ЯКОВ ПЕРЕЛЬМАН

Математические головоломки

Яков Исидорович Перельман

Математические головоломки

Серия «Перельман: занимательная наука»

Текст предоставлен правообладателем
http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=48800124
Математические головоломки / Я.И.Перельман: АСТ; Москва; 2019
ISBN 978-5-17-118117-8

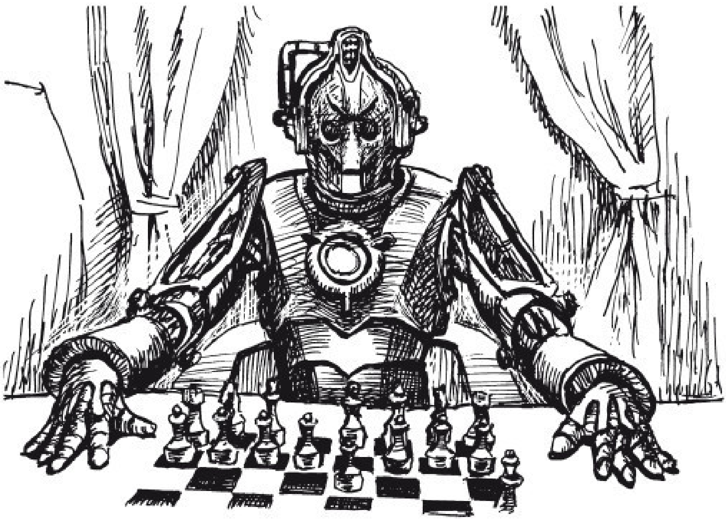
Аннотация

«Математические головоломки» Якова Перельмана – это увлекательнейшая книга, которая познакомит читателя с пятым, шестым и седьмым математическим действием, а именно: с возведением в степень, извлечением корня и логарифмами. И, конечно, не обойдется дело без парадоксов, задач, арифметических шуток и головоломок. Для среднего школьного возраста.

Содержание

Яков Перельман
Математические головоломки

Глава первая
Пятое математическое действие



Пятое действие

Алгебру называют нередко «арифметикой семи действий», подчеркивая, что к четырем общеизвестным математическим операциям она присоединяет три новых: возведение в степень и два ему обратных действия.

Наши алгебраические беседы начнутся с «пятого действия» – возведения в степень.

Вызвана ли потребность в этом новом действии практической жизнью? Безусловно. Мы очень часто сталкиваемся с ним в реальной действительности. Вспомним о многочисленных случаях вычисления площадей и объемов, где обычно приходится возводить числа во вторую и третью степени. Далее: сила всемирного тяготения, электростатическое и магнитное взаимодействия, свет, звук ослабевают пропорционально второй степени расстояния. Продолжительность обращения планет вокруг Солнца (и спутников вокруг планет) связана с расстояниями от центра обращения также степенной зависимостью: вторые степени времен обращения относятся между собою, как третьи степени расстояний.

Не надо думать, что практика сталкивает нас только со вторыми и третьими степенями, а более высокие показатели существуют только в упражнениях алгебраических задачников. Инженер, производя расчеты на прочность, сплошь и рядом имеет дело с четвертыми степенями, а при других вычислениях (например, диаметра паропровода) – даже с шестой степенью. Исследуя силу, с какой текучая вода увлекает камни, гидротехник наталкивается на зависимость также шестой степени: если скорость течения в одной реке вчетверо больше, чем в другой, то быстрая река способна перекатывать по своему ложу камни в 4^6, т. е. в 4096 раз более тяжелые, чем медленная.

С еще более высокими степенями встречаемся мы, изучая зависимость яркости раскаленного тела – например, нити накала в электрической лампочке от температуры. Общая яркость растет при белом калении с двенадцатой степенью температуры, а при красном – с тридцатой степенью температуры («абсолютной», т. е. считаемой от минус 273°). Это означает, что тело, нагретое, например, от 2000° до 4000° (абсолютных), т. е. в два раза сильнее, становится ярче в 2^{12}, иначе говоря, более чем в 4000 раз. О том, какое значение имеет эта своеобразная зависимость в технике изготовления электрических лампочек, мы еще будем говорить в другом месте.

