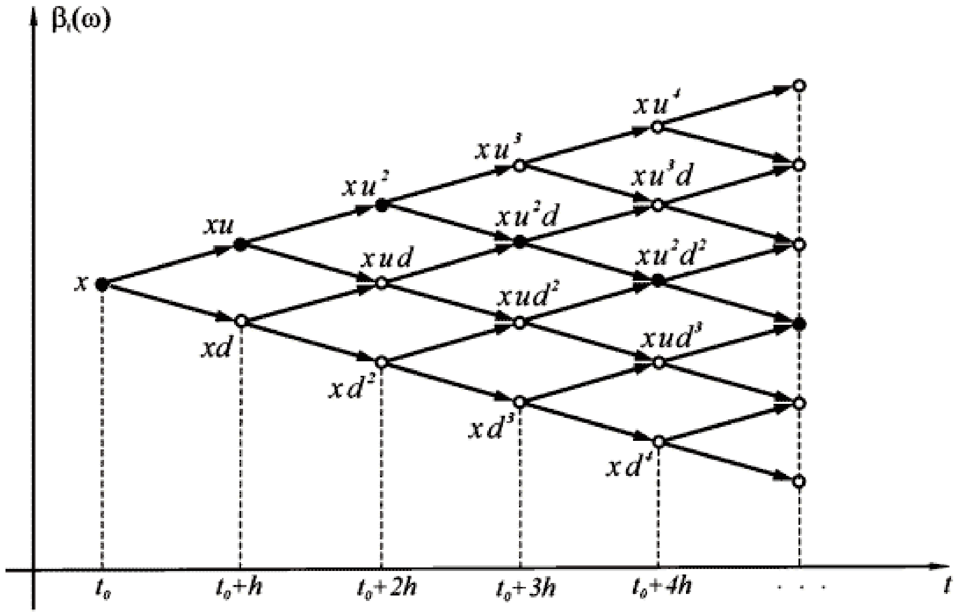


Рис. 1.30. Траектории биномиальной модели

Случайное блуждание и биноминальная модель относятся к случайным процессам с дискретным временем (discrete time process). Важнейшим примером случайного процесса с непрерывным временем (continuous time process) является винеровский случайный процесс.

1.27.3. Винеровский случайный процесс

Случайный процесс w(w, t), определенный на промежутке $[t_0, +\infty)$, называется винеровским случайным процессом (Wienerprocess), если выполняются следующие условия:

1. $w_{t_0}(\omega) = x$ (x — некоторое число).
2. Приращения случайного процесса $w(\omega, t)$ независимы.
3. Приращение $w_t(\omega) - w_s(\omega)$, $t > s$, распределено нормально с параметрами $(0, \sqrt{t-s})$.
4. Все траектории случайного процесса $w(\omega, t)$ непрерывны на промежутке $[t_0, +\infty)$.

Основные утверждения о винеровском случайном процессе

1. Винеровский случайный процесс может быть построен из случайных блужданий с помощью некоторого предельного перехода.
2. Сечение $w_t(\omega)$ винеровского случайного процесса распределено нормально с параметрами $(x, \sqrt{t-t_0})$, т. е.

   $m_w(t) = \mathrm{E}(w_t(\omega)) = x$, $\mathrm{D}_w(t) = \mathrm{D}(w_t(\omega)) = t - t_0$.
3. Если $w_t(\omega)$ и $w_s(\omega)$ — два сечения винеровского случайного процесса, то $\mathrm{Cov}(w_t, w_s) = \min\{t, s\} - t_0$.
4. Плотность совместного распределения вероятностей системы сечений винеровского случайного процесса

   $w_{t_1}(\omega), w_{t_2}(\omega), \ldots, w_{t_n}(\omega)$,

   где $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$,

   имеет вид

$$\mathrm{P}_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{(t_1 - t_0)(t_2 - t_1)\ldots(t_n - t_{n-1})}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1 - x)^2}{t_1 - t_0} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \ldots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}\right]}.$$

Для моделирования траекторий винеровского случайного процесса w (w, t) на заданном промежутке времени $[t_0, T]$ можно применить метод Монте-Карло.

Сам винеровский случайный процесс редко используется для моделирования финансовых показателей, так как имеет постоянное математическое ожидание. Однако на основе винеровского процесса строятся почти все случайные процессы, используемые в настоящее время для моделирования различных финансовых показателей.

1.28. Понятие о стохастических дифференциальных уравнениях

Стохастическим дифференциальным уравнением (stochastic differential equation) называется уравнение вида

$$dx = a(x,\tau)\,d\tau + \sigma(x,\tau)\,dw_\tau, \qquad (1.71)$$

где $a(x,\tau)$, $\sigma(x,\tau)$ — функции двух переменных x и τ;

$w_\tau(\omega) = \omega(\omega,\tau)$ — винеровский случайный процесс.

Решением стохастического дифференциального уравнения (1.71) на промежутке [t, T] называется случайный процесс x (w, τ), удовлетворяющий следующим условиям:

1) все траектории случайного процесса $x(\omega,\tau)$ непрерывны на промежутке $[t, T]$;
2) для любого $\tau \in [t, T]$ при достаточно малом $\Delta\tau$

$$x_{\tau+\Delta\tau}(\omega) - x_\tau(\omega) \approx a(x_\tau(\omega), \tau)\Delta\tau + \sigma(x_\tau(\omega), \tau)(w_{\tau+\Delta\tau}(\omega) - w_\tau(\omega))^* \quad (1.72)$$

* Объяснение точного смысла приближенного равенства (1.72) выходит за рамки книги.

Любое решение стохастического дифференциального уравнения (1.71), удовлетворяющее некоторому начальному условию

$$x_t(\omega) = x \ (x \text{ — число}), \qquad (1.73)$$

называют **случайным процессом Ито** (*Îto process*).

В частности, геометрическим броуновским движением (geometric Brownian motion) является случайный процесс, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dS = (aS)\,d\tau + (\sigma S)\,dw_\tau \ \ (a,\ \sigma \text{ — числа, } \sigma > 0) \qquad (1.74)$$

и начальному условию

$$S_t(\omega) = S. \qquad (1.75)$$

Геометрическое броуновское движение, определяемое условиями (1.74) и (1.75), можно найти в явном виде:

$$S_\tau = Se^{\left(a-\frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau-t)} \cdot e^{\sigma(w_\tau - w_t)}.$$

Свойства геометрического броуновского движения

1. $\mathrm{E}\ln\left(\frac{S_\tau}{S}\right) = \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau - t), \quad m_s(\tau) = S \cdot e^{a(\tau-t)}.$

   В силу второго соотношения параметр a называют **коэффициентом смещения** (*drift*) геометрического броуновского движения.

2. $\mathrm{D}\ln\left(\frac{S_\tau}{S}\right) = \sigma^2(\tau - t).$

   Это означает, что σ является годовой волатильностью показателя, описываемого геометрическим броуновским движением (см. разд. 1.23).

3. При любом τ случайная величина $\ln\left(\frac{S_\tau}{S}\right)$ распределена нормально с параметрами $\left\{\left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau - t);\ \sigma\sqrt{\tau - t}\right\}$. Тогда S_τ имеет логнормальное распределение.

Во многих случаях можно считать, что эволюция цены финансовых активов описывается геометрическим броуновским движением. Такое моделирование оказывается достаточно точным, например, в случае обыкновенных акций.

Пример 1.72. Инвестор считает, что цена бездивидендной акции описывается геометрическим броуновским движением с коэффициентом смещения 0,1 и годовой волатильностью 40 %. В данный момент времени цена акции равна 100 долл. Инвестора интересует цена этой акции через месяц.

В данном случае

$a = 0{,}1;\ \sigma = 0{,}4;\ \tau - t = \dfrac{1}{12};\ S = 100$ долл.

Следовательно, ожидаемое значение цены акции через месяц

$$Se^{a(\tau - t)} = 100 \cdot e^{0,1\left(\frac{1}{12}\right)} = 100{,}84 \text{ долл.}$$

Если S_1 — цена акции через месяц, то $\ln\dfrac{S_1}{100}$ распределен нормально с параметрами $\left(a - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(\tau - t) = 0{,}0017;\ \sigma\sqrt{\tau - t} = 0{,}1155.$

Следовательно, с надежностью 95,5%

$$0{,}00117 - 2 \cdot 0{,}1155 < \ln\left(\frac{S_1}{100}\right) < 0{,}0017 + 2 \cdot 0{,}1155.$$

Тогда

$$79{,}51 \text{ долл.} < S_1 < 126{,}90 \text{ долл.}$$

Кроме того, можно вычислить вероятность того, что через месяц цена акции, например, окажется ниже 90 долл.

Действительно,

$$\mathrm{P}\{S_1 < 90\} = \mathrm{P}\left\{\ln\frac{S_1}{100} < \ln 0{,}9\right\} = \Phi(-z),$$

где $z = \dfrac{\ln 0{,}9 - 0{,}0017}{0{,}1155} = -0{,}93.$

Так как Ф (0,93) = 0,1762 (см. табл. 1.1), то искомая вероятность

$\mathrm{P}\{S_1 < 90\} = 0{,}1762,$ т. е. 17,62%.

Эволюцию цены B_τ облигации с нулевым купоном можно описывать с помощью геометрического броуновского движения, лишь когда до погашения облигации остается достаточно много времени. Действительно, в момент погашения T ее цена всегда равна номиналу, т. е. известна достоверно. Это означает, что $D\ln\left(\dfrac{B_T}{B_0}\right) = 0$ и зависимость $D\ln\left(\dfrac{B_\tau}{B}\right)$ от времени должна иметь вид, изображенный на рис. 1.31.

