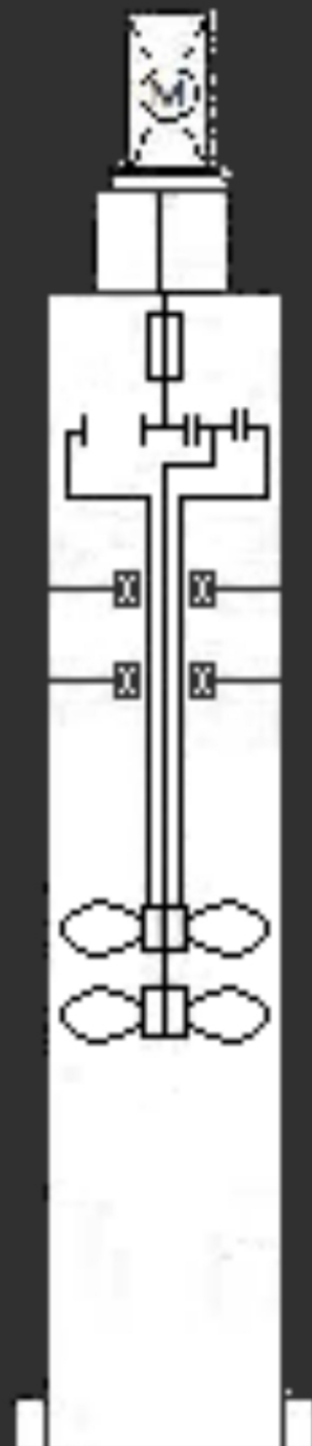
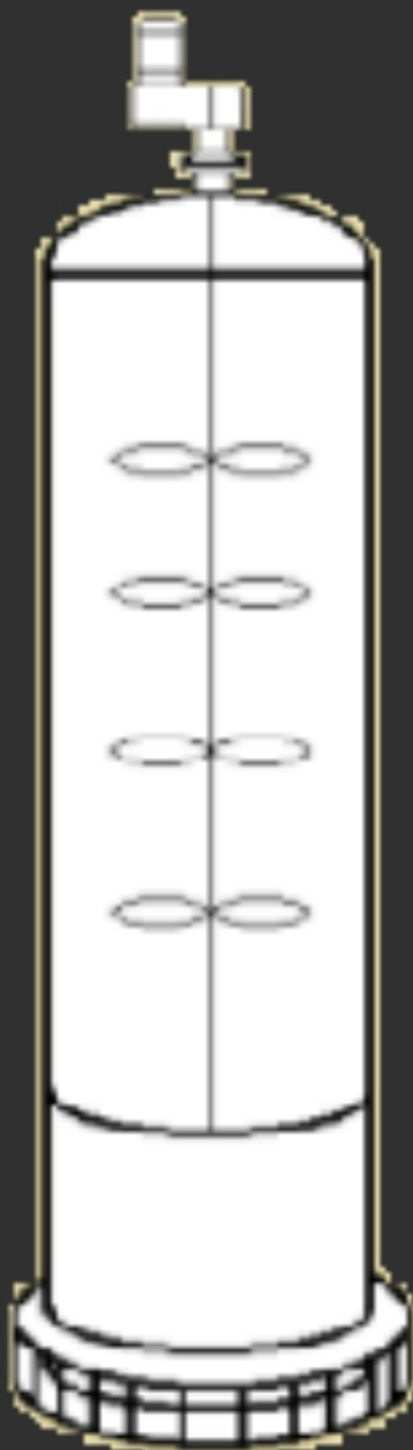


Ефанов К.В.

Нефтяные и химические аппараты с мешалками



Константин Ефанов

**Аппараты с перемешивающими
устройствами**

«Автор»

2019

Ефанов К. В.

Аппараты с перемешивающими устройствами / К. В. Ефанов —
«Автор», 2019

ISBN 978-5-532-03611-6

Монография написана по проблемам проектирования химических, нефтяных и атомных аппаратов с перемешивающими устройствами. Подробно рассмотрен расчет вала на резонанс вручную по теории колебаний и теория расчета на компьютере.

ISBN 978-5-532-03611-6

© Ефанов К. В., 2019

© Автор, 2019

Содержание

Введение	5
Расчет и проектирование валов	6
Расчет валов на резонанс по теории колебаний	10
Конец ознакомительного фрагмента.	40

Константин Ефанов

Аппараты с перемешивающими устройствами

Введение

Монография охватывает почти полностью все проблемы, возникающие при проектировании химических и нефтяных аппаратов с мешалками, применен междисциплинарный подход к проблемам.