Астрономические числа

Никто, пожалуй, не пользуется так широко пятым математическим действием, как астрономы. Исследователям Вселенной на каждом шагу приходится встречаться с огромными числами, состоящими из одной-двух значащих цифр и длинного ряда нулей. Изображение обычным образом подобных числовых исполинов, справедливо называемых «астрономическими числами», неизбежно вело бы к большим неудобствам, особенно при вычислениях. Расстояние, например, до туманности Андромеды, написанное обычным порядком, представляется таким числом километров:

95 000 000 000 000 000 000.

При выполнении астрономических расчетов приходится к тому же выражать зачастую небесные расстояния не в километрах или более крупных единицах, а в сантиметрах. Рассмотренное расстояние изобразится в этом случае числом, имеющим на пять нулей больше:

9 500 000 000 000 000 000 000 000.

Массы звезд выражаются еще бóльшими числами, особенно если их выражать, как требуется для многих расчетов, в граммах. Масса нашего Солнца в граммах равна:

1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

Легко представить себе, как затруднительно было бы производить вычисления с такими громоздкими числами и как легко было бы при этом ошибиться. А ведь здесь приведены далеко еще не самые большие астрономические числа.

Пятое математическое действие дает вычислителям простой выход из этого затруднения. Единица, сопровождаемая рядом нулей, представляет собой определенную степень десяти:

$100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, $10\,000 = 10^4$ и т. д.

Приведенные раньше числовые великаны могут быть поэтому представлены в таком виде:

первый. . . . . $95 \cdot 10^{23}$

второй. . . . . $1983 \cdot 10^{30}$

Делается это не только для сбережения места, но и для облегчения расчетов. Если бы потребовалось, например, оба эти числа перемножить, то достаточно было бы найти произведение $95 \cdot 1983 = 188\,385$ и поставить его впереди множителя $10^{23+30} = 10^{53}$:

$$950 \cdot 10^{23} \cdot 1983 \cdot 10^{30} = 188\,385 \cdot 10^{53}.$$

Это, конечно, гораздо удобнее, чем выписывать сначала число с 21 нулем, затем с 30 и, наконец, с 53 нулями, – не только удобнее, но и надежнее, так как при писании десятков нулей можно проглядеть один-два нуля и получить неверный результат.

Сколько весит весь воздух

Чтобы убедиться, насколько облегчаются практические вычисления при пользовании степенным изображением больших чисел, выполним такой расчет: определим, во сколько раз масса земного шара больше массы всего окружающего его воздуха.

На каждый кв. сантиметр земной поверхности воздух давит, мы знаем, с силой около килограмма. Это означает, что вес того столба атмосферы, который опирается на 1 кв. см, равен 1 кг. Атмосферная оболочка Земли как бы составлена вся из таких воздушных столбов; их столько, сколько кв. сантиметров содержит поверхность нашей планеты; столько же килограммов весит вся атмосфера. Заглянув в справочник, узнаем, что величина поверхности земного шара равна 510 млн кв. км, т. е. $51 \cdot 10^7$ кв. км.

Рассчитаем, сколько квадратных сантиметров в квадратном километре. Линейный километр содержит 1000 м, по 100 см в каждом, т. е. равен 10^5 см, а кв. километр содержит $(10^5)^2 = 10^{10}$ кв. сантиметров. Во всей поверхности земного шара заключается поэтому:

$$51 \cdot 10^7 \cdot 10^{10} = 51 \cdot 10^{17} \text{ кв. сантиметров.}$$

Столько же килограммов весит и атмосфера Земли. Переведя в тонны, получим:

$$51 \cdot 10^{17} : 1000 = 51 \cdot 10^{17} : 10^3 = 51 \cdot 10^{17-3} = 51 \cdot 10^{14}.$$

Масса же земного шара выражается числом:

$6 \cdot 10^{21}$ тонн.