Таким образом, при моделировании эволюции цены облигации с нулевым купоном необходимо учитывать эффект приближения к номиналу (pull to par), а геометрическое броуновское движение этот эффект не учитывает, так как $D\ln\left(\frac{S_\tau}{S}\right)$ растет во времени линейно.

В общем случае найти решение стохастического дифференциального уравнения (1.71) в явном виде не удается. Поэтому для моделирования траекторий случайного процесса Ито часто применяется метод Монте-Карло.

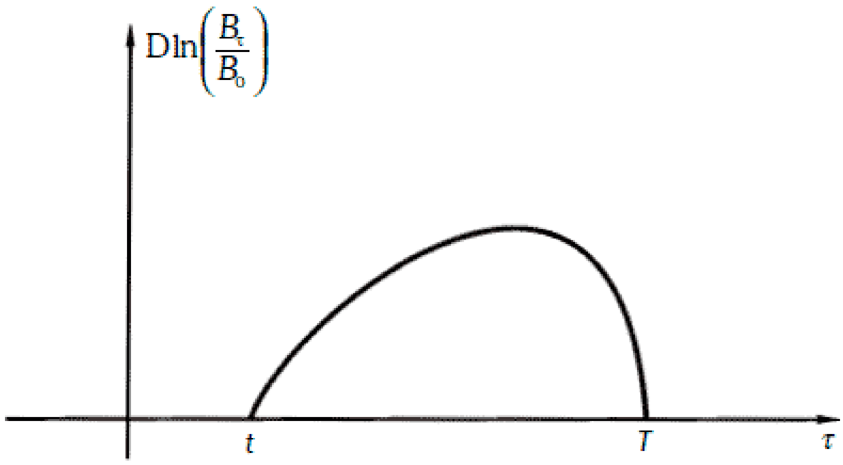


Рис. 1.31

Чтобы смоделировать траекторию случайного процесса Ито на отрезке [t, T], этот отрезок разбивается на n равных частей (n должно быть большим), а затем разыгрывается случайная величина ξ, распределенная нормально с параметрами $\left(0,\ \sqrt{\frac{T-t}{n}}\right)$. Тогда для последовательности случайных чисел δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_n$ будет построена соответствующая последовательность значений $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \ldots, \hat{\xi}_n$ случайной величины ξ, а траектория случайного процесса Ито будет определяться точками:

$$x_1 = x + a(x,\ t) \cdot \left(\frac{T-t}{n}\right) + \sigma(x,\ t) \cdot \hat{\xi}_1;$$

$$x_2 = x_1 + a(x_1, \tau_1) \cdot \left(\frac{T-t}{n}\right) + \sigma(x_1, \tau_1) \cdot \hat{\xi}_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$x_n = x_{n-1} + a(x_{n-1}, \tau_{n-1}) \cdot \left(\frac{T-t}{n}\right) + \sigma(x_{n-1}, \tau_{n-1}) \cdot \hat{\xi}_n \quad \left(\tau_k = t + k \cdot \frac{T-t}{n}\right).$$

Указанным выше способом можно построить сколь угодно много траекторий случайного процесса Ито.

1.29. Основы теории экстремальных значений

Дана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин: $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \dots$ с функцией распределения $F(x)$.

Можно рассмотреть новую последовательность случайных величин $\{M_n\}$, где $M_n = \max\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \dots\}$, $n = 1, 2, 3 \dots$.

Функция распределения случайной величины M_n определяется следующим образом:

$$F_{M_n}(x) = P\{M_n < x\} = P\{\eta_1 < x,\ \eta_2 < x, \dots,\ \eta_n < x\} =$$
$$= P\{\eta_1 < x\} \cdot P\{\eta_2 < x\} \cdot \dots \cdot P\{\eta_n < x\} = F^n(x),$$
$$\forall x \in R.$$

Следовательно, если $F(x) < 1,\ \forall x \in R$, то $\lim\limits_{n\to\infty} F_{M_n}(x) = 0$.

Предположим теперь, что $F(x) < 1$ при $x \leqslant x_F$, но $F(x) = 1$ при $x > x_F$. Тогда,

$$\lim_{n\to\infty} F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le x_F; \\ 1, \text{ при } x > x_F. \end{cases}$$

Однако для большого класса функций распределения $F(x)$ можно подобрать числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, где $a_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, так, чтобы последовательность случайных величин $\left\{\dfrac{M_n - b_n}{a_n}\right\}$ сходилась по распределению к некоторой невырожденной случайной величине. В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема Фишера-Типпета

Дана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \dots$.

Если последовательность случайных величин $\left\{\dfrac{M_n - b_n}{a_n}\right\}$, где $a_n > 0$, сходится по распределению к невырожденной случайной величине η, то функция распределения этой случайной величины определяется параметрами ξ, μ, σ и имеет следующий вид:

$$G_{\xi,\mu,\sigma}(x) = e^{-\left(\max\left\{1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma},\ 0\right\}\right)^{-\frac{1}{\xi}}},\ \forall x \in R. \qquad (1.76)$$

Замечание. Функцию $G_{\xi,\mu,\sigma}(x)$ называют функцией **обобщенного распределения экстремальных значений** (*generalized extreme value distribution*).

Если $\xi > 0$, то

$$G_{\xi,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} e^{-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}, & \text{при } x > \mu - \dfrac{\sigma}{\xi}; \\ 0, & \text{при } x \le \mu - \dfrac{\sigma}{\xi}, \end{cases} \qquad (1.77)$$

т.е. $G_{\xi,\mu,\sigma}(x)$ является функцией **обобщенного распределения Фреше** (*generalized Frechet distribution*).

При $\xi = 0$ функция $G_{\xi,\mu,\sigma}(x) = \lim\limits_{\xi\to\infty} e^{-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma},\,0\right)^{-\frac{1}{\xi}}} = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}$, $\forall x \in R$, т.е. $G_{\xi,\mu,\sigma}(x)$ является **функцией распределения Гумбела** (*Gumbel distribution*).

Если же $\xi < 0$, то

$$G_{\xi,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} e^{-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}, & \text{при } x \le \mu - \dfrac{\sigma}{\xi}; \\ 0, & \text{при } x > \mu - \dfrac{\sigma}{\xi}, \end{cases} \qquad (1.78)$$

т.е. $G_{\xi,\mu,\sigma}(x)$ является **функцией распределения Вейбулла** (*Weibull distribution*).

Следствие из теоремы Фишера – Типпета

Если случайные величины $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ независимы и одинаково распределены, а n достаточно велико, то функция распределения случайной величины $M_n = \max\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$ практически совпадает с функцией обобщенного распределения экстремальных значений (при подходящем выборе параметров ξ, μ и σ).

Предположим, что случайная величина $M_n = \max\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$ имеет распределение Фреше, т. е.

$$F_{M_n}(x)=\begin{cases} e^{-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}, & \text{при } x>\mu-\dfrac{\sigma}{\xi};\\ 0, & \text{при } x\le\mu-\dfrac{\sigma}{\xi};\end{cases}$$

где $\xi>0$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Плотность распределения случайной величины M_n имеет следующий вид (рис. 1.32).

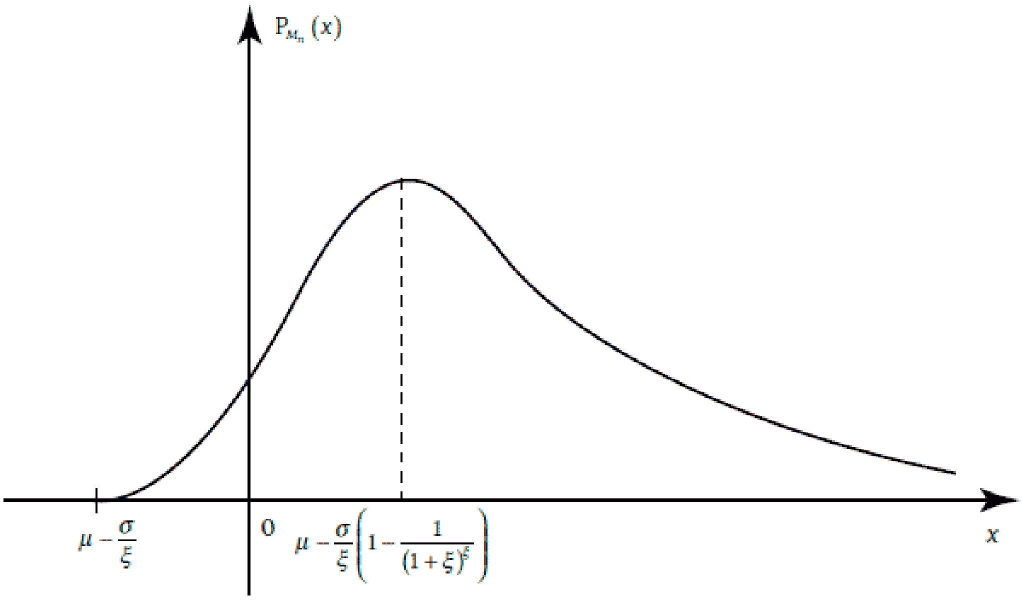


Рис. 1.32. График функции плотности распределения Фреше

2. Математическое ожидание и дисперсии случайной величины M_n можно найти по формулам:

$$E(M_n)=\mu+\sigma\left[\frac{\Gamma(1-\xi)-1}{\xi}\right],\ \text{при } 0<\xi<1; \tag{1.79}$$

$$D(M_n)=\sigma^2\left[\frac{\Gamma(1-2\xi)-\Gamma(1-\xi)}{\xi^2}\right],\ \text{при } 0<\xi<0{,}5, \tag{1.80}$$

где $\Gamma(t)=\int_0^{+\infty}x^{t-1}e^{-x}dx$ (гамма-функция).