Материал монографии направлен на обмен опытом и облегчение работы инженерам-конструкторам аппаратов с механическими перемешивающими устройствами.

В монографии рассмотрены:

– теория расчета валов на основе теории колебаний, приведены примеры расчетов и построения эпюр

– теория расчета валов методом конечных элементов

– теория подбора мешалок, предложен новый подход к подбору мешалки с объединением подходов их химической технологии и проектирования лопастных устройств,

– приведен пример технологического расчета аппарата с мешалкой по критериальным зависимостям и модели идеальных реакторов с определением его геометрических размеров и расходов теплоносителей.

– приведена информация о большем физическом обосновании расчетов процессов перемешивания методами вычислительной гидродинамики по сравнению с расчетами по критериальным уравнениям и по моделям реакторов идеального смешения,

– приведена теория моделей идеальных реакторов, ячеечной модели, оценки степени отклонения от идеального перемешивания,

– приведена теория расчета методами вычислительной гидродинамики.

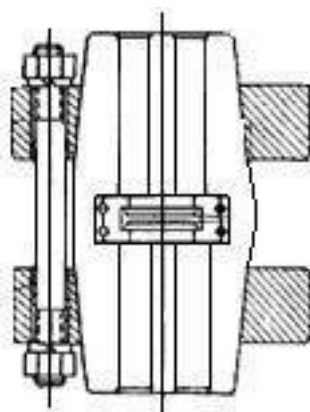
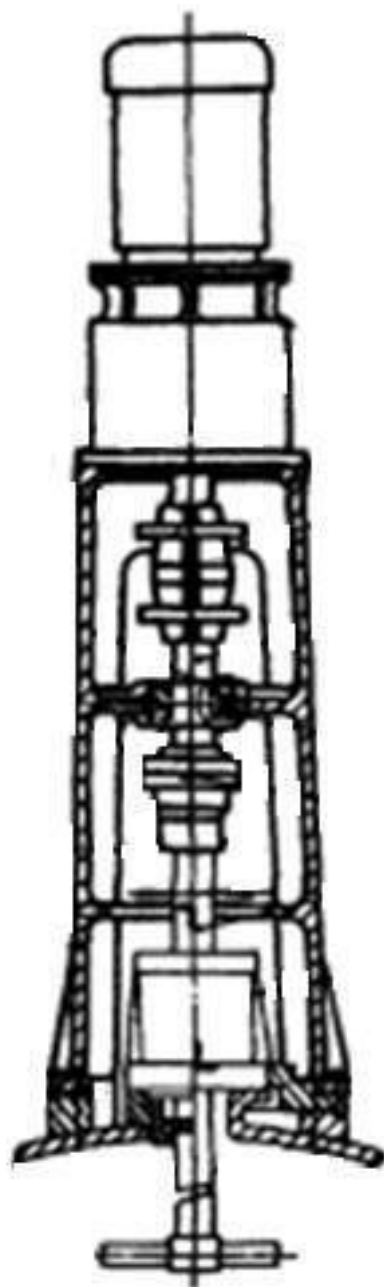
Результатом ознакомления с представленной в работе теорией и умелом ее применении в практике конструирования перемешивающих устройств, будет являться разработка наилучших и оптимальных конструкций химических и нефтяных аппаратов с перемешивающими устройствами. И как следствие, создание в КБ серьезного центра компетенций по проблемам этого оборудования, повышения престижа компании-производителя среди прочих.

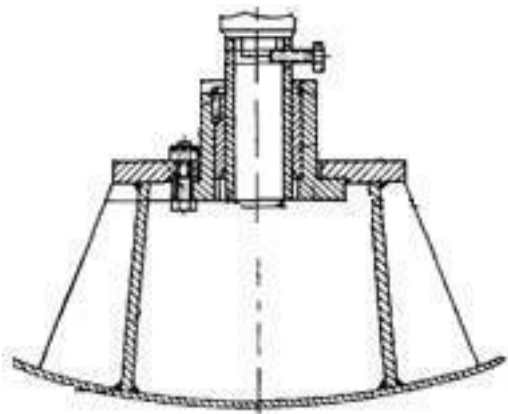
—
Посвящается Господу Богу Иисусу Христу!