Чтобы определить, во сколько раз наша планета тяжелее ее воздушной оболочки, производим деление:

$6 \cdot 10^{21} : 51 \cdot 10^{14}$» 10^6,

т. е. масса атмосферы составляет примерно миллионную долю массы земного шара.

Разнообразие погоды

ЗАДАЧА

Будем характеризовать погоду только по одному признаку, – покрыто ли небо облаками или нет, т. е. станем различать лишь дни ясные и пасмурные. Как вы думаете, много ли при таком условии возможно недель с различным чередованием погоды?

Казалось бы, немного: пройдет месяца два, и все комбинации ясных и пасмурных дней в неделе будут исчерпаны; тогда неизбежно повторится одна из тех комбинаций, которые уже наблюдались прежде.

Попробуем, однако, точно подсчитать, сколько различных комбинаций возможно при таких условиях. Это – одна из задач, неожиданно приводящих к пятому математическому действию.

Итак: сколькими различными способами могут на одной неделе чередоваться ясные и пасмурные дни?

РЕШЕНИЕ

Первый день недели может быть либо ясный, либо пасмурный; имеем, значит, пока две «комбинации».

В течение двухдневного периода возможны следующие чередования ясных и пасмурных дней:

ясный и ясный
ясный и пасмурный
пасмурный и ясный
пасмурный и пасмурный.

Итого в течение двух дней 2^2 различного рода чередований. В трехдневный промежуток каждая из четырех комбинаций первых двух дней сочетается с двумя комбинациями третьего дня; всех родов чередований будет

$$2^2 \cdot 2 = 2^3.$$

В течение четырех дней число чередований достигнет

$$2^3 \cdot 2 = 2^4.$$

За пять дней возможно 2^5, за шесть дней 2^6 и, наконец, за неделю $2^7 = 128$ различного рода чередований.

Отсюда следует, что недель с различным порядком следования ясных и пасмурных дней имеется 128. Спустя $128 \cdot 7 = 896$ дней непременно должно повториться одно из прежде бывших сочетаний; повторение, конечно, может случиться и раньше, но 896 дней – срок, по истечении которого такое повторение неизбежно. И обратно: может пройти целых два года, даже больше (2 года и 166 дней), в течение которых ни одна неделя по погоде не будет похожа на другую.

Замóк с секретом

ЗАДАЧА

В одном советском учреждении обнаружен был несгораемый шкаф, сохранившийся с дореволюционных лет. Отыскался и ключ к нему, но чтобы им воспользоваться, нужно было знать секрет замка; дверь шкафа открывалась лишь тогда, когда имевшиеся на двери 5 кружков с алфавитом на их ободах (36 букв) устанавливались на определенное слово. Так как никто этого слова не знал, то, чтобы не взламывать шкафа, решено было перепробовать все комбинации букв в кружках. На составление одной комбинации требовалось 3 секунды времени.

Можно ли надеяться, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней?

РЕШЕНИЕ

Подсчитаем, сколько всех буквенных комбинаций надо было перепробовать.

Каждая из 36 букв первого кружка может сопоставляться с каждой из 36 букв второго кружка. Значит, двухбуквенных комбинаций возможно

$$36 \cdot 36 = 36^2.$$

К каждой из этих комбинаций можно присоединить любую из 36 букв третьего кружка. Поэтому трехбуквенных комбинаций возможно

$$36^2 \cdot 36 = 36^3.$$

Таким же образом определяем, что четырехбуквенных комбинаций может быть 36^4, а пятибуквенных 36^5 или 60 466 176. Чтобы составить эти 60 с лишним миллионов комбинаций, потребовалось бы времени, считая по 3 секунды на каждую,

$$3 \cdot 60\,466\,176 = 181\,398\,528$$

секунд. Это составляет более 50 000 часов, или почти 6300 восьмичасовых рабочих дней – более 20 лет.