Параметры ξ, μ, σ можно подобрать на основе статистических данных.

Для измерений экстремальных событий может быть использовано распределение Парето (Pareto distribution), которое определяется функцией:

$$H_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ 1 - \left(\max\left\{ 1 + \xi \dfrac{x}{\beta}, 0 \right\} \right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{при } x > 0. \end{cases} \tag{1.81}$$

Если $\xi > 0$, то

$$H_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ 1 - \left(1 + \xi \dfrac{x}{\beta} \right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{при } x > 0. \end{cases} \tag{1.82}$$

Если $\xi = 0$, то

$$H_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ 1 - e^{-\frac{x}{\xi}}, & \text{при } x > 0. \end{cases} \tag{1.83}$$

Если же $\xi < 0$, то

$$H_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ 1 - \left(1 + \xi \dfrac{x}{\beta} \right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{при } x \le -\dfrac{\beta}{\xi}; \\ 1, & \text{при } x > -\dfrac{\beta}{\xi}. \end{cases} \tag{1.84}$$

Для большого класса случайных величин η при достаточно большом пороговом значении u справедливо равенство:

$$P\{\eta - u < x \mid \eta \ge u\} \approx H_{\xi,\beta}(x). \tag{1.85}$$

Соотношение (1.85) позволяет оценивать «хвосты» распределений на основе статистических данных.

Литература

1. Барбаумов В. Е., Гладких И. М., Чуйко А. С. Финансовые инвестиции: Учебник. – М.: Финансы и статистика, 2003.

2. Доугерти К. Введение в эконометрику. – М.: ИНФРА-М, 2001.

3. Дуглас Л. Г. Анализ рисков операций с облигациями на рынке ценных бумаг. – М.: Филинъ, 1998.

4. Количественные методы финансового анализа / Под. ред. С. Дж. Брауна, М. П. Крицмена. – М.: ИНФРА-М, 1996.

5. Fabozzi F. J. Fixed income mathematics. 3rd ed. – N.Y.: McGraw-Hill, 1997.

6. Fabozzi F. J. (ed.) Advances in fixed income valuation, modeling and risk management. – Pennsylvania: Associates New Hope, 1997.

II. Производные финансовые инструменты
В. Е. Барбаумов

2.1. Введение

В настоящее время для идентификации и измерения рисков широко используется теория производных финансовых инструментов. Изучение производных финансовых инструментов важно еще и потому, что сами эти инструменты являются источниками рисков как для различных финансовых институтов, так и для финансового рынка в целом. Кроме того, производные финансовые инструменты – одно из важнейших средств хеджирования тех или иных рисков. Именно поэтому данная глава посвящена изучению производных финансовых инструментов.

В главе рассматриваются как простейшие производные финансовые инструменты – форвардные и фьючерсные контракты, свопы, так и более сложные – опционы различных видов и инструменты со встроенными опционами. Основное внимание уделяется методам оценки таких инструментов и основным направлениям их использования.

Важнейшими производными финансовыми инструментами являются классические европейские и американские опционы. Подробно рассматриваются методы оценки таких опционов в случае, когда стоимость исходных активов определяется геометрическим броуновским движением. В частности, приводятся формулы Блэка-Шоулза для оценки европейских опционов и разбирается их использование. Применение классических опционов для хеджирования основных финансовых рисков также рассматривается в данной главе.

В заключительной части главы обосновывается построение биномиальной модели процентной ставки и ее использование для оценки финансовых инструментов, производных от процентных ставок: кэпов, флоров, свопционов и облигаций со встроенными опционами. Кроме того, приводится обзор и других моделей временной структуры процентных ставок.

2.2. Форвардные контракты и их основные характеристики

В настоящее время на развитых финансовых рынках важную роль играют так называемые производные инструменты (derivatives). Простейшим из производных инструментов является форвардный контракт.

Форвардный контракт, или форвард (forward), представляет собой соглашение купить или продать некоторые активы, называемые «базисными» (underlying), в определенный момент времени в будущем по заранее установленной цене. Обычно форвардные контракты заключаются между финансовым институтом и одним из его корпоративных клиентов. Таким образом, в форвардном контракте всегда присутствуют две стороны. При этом говорят, что сторона, согласившаяся в будущем купить активы, занимает длинную позицию, а сторона, согласившаяся продать активы, – короткую.

Так как стороны форвардного контракта равноправны и подвержены одному и тому же риску, то при заключении форвардного контракта никто никому ничего не платит. Это означает, что в момент заключения форвардного контракта стоимость его равна нулю.

Цену, по которой стороны согласились купить (и соответственно продать) активы, называют ценой поставки активов (delivery price). Цену поставки обозначим через K. Момент времени, когда происходит покупка и продажа активов, называют датой исполнения форвардного контракта, или датой поставки. Момент исполнения форвардного контракта обозначим через T.

В момент исполнения форвардного контракта доход (выигрыш) от той или иной позиции определяется в зависимости от цены поставки K и спот-цены активов S_T. Доход от длинной позиции в момент T равен $S_T – K$, а от короткой позиции $K – S_T$ (рис. 2.1 и 2.2).

В дальнейшем мы будем исходить из следующих предположений:

1. Рынки являются совершенными (perfect):

• отсутствуют транзакционные расходы и налоги;

• ни один инвестор, покупая или продавая активы, не может повлиять на цены;

• разрешены короткие продажи.

2. Участники рынка могут неограниченно кредитовать или занимать деньги под одну и ту же безрисковую ставку $\tilde{r}$ (при непрерывном начислении).

3. По форвардным сделкам отсутствует кредитный риск.

4. Отсутствуют прибыльные арбитражные возможности, т. е. нельзя получить безрисковый доход за счет различия цен на активы.

При соблюдении этих условий все форвардные контракты на один и тот же вид активов с датой поставки T будут в данный момент времени заключаться по одной и той же цене поставки.

Действительно, предположим, что в данный момент времени можно заключить форвардные контракты с ценами поставки K_1 и K_2, где $K_1 > K_2$.

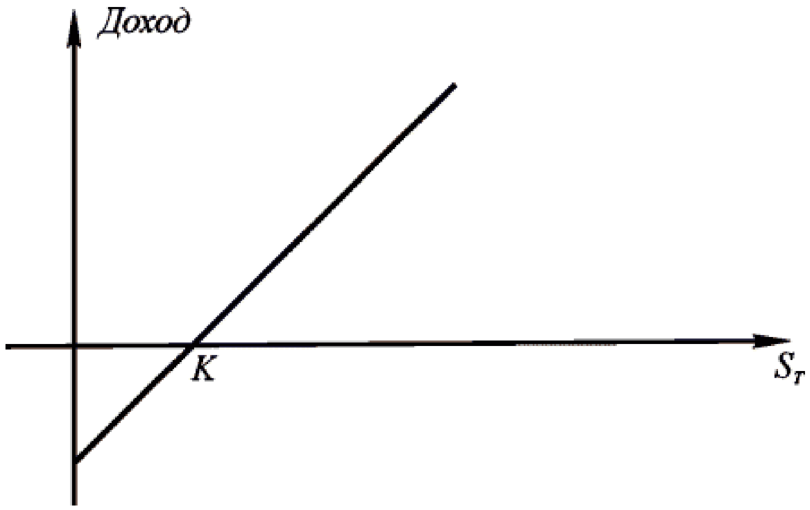


Рис. 2.1. Длинная позиция по форвардному контракту

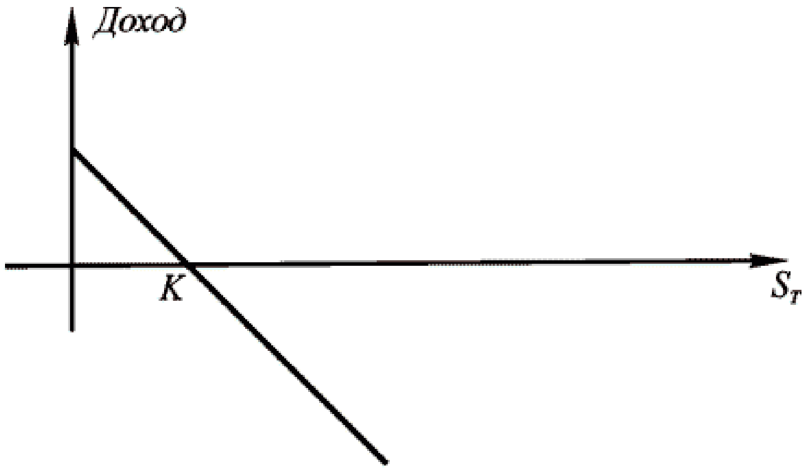


Рис. 2.2. Короткая позиция по форвардному контракту

Тогда можно занять короткую позицию по первому контракту и одновременно длинную позицию по второму контракту, при этом начальные затраты будут нулевыми. В момент T исполнения контрактов будет получен доход $K_1 - K_2$ на каждую единицу активов. Так как отсутствуют прибыльные арбитражные возможности, то этого быть не может. В силу этого закона одной цены имеет смысл следующее определение:

> Цена поставки, по которой в данный момент времени t заключаются форвардные контракты на данный вид активов с датой исполнения T, называется форвардной ценой активов (forward price) на срок T – t лет.

Итак, в начальный момент времени стоимость форвардного контракта равна нулю, так как в этот момент времени форвардная цена активов совпадает с ценой поставки этих активов. Однако через некоторое время форвардная цена активов может измениться, а цена поставки зафиксирована в контракте. Значит, после заключения форвардного контракта та или иная позиция по этому контракту может приобрести положительную или отрицательную стоимость.

Эта величина показывает, что можно было бы получить, продав форвардный контракт, если бы существовал вторичный рынок для таких контрактов.

Если бы существовал вторичный рынок для форвардных контрактов, то стоимости длинной и короткой позиций в форвардном контракте определялись бы следующими равенствами:

$$f_{дл} = (F - K) \cdot e^{-\tilde{r}(T-t)}, \tag{2.1}$$

$$f_{кор} = (K - F) \cdot e^{-\tilde{r}(T-t)}, \tag{2.2}$$

где t – текущий момент времени (после заключения форвардного контракта);
T – дата поставки;
K – цена поставки;
F – форвардная цена на момент t.
Докажем, например, равенство (2.1). Если

Докажем, например, равенство (2.1). Если

$$f_{дл} < (F - K) \cdot e^{-\tilde{r}(T-t)}, \tag{2.3}$$

то займем сумму $f_{дл}$ под безрисковую ставку $\tilde{r}$ на срок T -1 лет, приобретем длинную позицию по форвардному контракту с ценой поставки K и займем короткую позицию по контракту с ценой поставки F. В момент времени T будет получен безрисковый доход:

$$F - K - f_{дл}e^{\tilde{r}(T-t)} = e^{\tilde{r}(T-t)}\left[(F - K) \cdot e^{-\tilde{r}(T-t)} - f_{дл}\right] > 0.$$

При отсутствии прибыльных арбитражных возможностей этого быть не может. Предположим теперь, что

$$f_{дл} > (F - K) \cdot e^{-\tilde{r}(T-t)}. \tag{2.4}$$

В этом случае произведем короткую продажу длинной позиции по форвардному контракту с ценой поставки K, полученную денежную сумму $f_{дл}$ инвестируем под ставку $\tilde{r}$ на T-t лет и займем длинную позицию по форвардному контракту с ценой поставки F. В момент времени T доход составит:

$$f_{дл}e^{\tilde{r}(T-t)} - F + K = e^{\tilde{r}(T-t)}\left[f_{дл} - (F - K) \cdot e^{-\tilde{r}(T-t)}\right] > 0.$$

Так как этот доход, очевидно, является безрисковым, то и неравенство (2.4) выполняться не может. Значит,

$$f_{дл} = (F - K) \cdot e^{-\bar{r}(T-t)}.$$

Популярным видом форвардных контрактов является соглашение о форвардной процентной ставке (forward rate agreement – FRA).

Соглашение о форвардной процентной ставке – это контракт, устанавливающий на определенный будущий период процентную ставку для заемщика и кредитора.

Сторона, занимающая длинную позицию по FRA, обязана через T_1 месяцев от текущего момента взять кредит размером L на срок $T_2 - T_1$ месяцев под контрактную процентную ставку f_k. Сторона, занимающая короткую позицию по FRA, обязана через T_1 месяцев от текущего момента предоставить кредит размером L на срок $T_2 - T_1$ месяцев под контрактную процентную ставку f_k.

Замечание. Обычно разность $T_2 - T_1$, измеряемая в месяцах, является делителем 12, причем если $12/(T_2 - T_1) = m$, то контрактная процентная ставка определяется при начислении m раз в году.

Выигрыш стороны с длинной позицией по FRA на момент T_2 составляет:

$$L\left(\frac{R - f_k}{m}\right),$$

где R – рыночная процентная ставка на момент T_1.

В самом деле, взяв кредит размером L под контрактную процентную ставку f_k, можно полученную сумму инвестировать под рыночную ставку R. Тогда выигрыш на момент T составит:

$$L\left(1 + \frac{R}{m}\right) - L\left(1 + \frac{f_k}{m}\right) = L\left(\frac{R - f_k}{m}\right).$$

Выигрыш стороны с короткой позицией по *FRA* на момент T_2 составляет:

$$L\left(\frac{f_k - R}{m}\right),$$

где R — рыночная процентная ставка на момент T_1.

Пример 2.1. Длинная позиция по FRA эквивалентна следующей стратегии:

• взять кредит за 5 месяцев;

• инвестировать полученную сумму на 2 месяца.

Во многих случаях по условиям FRA фактического размещения денежных средств не производится, а расчеты производятся в момент времени T_1.

В этом случае сторона с длинной позицией по FRA в момент T_1 получает денежную сумму $L\left(\frac{R-f_k}{m}\right)\frac{1}{1+\frac{R}{m}}$, а сторона с короткой позицией ее платит.

При отсутствии арбитражных возможностей контрактная процентная ставка по FRA должна совпадать с предполагаемой форвардной процентной ставкой ${}_{T1}f_{T2}$.

Для доказательства рассмотрим следующие две стратегии:

1) короткая позиция по *FRA* с объемом L и инвестиция денежной суммы $\frac{L}{\left(1+\frac{R_1}{m}\right)^{\frac{T_1}{12}\cdot m}}$ под процентную ставку R_1 на T_2 месяцев;

2) инвестирование денежной суммы $\frac{L}{\left(1+\frac{R_1}{m}\right)^{\frac{T_1}{12}\cdot m}}$ под рыночную ставку R_2 на T_2 месяцев.

Затраты в текущий момент на эти стратегии одинаковы. Следовательно,

$$\frac{L}{\left(1+\frac{R_1}{m}\right)^{\frac{T_1}{12}\cdot m}}\cdot\left(1+\frac{R_2}{m}\right)^{\frac{T_1}{12}\cdot m}=L\left(1+\frac{f_k}{m}\right)^{\frac{T_2-T_1}{12}\cdot m}.$$

Тогда $f_k=m\left[\frac{\left(1+\frac{R_2}{m}\right)^{\frac{T_2}{T_2-T_1}}}{\left(1+\frac{R_1}{m}\right)^{\frac{T_1}{T_2-T_1}}}-1\right]-1={}_{T_1}f_{T_2}$.

2.3. Форвардная цена финансовых активов

Форвардная цена активов зависит от вида этих активов и от того, приносят ли эти активы доходы. В данном разделе мы рассмотрим, как оцениваются форвардные цены финансовых активов, т. е. таких, которые рассматриваются участниками рынка только как средство инвестирования, в отличие от товаров, которые участники рынка рассматривают как средство потребления.

В зависимости от того, приносят ли данные финансовые активы доходы или нет, мы будем рассматривать три различных случая. В каждом из этих случаев предполагается, что соблюдаются предположения о рынке 1-4, изложенные выше.

2.3.1. Форвардная цена активов, не приносящих доходов

Такими активами, например, являются облигации с нулевыми купонами и акции, по которым не выплачиваются дивиденды.

Покажем, что форвардная цена F таких активов определяется равенством:

$$F = Se^{\tilde{r}(T-t)}, \qquad (2.5)$$

где S – спот-цена активов в текущий момент времени t;

$\tilde{r}$ – безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении по инвестициям на T-t лет;

T – дата поставки активов.

Если $F > Se^{\tilde{r}(T-t)}$, то возьмем кредит в размере S под безрисковую процентную ставку $\tilde{r}$ на $T-t$ лет, купим единицу базисных активов и одновременно займем короткую позицию по форвардному контракту на эти активы. В момент поставки активов доход инвестора составит

$$F - Se^{\tilde{r}(T-t)} > 0. \qquad (2.6)$$

При рассматриваемой стратегии не требуется производить начальных затрат, и эта стратегия не содержит риска.

По условию на рынке отсутствуют прибыльные арбитражные возможности.

Тогда $F \le Se^{\tilde{r}(T-t)}$.

Если же

$$F < Se^{\tilde{r}(T-t)},$$

то можно произвести короткую продажу базисных активов, полученную денежную сумму инвестировать под безрисковую ставку $\tilde{r}$ на T – t лет и занять длинную позицию по форвардному контракту на эти активы.

Тогда в момент поставки активов будет получен безрисковый доход

$$Se^{\tilde{r}\,(T-t)} - F > 0,$$

что противоречит нашим предположениям о рынке. Следовательно,

$$F = Se^{\tilde{r}(T-t)}. \tag{2.7}$$

Стоимости длинной и короткой позиций по форвардному контракту на активы, не приносящие доходов, определяются равенствами:

$$f_{дл} = (F - K) \cdot e^{-\tilde{r}(T-t)} = S - Ke^{-\tilde{r}(T-t)},$$
$$f_{кор} = (K - F) \cdot e^{-\tilde{r}(T-t)} = Ke^{-\tilde{r}(T-t)} - S,$$

где S — спот-цена активов в текущий момент времени t;
K — цена поставки активов;
T — дата поставки активов;
$\tilde{r}$ — безрисковая процентная ставка по инвестициям на $T - t$ лет.

Пример 2.2. Найдем форвардную цену акции, не приносящей дивидендов, с поставкой через 3 месяца, если текущая цена акции 40 долл., а безрисковая процентная ставка на 3 месяца равна 3 %.

В данном случае

$$S = 40;\ \tilde{r} = 0,03;\ T - t = \frac{3}{12} = 0,25.$$

Тогда

$$F = 40e^{0,03 \cdot 0,25} = 40,30.$$

Если на рынке форвардная цена акции оказалась равной 42 долл., то возможна следующая прибыльная арбитражная стратегия: занять 40 долл. на 3 месяца под безрисковую ставку 3 %, купить на спот-рынке акцию и занять короткую позицию по форвардному контракту. В момент поставки акции будет получен доход:

$$42 - 40e^{0,03 \cdot 0,25} = 1,70 \text{ долл.}$$

2.3.2. Форвардная цена активов, приносящих известные доходы

Такими активами могут служить купонные облигации или акции с известными заранее дивидендами.