Значит, шансов на то, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней, имеется 10 на 6300, или один из 630. Это очень малая вероятность.

Тремя двойками

Всем, вероятно, известно, как следует написать три цифры, чтобы изобразить ими возможно большее число. Надо взять три девятки и расположить их так:

$_{9}9^{9}$,

т. е. написать третью «сверхстепень» от 9.

Число это столь чудовищно велико, что никакие сравнения не помогают уяснить себе его грандиозность. Число электронов видимой Вселенной ничтожно по сравнению с ним. В моей «Занимательной арифметике» (гл. десятая) уже говорилось об этом. Возвращаюсь к этой задаче лишь потому, что хочу предложить здесь по ее образцу другую.

Тремя двойками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

РЕШЕНИЕ

Под свежим впечатлением трехъярусного расположения девяток вы, вероятно, готовы дать и двойкам такое же расположение:

$$_{2}2^{2}.$$

Однако на этот раз ожидаемого эффекта не получается. Написанное число невелико – меньше даже, чем 222. В самом деле: ведь мы написали всего лишь 2^4, т. е. 16.

Подлинно наибольшее число из трех двоек – не 222 и не 22^2 (т. е. 484), а

$$2^{22} = 4\ 194\ 304.$$

Пример очень поучителен. Он показывает, что в математике опасно поступать по аналогии; она легко может повести к ошибочным заключениям.

Тремя тройками

ЗАДАЧА

Теперь, вероятно, вы осмотрительнее приступите к решению следующей задачи.

Тремя тройками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

РЕШЕНИЕ

Трехъярусное расположение и здесь не приводит к ожидаемому эффекту, так как

${}_{3}3^{3}$, т. е. 3^{27}, меньше чем 3^{33}.

Последнее расположение и дает ответ на вопрос задачи.

Тремя четверками

ЗАДАЧА

Тремя четверками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

4^{44},

РЕШЕНИЕ

Если в данном случае вы поступите по образцу двух предыдущих задач, т. е. дадите ответ

4^{44},

то ошибетесь, потому что на этот раз трехъярусное расположение

как раз дает большее число. В самом деле, $4^4 = 256$, а 4^{256} больше чем 4^{44}.

Тремя одинаковыми цифрами

Попытаемся углубиться в это озадачивающее явление и установить, почему одни цифры порождают числовые исполины при трехъярусном расположении, другие – нет. Рассмотрим общий случай.

Тремя одинаковыми цифрами, не употребляя знаков действий, изобразить возможно большее число.

Обозначим цифру буквой a. Расположению

$$2^{22},\ 3^{33},\ 4^{44}$$

соответствует написание

$$a^{10a+a},\ \text{т. е. } a^{11a}.$$

Расположение же трехъярусное представится в общем виде так:

$${}_{a}a^{a}.$$

Определим, при каком значении a последнее расположение изображает большее число, нежели первое. Так как оба выражения представляют степени с равными целыми основаниями, то бóльшая величина отвечает большему показателю. Когда же

$$a^a > 11a?$$

Разделим обе части неравенства на a. Получим:

$$a^{a-1} > 11.$$

Легко видеть, что a^{a-1} больше 11 только при условии, что a больше 3, потому что

$$4^{4-1} > 11,$$

между тем как степени

$$3^2 \text{ и } 2^1$$

меньше 11.

Теперь понятны те неожиданности, с которыми мы сталкивались при решении предыдущих задач: для двоек и троек надо было брать одно расположение, для четверок и бóльших чисел – другое.

Четырьмя единицами

ЗАДАЧА

Четырьмя единицами, не употребляя никаких знаков математических действий, написать возможно большее число.

РЕШЕНИЕ

Естественно приходящее на ум число – 1111 – не отвечает требованию задачи, так как степень

$$11^{11}$$

во много раз больше. Вычислять это число десятикратным умножением на 11 едва ли у кого хватит терпения. Но можно оценить его величину гораздо быстрее с помощью логарифмических таблиц.

Число это превышает 285 миллиардов и, следовательно, больше числа 1111 в 25 с лишним млн раз.

Четырьмя двойками

ЗАДАЧА

Сделаем следующий шаг в развитии задач рассматриваемого рода и поставим наш вопрос для четырех двоек.

При каком расположении четыре двойки изображают наибольшее число?

РЕШЕНИЕ

Возможны 8 комбинаций:

$$2222,\ 222^2,\ 22^{22},\ 2^{222},$$
$$22^{2^2},\ \ 2^{22^2},\ \ 2^{2^{22}},\ \ 2^{2^{2^2}}.$$

Какое же из этих чисел наибольшее?

Займемся сначала верхним рядом, т. е. числами в двухъярусном расположении.

Первое – 2222, – очевидно, меньше трех прочих.

Чтобы сравнить следующие два —

222^2 и 22^{22},

преобразуем второе из них:

$$22^{22} = 22^{2 \cdot 11} = (22^2)^{11} = 484^{11}.$$

Последнее число больше, нежели 222^2, так как и основание, и показатель у степени 484^{11} больше, чем у степени 222^2.

Сравним теперь 22^{22} с четвертым числом первой строки – с 2^{222}. Заменим 22^{22} бóльшим числом 32^{22} и покажем, что даже это большее число уступает по величине числу 2^{222}. В самом деле,

$$32^{22} = (2^5)^{22} = 2^{110}$$

– степень меньшая, нежели 2^{222}.

Итак, наибольшее число верхней строки – 2^{222}. Теперь нам остается сравнить между собой пять чисел – сейчас полученное и следующие четыре:

$$22^{2^2},\quad 2^{22^2},\quad 2^{2^{22}},\quad 2^{2^{2^2}}.$$

Последнее число, равное всего 2^{16}, сразу выбывает из состязания. Далее, первое число этого ряда, равное 22^4 и меньшее, чем 32^4 или 2^{20}, меньше каждого из двух следующих. Подлежат сравнению, следовательно, три числа, каждое из которых есть степень 2. Больше, очевидно, та степень 2, показатель которой больше. Но из трех показателей

$$22^2,\ 48^4 \text{ и } 2^{20+2}\ (= 2^{10 \cdot 2} \cdot 2^2 \approx 10^6 \cdot 4)$$

последний – явно наибольший.

Поэтому наибольшее число, какое можно изобразить четырьмя двойками, таково:

$$2^{2^{22}}.$$

Не обращаясь к услугам логарифмических таблиц, мы можем составить себе приблизительное представление о величине этого числа, пользуясь приближенным равенством

$$2^{10} \approx 1000.$$

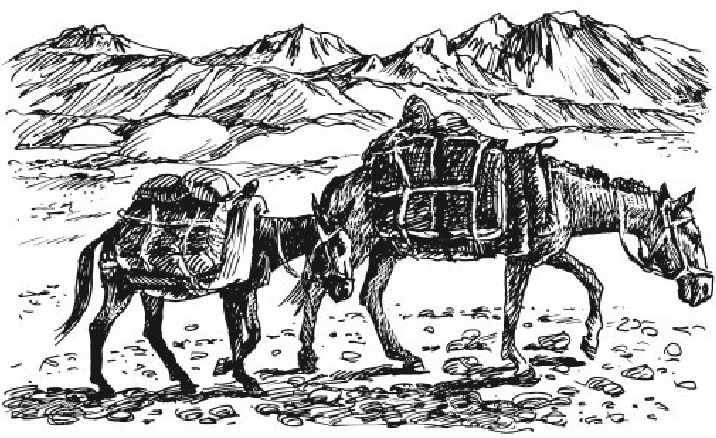
В самом деле,

$$2^{22} = 2^{20} \cdot 2^2 \approx 4 \cdot 10^6,$$

$$2^{2^{22}} \approx 2^{4\,000\,000} > 10^{1\,200\,000}.$$

Итак, в этом числе – свыше миллиона цифр.