Форвардная цена F активов с известными доходами определяется равенством:

$$F = (S - I) \cdot e^{\tilde{r}(T-t)},$$

где S – спот-цена активов в текущий момент времени t;

I – приведенное значение доходов, поступающих от активов за время от t до T;

T – дата поставки активов.

В самом деле, если $F > (S - I) \cdot e^{\tilde{r}(T-t)}$, то возможна следующая прибыльная арбитражная стратегия: занять сумму S на $T - t$ лет под безрисковую ставку $\tilde{r}$, купить на спот-рынке активы и занять короткую позицию по форвардному контракту. Тогда в момент поставки T будет получен безрисковый доход, так как

$$F + Ie^{\tilde{r}(T-t)} - Se^{\tilde{r}(T-t)} = F - (S - I) \cdot e^{\tilde{r}(T-t)} > 0.$$

Так как по условию отсутствуют прибыльные арбитражные стратегии, то $F \le (S - I) \cdot e^{\tilde{r}(T-t)}$.

Если же $F < (S - I) \cdot e^{\tilde{r}(T-t)}$, то прибыльная арбитражная стратегия может быть таковой: производится короткая продажа базисных активов на спот-рынке, полученные средства инвестируются на $T - t$ лет под безрисковую ставку $\tilde{r}$ и занимается длинная позиция по форвардному контракту на данные активы. Тогда

$$S \cdot e^{\tilde{r}(T-t)} - F - I \cdot e^{\tilde{r}(T-t)} = (S - I) \cdot e^{\tilde{r}(T-t)} - F > 0.$$

Следовательно, неравенство $F < (S - I) \cdot e^{\tilde{r}(T-t)}$ также выполняться не может, и остается единственная возможность:

$$F = (S - I) \cdot e^{\tilde{r}(T-t)}.$$

Стоимости длинной и короткой позиций по форвардному контракту на активы с известными доходами можно найти следующим образом:

$$f_{дл} = S - I - K \cdot e^{-\tilde{r}(T-t)},$$
$$f_{кор} = K \cdot e^{-\tilde{r}(T-t)} - S + I,$$

где K — цена поставки активов;
S — спот-цена активов в текущий момент времени t;
I — приведенное значение доходов за время существования форвардного контракта;
$\tilde{r}$ — безрисковая процентная ставка на срок $T - t$ лет при непрерывном начислении процентов;
T — дата поставки активов.

Пример 2.3. Найдем форвардную цену акции с поставкой через 8 месяцев, по которой дивиденды в размере 5 долл. ожидаются через 2 и 5 месяцев, если текущая цена акции равна 100 долл., а безрисковые процентные ставки на 2, 5 и 8 месяцев соответственно равны 5, 5,5 и 6 % (при непрерывном начислении процентов).

В данном случае

$$S = 100 \text{ долл.}; \; I = 5 \cdot e^{-0{,}05 \cdot \frac{2}{12}} + 5 \cdot e^{-0{,}055 \cdot \frac{5}{12}} = 9{,}85 \text{ долл.}$$

Тогда форвардная цена активов определяется равенством:

$$F = (100 - 9{,}85) \cdot e^{0{,}06 \cdot \frac{8}{12}} = 93{,}83 \text{ долл.}$$

2.3.3. Форвардная цена активов, обладающих постоянной дивидендной доходностью

Предположим, что доходы от активов выплачиваются в виде самих этих активов, причем так, что за время τ единица активов с учетом накопленных доходов превращается в $e^{\tilde{q} \cdot \tau}$ единиц активов. В этом случае говорят, что активы обладают постоянной дивидендной доходностью $\tilde{q}$ при непрерывном начислении.

Иностранную валюту можно рассматривать как актив с постоянной дивидендной доходностью. В самом деле, единицу иностранной валюты можно инвестировать под безрисковую ставку $\tilde{r}_f$ в той стране, где действует эта валюта. Тогда через τ лет единица иностранной валюты превратится в $e^{\tilde{r}_f \cdot \tau}$ единиц этой валюты. Таким образом, иностранная валюта обладает постоянной дивидендной доходностью, и эта дивидендная доходность совпадает с безрисковой процентной ставкой $\tilde{r}_f$.

Во многих случаях фондовые индексы также можно рассматривать как активы с постоянной дивидендной доходностью.

Форвардная цена F активов с постоянной дивидендной доходностью $\tilde{q}$ при непрерывном начислении может быть найдена по формуле:

$$F = Se^{(\tilde{r}-\tilde{q})(T-t)}, \tag{2.8}$$

где S — спот-цена активов в текущий момент времени t;
T — дата поставки активов;
$\tilde{r}$ — безрисковая процентная ставка на срок в $T-t$ лет при непрерывном начислении.

В этом случае для стоимости длинной и короткой позиций по форвардному контракту имеем равенства:

$$f_{дл} = S \cdot e^{-\tilde{q}(T-t)} - K \cdot e^{-\tilde{r}(T-t)},$$
$$f_{кор} = K \cdot e^{-\tilde{r}(T-t)} - S \cdot e^{-\tilde{q}(T-t)}.$$

Пример 2.4. Найдем 8-месячную форвардную цену английского фунта стерлингов, если текущий обменный курс равен 1,8 долл. за фунт, а безрисковые процентные ставки в США и в Англии при непрерывном начислении процентов равны 6 и 4 % соответственно.

В данном случае

$S = 1,8;\ T-t = \dfrac{8}{12};\ \tilde{r} = 0,06;\ \tilde{q} = \tilde{r}_f = 0,04.$

Тогда форвардный обменный курс через 8 месяцев составит

$F = 1,8 \cdot e^{(0,06-0,04)\frac{8}{12}} = 1,8242$ долл.

Если же рыночный форвардный обменный курс окажется равным 1,9 долл., то возможна следующая прибыльная арбитражная стратегия: взять кредит в размере $1,8 \cdot e^{-0,04\frac{8}{12}} = 1,7526$ долл. и купить на валютном спот-рынке $e^{-0,04\frac{8}{12}} = 0,9737$ фунта, инвестировать их в Англии под безрисковую процентную ставку 4% и занять короткую позицию по форвардному контракту на один фунт стерлингов.

Тогда через 8 месяцев будет получен положительный доход в размере:

$$1,9 - 1,8 \cdot e^{-0,04\frac{8}{12}} \cdot e^{0,06\frac{8}{12}} = 1,9 - 1,8e^{(0,06-0,04)\frac{8}{12}} = 1,9 - 1,8242 = 0,0758 \text{ долл.}$$

2.4. Форвардная цена товаров

Пусть F – форвардная цена некоторого товара в момент времени t с датой поставки T.

Покажем, что при отсутствии прибыльных арбитражных возможностей справедливо неравенство

$$F \le (S+u)\cdot e^{\tilde{r}(T-t)}, \qquad (2.9)$$

где S — спот-цена единицы активов в момент времени t;
u — приведенные значения затрат на хранение единицы товара в течение $T-t$ лет;
$\tilde{r}$ — безрисковая процентная ставка на период от t до T при непрерывном начислении процентов.

В самом деле, если

$$F > (S+u)\cdot e^{\tilde{r}(T-t)},$$

то инвестор может поступить следующим образом: занять сумму $S+u$ под безрисковую ставку $\tilde{r}$ на $T-t$ лет, купить единицу товара, оплатить затраты на его хранение и занять короткую позицию по форвардному контракту. Тогда в момент T будет получен доход:

$$F-(S+u)\cdot e^{\tilde{r}(T-t)} > 0.$$

Так как данная стратегия не требует никаких начальных затрат и не содержит риска, то это – прибыльная арбитражная стратегия. Следовательно,

$$F \le (S+u)\cdot e^{\tilde{r}(T-t)}.$$

Выясним теперь, существует ли прибыльная арбитражная стратегия, если

$$F < (S+u)\cdot e^{\tilde{r}(T-t)}.$$

Для получения безрискового дохода необходимо произвести короткую продажу единицы товара. Однако, если этот товар большинством инвесторов используется для потребления или в производстве, сделать это без дополнительных затрат невозможно.

Если же товар в основном используется как средство инвестирования, то возможна следующая стратегия: произвести короткую продажу единицы товара, экономя при этом затраты на хранение товара, полученные средства инвестировать под безрисковую процентную ставку $\tilde{r}$ на T – t лет и занять длинную позицию по форвардному контракту.

В момент T будет получен доход

$$(S+u)\cdot e^{\tilde{r}(T-t)} - F > 0.$$

Таким образом, если товар используется в основном как средство инвестирования, а не потребления, то

$$F = (S+u)\cdot e^{\tilde{r}(T-t)}.$$

Отметим, что к товарам, являющимся средством инвестирования, относятся, например, драгоценные металлы: золото, серебро, платина. Если же товар в основном используется как средство потребления, то

$$F < (S+u)\cdot e^{\tilde{r}(T-t)}.$$

В этом случае существует такое положительное число $\tilde{\alpha}$, что

$$F\cdot e^{\tilde{\alpha}(T-t)} = (S+u)\cdot e^{\tilde{r}(T-t)},$$

которое можно интерпретировать как меру физической полезности данного товара.

Если мера физической полезности товара равна $\tilde{\alpha}$, то форвардная цена этого товара может быть найдена следующим образом:

$$F = (S+u)\cdot e^{(\tilde{r}-\tilde{\alpha})(T-t)},$$

где S — спот-цена товара в текущий момент времени t;
u — приведенное значение затрат на хранение товара;
T — дата поставки товара;
$\tilde{r}$ — безрисковая процентная ставка на $T-t$ лет.