Глава вторая
Язык алгебры



Искусство составлять уравнения

Язык алгебры – уравнения. «Чтобы решить вопрос, относящийся к числам или к отвлеченным отношениям величин, нужно лишь перевести задачу с родного языка на язык алгебраический», – писал великий Ньютон в своем учебнике алгебры, озаглавленном «Всеобщая арифметика». Как именно выполняется такой перевод с родного языка на алгебраический, Ньютон показал на примерах. Вот один из них.

На родном языке	*На языке алгебры*
Купец имел некоторую сумму денег	x
В первый год он истратил 100 фунтов	$x - 100$
К оставшейся сумме добавил третью ее часть	$(x - 100) + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
В следующем году он вновь истратил 100 фунтов	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$
И увеличил оставшуюся сумму на третью ее часть	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$
В третьем году он опять истратил 100 фунтов	$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$
После того как он добавил к остатку третью его часть,	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14\,800}{27}$
капитал его стал вдвое больше первоначального	$\frac{64x - 14\,800}{27} = 2x$

Чтобы определить первоначальный капитал купца, остается только решить последнее уравнение.

Решение уравнений – зачастую дело нетрудное; составление уравнений по данным задачи затрудняет больше. Вы видели сейчас, что искусство составлять уравнения действительно сводится к умению переводить «с родного языка на алгебраический». Но язык алгебры весьма немногословен; поэтому перевести на него удается без труда далеко не каждый оборот родной речи. Переводы попадаются различные по трудности, как убедится читатель из ряда приведенных далее примеров на составление уравнений первой степени.

Жизнь Диофанта

ЗАДАЧА

История сохранила нам мало черт биографии замечательного древнего математика Диофанта. Все, что известно о нем, почерпнуто из надписи на его гробнице – надписи, составленной в форме математической задачи. Мы приведем эту надпись.

На родном языке	*На языке алгебры*
Путник! Здесь прах погребен Диофанта. И чи́сла поведать Могут, о чудо, сколь долог был век его жизни.	x
Часть шестую его представляло прекрасное детство.	$\frac{x}{6}$
Двенадцатая часть протекла еще жизни — покрылся Пухом тогда подбородок.	$\frac{x}{12}$
Седьмую в бездетном Браке провел Диофант.	$\frac{x}{7}$
Прошло пятилетие; он Был осчастливен рожденьем прекрасного первенца сына,	5

Коему рок половину лишь жизни прекрасной и светлой Дал на земле по сравненью с отцом.	$\frac{x}{2}$
И в печали глубокой Старец земного удела конец воспринял, переживши Года четыре с тех пор, как сына лишился.	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$
Скажи, сколько лет жизни достигнув, Смерть воспринял Диофант?	

РЕШЕНИЕ

Решив уравнение и найдя, что $x = 84$, узнаем следующие черты биографии Диофанта; он женился 21-го года, стал отцом на 38-м году, потерял сына на 80-м году и умер 84-х лет.

Лошадь и мул

ЗАДАЧА

Вот еще несложная старинная задача, легко переводимая с родного языка на язык алгебры.

«Лошадь и мул шли бок о бок с тяжелой поклажей на спине. Лошадь жаловалась на свою непомерно тяжелую ношу. «Чего ты жалуешься? – отвечал ей мул. – Ведь если я возьму у тебя один мешок, ноша моя станет вдвое тяжелее твоей. А вот если бы ты сняла с моей спины один мешок, твоя поклажа стала бы одинакова с моей».

Скажите же, мудрые математики, сколько мешков несла лошадь и сколько нес мул?»

РЕШЕНИЕ

Если я возьму у тебя один мешок,	$x - 1$
ноша моя	$y + 1$
станет вдвое тяжелее твоей.	$y + 1 = 2(x - 1)$
А вот если бы ты сняла с моей спины один мешок,	$y - 1$
твоя поклажа	$x + 1$
стала бы одинакова с моей.	$y - 1 = x + 1$

Мы привели задачу к системе уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} y+1=2(x-1) \\ y-1=x+1 \end{array}\right\} \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l} 2x-y=3 \\ y-x=2 \end{array}\right. .$$

Решив ее, находим: $x = 5$, $y = 7$. Лошадь несла 5 мешков и 7 мешков – мул.

Четверо братьев

ЗАДАЧА

У четырех братьев 45 рублей. Если деньги первого увеличить на 2 рубля, деньги второго уменьшить на 2 рубля, деньги третьего увеличить вдвое, а деньги четвертого уменьшить вдвое, то у всех окажется поровну. Сколько было у каждого?

РЕШЕНИЕ

У четырех братьев 45 руб.	$x + y + z + t = 45$
Если деньги первого увеличить на 2 руб.,	$x + 2$
деньги второго уменьшить на 2 руб.,	$y - 2$
деньги третьего увеличить вдвое,	$2z$
деньги четвертого уменьшить вдвое,	$\frac{t}{2}$
то у всех окажется поровну.	$x + 2 = y - 2 = 2z = \frac{t}{2}$

Расчленяем последнее уравнение на три отдельных:

$$x + 2 = y - 2,$$
$$x + 2 = 2z,$$
$$x + 2 = \frac{t}{2},$$

откуда

$$y = x + 4,$$
$$z = \frac{x + 2}{2},$$
$$t = 2x + 4.$$

Подставив эти значения в первое уравнение, получаем:

$$x + x + 4 + \frac{x + 2}{2} + 2x + 4 = 45,$$

откуда $x = 8$. Далее находим: $y = 12$, $z = 5$, $t = 20$. Итак, у братьев было:

8 руб., 12 руб., 5 руб., 20 руб.

Птицы у реки

ЗАДАЧА

У одного арабского математика XI века находим следующую задачу.

На обоих берегах реки растет по пальме, одна против другой. Высота одной – 30 локтей, другой – 20 локтей; расстояние между их основаниями – 50 локтей. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую к поверхности воды между пальмами; они кинулись к ней разом и достигли ее одновременно.

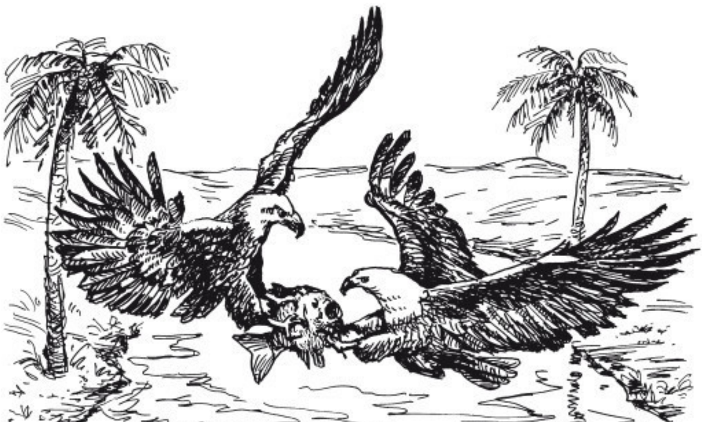


Рис. 1

На каком расстоянии от основания более высокой пальмы появилась рыба?

РЕШЕНИЕ

Из схематического чертежа (рис. 2), пользуясь теоремой Пифагора, устанавливаем:

$AB^2 = 30^2 + x^2$, $AC^2 = 20^2 + (50 - x)^2$.

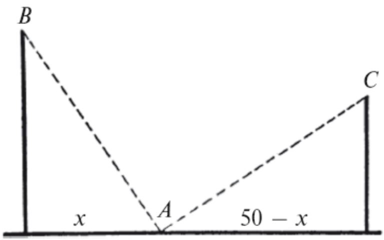


Рис. 2

Но $AB = AC$, так как обе птицы пролетели эти расстояния в одинаковое время. Поэтому

Конец ознакомительного фрагмента.