Пример 2.5. Найдем 10-месячную форвардную цену унции серебра, если текущая цена унции серебра равна 9 долл., затраты на хранение (охрану) составляют 0,24 долл. и выплачиваются поквартально вперед, а безрисковая процентная ставка для всех сроков при непрерывном начислении процентов составляет 10 %.

В данном случае

$$S = 9;\ u = 0,24 + 0,24\cdot e^{-0,10\cdot\frac{3}{12}} + 0,24\cdot e^{-0,10\cdot\frac{6}{12}} + 0,24\cdot e^{-0,10\cdot\frac{9}{12}} = 0,93 \text{ долл.}$$

Тогда

$$F = (9+0,93)\cdot e^{0,1\frac{10}{12}} = 10,79 \text{ долл.}$$

Пример 2.6. Оценим 9-месячную меру физической полезности одного барреля сырой нефти, если текущая цена барреля нефти равна 20,00 долл., затраты на хранение барреля нефти равны 0,5 долл. и оплачиваются в конце срока хранения, 9-месячная форвардная цена барреля нефти составляет 20,20 долл., а безрисковая процентная ставка на 9 месяцев при непрерывном начислении равна 8 %.

В данном случае

$$S = 20,00;\ F = 20,20;\ u = 0,5 \cdot e^{-0,08 \cdot \frac{9}{12}} = 0,47 \text{ долл.}$$

Значит, для определения физической полезности барреля нефти имеем уравнение:

$$20,20 \cdot e^{\tilde{\alpha} \cdot \frac{9}{12}} = (20,00 + 0,47) \cdot e^{0,08 \cdot \frac{9}{12}},$$

откуда найдем, что $\tilde{\alpha} = 0,0977$.

Таким образом, 9-месячная мера физической полезности барреля сырой нефти составляет 9,77 %.

2.5. Фьючерсные контракты

Форвардные контракты, торговля которыми производится на специальных биржах, называют фьючерсными контрактами (fиигe contfacts), или просто фьючерсами futures). Естественно, что для организации торговли форвардными контактами по бирже эти контракты должны быть стандартизированы по следующим параметрам:

• объему и качеству поставляемых активов;

• времени, месту и условиям поставки активов.

Еще одним важным отличием фьючерсных контрактов от форвардных является то, что биржа гарантирует исполнение всех фьючерсов, покупаемых или продаваемых на бирже. Для этого каждый форвардный контракт разбивается на два контракта:

• контракт между биржей и стороной, занимающей длинную позицию;

• контракт между биржей и стороной, занимающей короткую позицию.

В каждый момент времени длинная позиция биржи по любому форвардному контракту уравновешивается соответствующей короткой позицией. Таким образом, чистая фьючерсная позиция биржи в каждый момент времени равна нулю.

При такой организации торговли биржа берет на себя весь риск дефолта, так как, если одна из сторон не сможет выполнить свои обязательства по фьючерсному контракту, биржа все равно обязана исполнить другой контракт. Для уменьшения риска дефолта биржа требует, чтобы при открытии той или иной позиции вносилось специальное обеспечение.

При каждой фьючерсной бирже существует клиринговая палата. Все участники фьючерсного рынка должны иметь специальные счета в фирмах, являющихся членами клиринговой палаты. В момент открытия фьючерсной позиции на этот счет вносится специальное обеспечение, называемое начальной маржей (initial mafgin). Начальная маржа вносится либо наличными деньгами, либо высоколиквидными ценными бумагами, либо обеспечивается банковской гарантией. При этом начальная маржа составляет лишь малую долю от объема всего фьючерсного контракта, а счет маржи ежедневно корректируется. Эта процедура носит название переоценки фьючерсной позиции по рыночной стоимости (mavking to mafket – MTM).

Для описания процедуры приведения фьючерсной позиции по рыночной стоимости предположим, что фьючерсная цена закрытия оказалась равной F_2, в то время как фьючерсная цена закрытия предыдущего дня была равна F_1.

Если $F_2 < F_1$, то счет маржи стороны, занимающей длинную позицию, дебетуется на величину $A(F_2 - F_1)$, где A – объем контракта, и кредитуется счет маржи стороны, занимающей короткую позицию. Если же $F_2 > F_1$, то дебетуется счет маржи стороны с короткой позицией, а кредитуется счет маржи стороны с длинной позицией.

Если в конце дня сальдо счета маржи превысит размер начальной маржи, то инвестор имеет право снять излишек с этого счета и использовать его по своему усмотрению. Если же это сальдо окажется меньше размера начальной маржи, то возможны следующие два случая:

• сальдо счета маржи больше некоторой определенной величины, называемой маржей поддержки (maintenance margin);

• сальдо счета маржи меньше маржи поддержки.

В первом случае от инвестора не требуют дополнительного обеспечения. А во втором инвестор получает требование о внесении дополнительного обеспечения для того, чтобы сальдо счета маржи сравнялось с начальной маржей. Это дополнительное обеспечение называют вариационной маржей (variation margin). Обычно маржа поддержки составляет от 75 до 80 % начальной маржи.

Важнейшей особенностью организации фьючерсной торговли является то, что любая открытая позиция может быть закрыта в любой момент времени. Для этого достаточно занять противоположную позицию. При этом доход (убыток) стороны, занимающей длинную позицию, если по счету маржи не начисляются проценты, составит:

$$A\left(F_з - F_{отк}\right),$$

где A — объем контракта;
$F_{отк}$ — фьючерсная цена при открытии позиции;
$F_з$ — фьючерсная цена при закрытии позиции.

Аналогично доход (убыток) стороны, занимающей короткую позицию, будет равен:

$$A\left(F_{отк} - F_з\right).$$

Предположим, что в понедельник 1 марта 1999 г. открыта длинная позиция по казначейским облигациям США номиналом 100 000 долл. при фьючерсной цене $98\frac{5}{32}$. Это означает, что при покупке казначейской облигации номиналом 100 000 долл. инвестор должен будет уплатить сумму, равную

$$98\frac{5}{32}\cdot 1000 = 98\ 156{,}25 \text{ долл.}$$

Начальная маржа для данного контракта составляет 2500 долл., а маржа поддержки установлена в 2000 долл. Данная позиция сохраняется до пятницы 5 марта, а затем закрывается при цене открытия биржи в понедельник 8 марта. Будем считать, что по счету маржи проценты не начисляются и излишки не снимаются. В табл. 2.1 показано, как происходила переоценка фьючерсной позиции по рыночной стоимости. Как видите, убыток инвестора составляет 1062,50 долл.

Таблица 2.1

ПЕРЕОЦЕНКА ФЬЮЧЕРСНОЙ ПОЗИЦИИ ПО РЫНОЧНОЙ СТОИМОСТИ

Дата торгов	Фьючерсная цена закрытия	Приведение к рыночному состоянию	Прочие поступления	Сальдо счета маржи
1.03	$98\frac{8}{32}$	+93,75	2500	2593,75
2.03	$96\frac{22}{32}$	–1562,50	1468,75	2500,00
3.03	$97\frac{0}{32}$	+312,50		2812,50
4.03	$97\frac{19}{32}$	+593,75		3406,25
5.03	$96\frac{30}{32}$	–656,25		2750,00
8.03	$97\frac{3}{32}$ (цена открытия)	+156,25	–2906,25	
			1062,50	

С другой стороны, доход инвестора можно вычислить следующим образом:

$$\left(97\frac{3}{32} - 98\frac{5}{32}\right) \cdot 1000 = -1062,50.$$

Отметим еще несколько особенностей организации фьючерсной торговли на биржах.

1. Биржа устанавливает два вида ограничений:

• на размер чистой позиции инвестора по тем или иным активам. Цель состоит в снижении влияния одного инвестора на фьючерсный рынок;

• на величину дневного изменения фьючерсной цены. Если фьючерсная цена в течение одного дня изменяется на величину, превышающую установленный предел, торги останавливаются на определенное время. Цель установления таких пределов– ограничить размеры требований по марже.

2. В отличие от форвардных контрактов большая часть фьючерсных позиций закрывается до момента исполнения контрактов. Лишь очень небольшая доля контрактов заканчивается поставкой актива. Более того, много фьючерсных контрактов вообще не предполагают поставку активов, а по определенной схеме происходят денежные взаиморасчеты. Во многих случаях биржа требует специального уведомления, если инвестор будет настаивать на поставке активов.

2.6. Фьючерсные и форвардные цены активов

Для большего числа активов существует биржевой фьючерсный рынок. Но банки и другие финансовые институты предлагают различные виды форвардных сделок, т. е. существует еще и внебиржевой (over the counter – OTC) рынок форвардных контрактов. Таким образом, для одного и того же вида активов могут одновременно существовать две цены: форвардная и фьючерсная.

Однако если рынки удовлетворяют следующим условиям:

• отсутствуют транзакционные расходы и налоги;

• на форвардном и фьючерсном рынках инвесторы могут занимать длинные и короткие позиции на любое количество активов (хотя на биржевых рынках и существуют ограничения на чистые фьючерсные позиции);

• все инвесторы обладают достаточным капиталом (или кредитом), чтобы выполнить в случае необходимости все требования по марже;

• отсутствуют прибыльные арбитражные возможности;

• существует безрисковая процентная ставка, причем она одинакова для всех сроков и не меняется во времени, то форвардная и фьючерсная цены на один и тот же вид активов с одинаковыми датами поставки должны совпадать.

Именно вследствие этого утверждения во многих случаях при исследовании фьючерсных цен активов предполагается, что эти цены совпадают с соответствующими форвардными ценами.

Кроме того, при соблюдении вышеперечисленных условий имеет место следующее равенство:

$$F = \mathrm{E}(S_T) \cdot e^{(\bar{r}-\tilde{k})(T-t)}, \tag{2.10}$$

где F — фьючерсная цена активов на момент времени t;
T — дата поставки активов;
$\mathrm{E}(S_T)$ — ожидаемая спот-цена активов на дату поставки активов;
$\tilde{k}$ — ожидаемая доходность рассматриваемых активов за период от t до T.

Равенство (2.10) показывает, что фьючерсные цены активов в ряде случаев могут служить оценкой ожидаемой в будущем спот-цены этих активов. В частности, если активы положительно (отрицательно) коррелируют с рынком, то фьючерсная цена активов будет меньше (больше) ожидаемой спот-цены этих активов.

2.7. Спекулятивные стратегии на фьючерсных рынках

Всех участников фьючерсных рынков можно разделить на три категории: спекулянты, арбитражеры и хеджеры.

Спекулянтами (speculator) называют участников рынка, основная цель которых сводится к получению прибыли на основе прогнозирования будущих цен на рынке.

Арбитражерами (arbitrageur) считают тех участников рынка, которые получают безрисковую прибыль за счет временных рассогласований цен на различные виды активов.

Наконец, к **хеджерам** (hedger) относят тех, кто занимает определенные позиции по базисным активам и стремится застраховать свои позиции от неблагоприятных изменений цен на эти активы.

Обычно на биржах ведется торговля теми фьючерсными контрактами, к которым проявляют интерес все три категории участников рынка.

Рассмотрим вначале простейшие спекулятивные стратегии на фьючерсных рынках.

Предположим, что инвестор убежден в том, что между моментами времени t_1 и t_2 фьючерсная цена некоторых активов будет расти. В этом случае он в момент времени t_1 занимает длинную позицию по фьючерсному контракту на эти активы. Закрыв свою позицию в момент времени t_2, инвестор получит прибыль (убыток) в размере:

$$A\left[F(t_2) - F(t_1)\right],$$

где A — объем одного фьючерсного контракта с датой поставки T, $T > t_2$;
$F(t_1)$, $F(t_2)$ — фьючерсные цены на базисные активы в моменты времени t_1 и t_2 соответственно.

Таким образом, если оправдается прогноз инвестора о росте фьючерсной цены активов, то он получит прибыль. Однако если его прогноз окажется неверным, то он может понести и большие убытки.

С другой стороны, если инвестор считает, что между моментами времени t_1 и t_2 фьючерсная цена будет падать, то он может в момент времени t_1 занять короткую позицию по соответствующему фьючерсному контракту. Закрыв эту позицию в момент времени t_2, инвестор получит прибыль (убыток) в размере

$$A\left[F(t_1) - F(t_2)\right].$$

Следовательно, если оправдается прогноз инвестора о падении фьючерсной цены, то он получит прибыль, в противном случае инвестор может понести большие убытки.

В целом, простейшие спекулятивные стратегии на фьючерсных рынках характеризуются высоким уровнем риска, но при благоприятных обстоятельствах могут обеспечить большую прибыль. По существу, эти стратегии эквивалентны аналогичным стратегиям на спот-рынках активов. Однако транзакционные расходы на фьючерсных рынках значительно ниже таких расходов на спот-рынках. Поэтому спекулятивные стратегии на фьючерсных рынках более привлекательны для инвесторов, чем аналогичные стратегии на спот-рынках.

Вторая группа спекулятивных стратегий на фьючерсных рынках опирается на прогноз поведения спреда (разницы) между фьючерсными ценами одних и тех же активов с различными датами поставок.

Предположим, что в данный момент времени t фьючерсные цены некоторых активов с датами поставок T_1 и T_2, $T_1 < T_2$ соответственно равны $^{F}T^{(t)}$ и $^{F}T2^{(t)}$.

Если инвестор считает, что между моментами времени t_1 и t_2 межвременной спред будет возрастать, то он может в момент времени t_1 занять длинную позицию по долгосрочному фьючерсному контракту и короткую – по краткосрочному контракту. Закрыв свои позиции в момент времени t, инвестор получит прибыль (убыток) в размере:

$$A\left[F_{T_2}(t_2)-F_{T_2}(t_1)\right]+A\left[F_{T_1}(t_1)-F_{T_1}(t_2)\right]=$$
$$=A\left[\left(F_{T_2}(t_2)-F_{T_1}(t_2)\right)-\left(F_{T_2}(t_1)-F_{T_1}(t_1)\right)\right].$$

Если же инвестор убежден, что между моментами времени t_1 и t_2 межвременной спред будет уменьшаться, то в момент времени t_1 он может занять короткую позицию по долгосрочному контракту и длинную – по краткосрочному фьючерсному контракту. Закрыв эти позиции в момент времени t_2, инвестор получит прибыль (убыток) в размере:

$$A\left[F_{T_2}(t_1)-F_{T_2}(t_2)\right]+A\left[F_{T_1}(t_2)-F_{T_1}(t_1)\right]=$$
$$=A\left[\left(F_{T_2}(t_1)-F_{T_1}(t_1)\right)-\left(F_{T_2}(t_2)-F_{T_1}(t_2)\right)\right].$$

В обоих случаях, если оправдается прогноз инвестора о поведении межвременного спреда фьючерсных цен, он получит прибыль. Если же прогноз инвестора окажется неверным, то понесет убытки.

В целом стратегии, опирающиеся на межвременные спреды фьючерсных цен, являются менее рискованными, чем простейшие спекулятивные стратегии, и в то же время менее доходными.

Спекулятивные стратегии могут строиться и на основе прогнозирования отношения фьючерсных цен на различные виды активов.

Пусть F(t) и Ф(0 – фьючерсные цены в момент времени t на активы двух разных видов (и, вообще говоря, с разными датами поставок).

Если инвестор считает, что за время от момента t_I до момента t_2 отношение фьючерсных цен $\dfrac{F(t)}{\Phi(t)}$ будет расти, то он может в момент времени t_1 занять длинную позицию по фьючерсным контрактам на активы первого вида и короткую позицию по фьючерсным контрактам на активы второго вида. При этом число фьючерсных контрактов $N_:$ и N_2 инвестор должен выбрать так, чтобы соблюдалось следующее равенство:

$$N_1A_1F(t_1) \approx N_2A_2\Phi(t_1).$$

Закрыв свои позиции в момент времени t_2, инвестор получит прибыль (убыток) в размере:

$$N_1A_1\left[F(t_2)-F(t_1)\right]+N_2A_2\left[\Phi(t_1)-\Phi(t_2)\right]=$$
$$=N_1A_1F(t_2)-N_2A_2\Phi(t_2)=N_1A_1\Phi(t_2)\left[\frac{F(t_2)}{\Phi(t_2)}-\frac{N_2A_2}{N_1A_1}\right]=$$
$$=N_1A_1\Phi(t_2)\left[\frac{F(t_2)}{\Phi(t_2)}-\frac{F(t_1)}{\Phi(t_1)}\right].$$

Аналогичным образом инвестор может применить спекулятивную стратегию, если он прогнозирует убывание отношения фьючерсных цен активов. В обоих случаях, если оправдается прогноз инвестора, он получит соответствующую прибыль.

Пример 2.7. Текущие фьючерсные цены американского доллара и немецкой марки – 30 и 16 руб. соответственно. Объемы имеющихся на рынке фьючерсных контрактов – 1000 долл. и 2000 марок. Инвестор, считающий, что отношение фьючерсных цен доллара и марки будет снижаться, занимает короткую позицию по 32 фьючерсам на доллары и длинную позицию по 30 фьючерсам на марки (в этом случае 32 • 1000 -30 = 30 • 2000 -16).

Если через месяц фьючерсные цены доллара и марки окажутся равными 29 и 15,50 руб. соответственно, то инвестор должен получить прибыль, так как

$$\frac{30}{16} > \frac{29}{15,5}(1,875 > 1,871).$$

Действительно, прибыль инвестора составит:

$$32 \cdot 1000 \cdot (30-29) + 30 \cdot 2000 \cdot (15{,}5-16) = 2000 \text{ руб.}$$

Если же через месяц фьючерсные цены доллара и марки будут равны 31 и 16,4 руб., то инвестор должен понести убытки, так как

$$\frac{30}{16} < \frac{31}{16,4}(1,875 < 1,890).$$

Действительно,

$$32 \cdot 1000 \cdot (30-31) + 30 \cdot 2000 \cdot (16{,}4-16{,}0) = -8000 \text{ руб.}$$

2.8. Фьючерсы на казначейские векселя. Процентный арбитраж

Рассмотрим Т-летний фьючерсный контракт на казначейский вексель номиналом А, погашаемый через τ лет после момента его поставки. Фьючерсную цену казначейского векселя в данный (нулевой) момент времени обозначим через $F_T(\tau)$.

Если данный фьючерсный контракт можно рассматривать как форвардный, то имеет место следующее равенство:

$$F_T(\tau) = Ae^{-f(T,\, T+\tau)\cdot\tau}, \tag{2.11}$$

где $f(T, T+\tau) = \dfrac{\tilde{r}(T+\tau)\cdot(T+\tau) - \tilde{r}(T)\cdot T}{\tau}$;

$\tilde{r}(T)$, $\tilde{r}(T+\tau)$ — безрисковые процентные ставки по инвестициям на T и $T+\tau$ лет соответственно (при непрерывном начислении процентов).

В самом деле, рассмотрим следующую стратегию:

1. Взять кредит в размере $F_T(\tau)\cdot e^{-\tilde{r}(T)\cdot T}$ на срок $T+\tau$ лет под безрисковую ставку $\tilde{r}(T+\tau)$.
2. Занять длинную позицию по фьючерсному контракту на казначейский вексель.
3. Инвестировать имеющуюся денежную сумму $F_T(\tau)\cdot e^{-\tilde{r}(T)\cdot T}$ на T лет под безрисковую ставку $\tilde{r}(T)$.

Тогда в момент T будет получена сумма $F_T(\tau)\cdot e^{-\tilde{r}(T)\cdot T}\cdot e^{\tilde{r}(T)\cdot T} = F_T(\tau)$, за счет которой будет приобретен казначейский вексель согласно фьючерсному контракту. На момент времени $T+\tau$ лет доход инвестора от данной стратегии составит $A - F_T(\tau)\cdot e^{-\tilde{r}(T)\cdot T}\cdot e^{\tilde{r}(T+\tau)\cdot(T+\tau)} = A - F_T(\tau)\cdot e^{f(T,\, T+\tau)\cdot\tau}$.

Так как стратегия, очевидно, является безрисковой, то при отсутствии прибыльных арбитражных возможностей доход от стратегии должен быть нулевым, т. е.

$$A - F_T(\tau)\cdot e^{f(T,\, T+\tau)\cdot\tau} = 0$$

и

$$F_T(\tau) = A\cdot e^{-f(T,\, T+\tau)\cdot\tau}.$$

Пример 2.8. Определим фьючерсную цену 90-дневного казначейского векселя номиналом 1 млн долл., когда до момента передачи остается 140 дней, а безрисковые процентные ставки (при непрерывном начислении) на 140 и 230 дней равны 8 и 8,25 % соответственно.

В данном случае

$$T = \frac{140}{365} = 0,383562;\ \tau = \frac{90}{365} = 0,246575;\ T + \tau = \frac{230}{365} = 0,630137;$$

$$f(T, T+\tau) = \frac{0,0825 \cdot 0,630137 - 0,08 \cdot 0,383562}{0,246575} = 0,086389.$$

$$F_T(\tau) = 1\,000\,000 \cdot e^{-0,086389 \cdot 0,246575} = 978\,924 \text{ долл.}$$

$$F_T^{\text{рын}}(\tau), \text{ причем } F_T^{\text{рын}}(\tau) \neq F_T(\tau).$$

Тогда

$$F_T^{\text{рын}}(\tau) \neq A \cdot e^{\tilde{r}(T) \cdot T - \tilde{r}(T+\tau) \cdot (T+\tau)},$$

где $\tilde{r}(T)$, $\tilde{r}(T+\tau)$ — безрисковые процентные ставки при непрерывном начислении на сроки в T и $T+\tau$ лет соответственно.

Число $\tilde{R}(T)$, удовлетворяющее равенству

$$F_T^{\text{рын}}(\tau) = A \cdot e^{\tilde{R}(T) \cdot T - \tilde{r}(T+\tau)(T+\tau)}, \qquad (2.12)$$

называется **неявной** (предполагаемой) **ставкой репо** (*implied repo rate*).

Замечание. Корпоративные клиенты финансовых институтов, владеющие рыночными ценными бумагами, могут получать краткосрочные кредиты под льготную процентную ставку, называемую ставкой репо (repo rate). Для этого корпорация продает ценные бумаги финансовому институту и одновременно заключает соглашение с ним о выкупе этих ценных бумаг. Так как такой кредит имеет хорошее обеспечение, то ставка по нему может быть снижена. Неявная же ставка репо – это, в сущности, такая ставка, под которую можно брать краткосрочный кредит с помощью фьючерсного рынка.

Неявная ставка репо позволяет выявить наличие прибыльных арбитражных возможностей и выбрать соответствующую стратегию.

Действительно, если $\tilde{R}(T) \neq \tilde{r}(T)$, где $\tilde{r}(T)$ — безрисковая процентная ставка на T лет, а $\tilde{R}(T)$ — неявная ставка репо, то на рынке должна быть прибыльная арбитражная возможность.

Если $\tilde{R}(T) < \tilde{r}(T)$, то прибыльной будет следующая арбитражная стратегия:

1) занять сумму $F_T^{\text{рын}}(\tau) \cdot e^{-\tilde{r}(T)\cdot T}$ на $T + \tau$ лет под ставку $\tilde{r}(T+\tau)$;
2) инвестировать полученную сумму на T лет под ставку $\tilde{r}(T)$;
3) занять длинную позицию по фьючерсному контракту на казначейский вексель.

Если же $\tilde{R}(T) > \tilde{r}(T)$, то прибыльной является такая арбитражная стратегия:

1) занять сумму $A \cdot e^{-\tilde{r}(T+\tau)\cdot(T+\tau)}$ на T лет под безрисковую процентную ставку $\tilde{r}(T)$;
2) купить казначейский вексель номиналом A, погашаемый через $T + \tau$ лет;
3) занять короткую позицию по фьючерсному контракту на казначейский вексель, погашаемый через τ лет после передачи.

Пример 2.9. Рыночная фьючерсная цена 90-дневного казначейского векселя номиналом 1 млн долл. с передачей через 56 дней равна 969 500 долл. Определим неявную ставку репо по кредитам на 56 дней, если безрисковая процентная ставка на 146 дней равна 12,27 %.

В данном случае

$$F_T^{\text{рын}}(\tau) = 969\ 500 \text{ долл.}; \ \tilde{r}(T+\tau) = 0,1227;$$

$$T + \tau = \frac{146}{365} = 0,4; \ T = \frac{56}{365} = 0,153425.$$

Неявная ставка репо является решением уравнения

$$969\ 500 = 1\ 000\ 000 \cdot e^{\tilde{R}(T)\cdot 0,153425 - 0,1227\cdot 0.4},$$

значит,

$$\tilde{R}(T) = 0,1180, \text{ т. е. } 11,80\%.$$

Предположим, что безрисковая процентная ставка на 56 дней равна 11 %. Тогда можно поступить следующим образом: занять 1 000 000- $e^{-0,1227\ 0,4}$ = 952 105 долл. на 56 дней под ставку 11 % и купить казначейский вексель номиналом 1 млн долл., погашаемый через 146 дней (его цена в точности равна 952 105 долл.), одновременно заняв короткую позицию по 56-дневному фьючерсному контракту на данный казначейский вексель. Через 56 дней будет получен арбитражный доход в размере:

$$969\ 500 - 952\ 105 \cdot e^{0{,}11 \cdot \frac{56}{365}} = 1190{,}24 \text{ долл.}$$

2.9. Фьючерсные контракты на краткосрочные процентные ставки

Рассмотрим фьючерсный контракт на 3-месячную ставку LIBOR, который является одним из наиболее популярных фьючерсных контрактов на процентные ставки. Такой контракт можно интерпретировать следующим образом: сторона, занимающая короткую позицию, обязана в определенный будущий момент времени T (дату поставки) разместить 1 млн долл. на евродолларовом депозите под установленную заранее трехмесячную ставку f (играющую роль цены поставки).

Рассмотренная выше ситуация эквивалентна той, когда сторона, занимающая короткую позицию, размещает в момент времени T сумму 1 млн долл. под 3-месячную ставку LIBOR r, действующую в этот момент времени, а через три месяца после расчетной даты T получает еще и компенсацию в размере

$$1\ 000\ 000 \cdot \left(\frac{f-r}{4}\right).$$

Действительно, имеет место равенство:

$$1\ 000\ 000 \cdot \left(1+\frac{r}{4}\right) + 1\ 000\ 000 \cdot \left(\frac{f-r}{4}\right) = 1\ 000\ 000 \cdot \left(1+\frac{f}{4}\right).$$

Поэтому во фьючерсном контракте на 3-месячную ставку LIBOR не предполагается размещение средств на евродолларовых депозитах, а все расчеты производятся в наличной форме.

Через три месяца после расчетной даты T сторона, занимающая короткую позицию, получает денежную сумму в размере

$$1\ 000\ 000 \cdot \left(1+\frac{r}{4}\right) + 1\ 000\ 000 \cdot \left(\frac{f-r}{4}\right) = 1\ 000\ 000 \cdot \left(1+\frac{f}{4}\right.$$

а сторона, занимающая длинную позицию, ее платит.

Стандартные арбитражные рассуждения показывают, что форвардная 3-месячная ставка LIBOR должна удовлетворять следующему равенству:

$$ {}_nf_1 = 4 \cdot \left[\frac{\left(1+\frac{r_{n+1}}{4}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{r_n}{4}\right)^{n}} - 1 \right], \tag{2.13}$$

где ${}_nf_1$ — форвардная трехмесячная ставка LIBOR через n 3-месячных периодов;

$r_n(r_{n+1})$ — процентная ставка при начислении процентов 4 раза в год, под которую можно в данный момент времени размещать средства на евродолларовом рынке на n (соответственно на $n + 1$) 3-месячных периодов.

2.10. Фьючерсные контракты на казначейские облигации

Фьючерсные контракты на казначейские облигации рассмотрим на примере фьючерсных контрактов на долгосрочные казначейские облигации США, торговля которыми ведется на Chicago Board of Trade (CBOT).

По условиям такого контракта производится передача любой казначейской облигации номиналом 100 000 долл., не погашаемой и не отзываемой в течение 15 лет после даты передачи.

После передачи облигации сторона, занимающая короткую позицию по фьючерсному контракту, получает денежную сумму в размере:

Конец ознакомительного фрагмента.