Благодарность моей маме Татьяне Викторовне, работавшей инженером в нефтяном машиностроении.

Расчет и проектирование валов







Основные требования к аппаратам с мешалками установлены ГОСТ 20680-2002. Аппараты, изготавливаемые по каталогам изготовителей считаются стандартными, аппараты, изготавливаемые по индивидуальному техническому проекту считаются нестандартными. Нестандартные аппараты могут иметь отступления в конструктивных параметрах от ГОСТ 20680.

Мешалки устанавливаются на консольных валах и пролетных валах, имеющих опору в днище аппарата.

Верхняя опора вала состоит из двух разнесенных подшипников, что создает дополнительный пролет. В расчете этот дополнительный пролет учитывается/не учитывается на усмотрение расчетчика.

Самая простая схема верхней опоры вала в состоит в креплении вала в плоском мотор-редукторе и использовании подшипников редуктора в качестве верхней опоры вала [1]:

В этом случае вал уплотняется манжетным кольцом в крышке аппарата, торцовые уплотнения не используются. К недостатку можно отнести отсутствие возможности измерения температуры подшипников и затруднение их обслуживания, ограничения по массе подвешиваемого вала.

Повышение температуры подшипников и выход их из строя могут привести к взрывоопасной ситуации. Как правило при превышении температуры подшипников, электродвигатель останавливается. В конструкциях без стойки-привода, подшипники установлены в мотор-редукторе и отсутствует возможность контроля температуры. И следовательно, такая конструкция менее взрывобезопасная. Поэтому по мнению автора настоящей работы, нужно использовать только конструкции со стойкой-приводом для условий работы, в которых необходима взрывобезопасность и контроль исправности подшипников. Идти на удешевление в ущерб безопасности по-видимому не следует.

Сложные конструкции верхних опор валов реализуются с использованием опорных стоек, например по данным ОСТ 26-01-1225-75...ОСТ 26-01-1228-75 «Приводы вертикальные для аппаратов с перемешивающими устройствами. Типы, конструкции и основные размеры»:

Реализация верхней опоры вала с использованием опорной стойки является наиболее технически обоснованным решением. Такое решение аналогично опорным стойкам для полупогружных насосов типа ХП. Стойки мешалок имеют более сложную конструкцию.

В опорной стойке устанавливается торцовое уплотнение с подведенной системой охлаждения (аналогично нефтяным насосам), две подшипника, один из которых выполняет функцию осевого удержания, второй функцию удержания от поворота в плоскости чертежа, соединительную муфту.

Их соединительных муфт предпочтительнее в применении стягивающая валы продольно-разъемная муфта:

Сравнивая конструкции верхней стойки со стойками полупогружных насосов [29], можно отметить, что для аппаратов с мешалками они более сложные.

Нижние опоры однопролетных валов конструктивно оформляют по типу опор по ОСТ 26-01-55-77:

Мощность электродвигателя подбирается на основании расчета по РД 26-01-90-85 «Механические перемешивающие устройства. Метод расчета». Однако, методики, заложенные в этом документе являются устаревшими и мощность следует выбирать по результатам расчета процесса перемешивания методом конечных элементов.

Валы конструктивно выполняются сплошного сечения, ступенчатыми, полыми (из трубы). В необходимых случаях на поверхность вала наносится защита.

Расчет валов на резонанс, прочность и жесткость выполняется по РД РТМ 26-01-72-82. Валы вертикальных аппаратов с перемешивающими устройствами, методы расчёта.

Методика РД РТМ 26-07-72-82 вызывает вопросы в части ее корректности.

Расчеты валов на резонанс в сравнении с методикой РД РТМ 26-07-72-82 более обоснованно выполнять напрямую с использованием теории колебаний или методом конечных элементов.

Расчет по теории колебаний может быть автоматизирован применением математических пакетов программирования таких как MathCAD.

Расчет методом конечных элементов является теоретически самым обоснованным методом расчета валов и выполняется в специальном программном пакете. Используемый программный пакет может выступать в роли стандарта по-умолчанию на расчет валов на резонанс.

Расчет валов на резонанс по теории колебаний

Колебания при вращении вала происходят в результате отсутствия равновесия между внутренними силами упругости металла и внешними динамическими нагрузками. При гармоническом колебании отклонение оси вала от прямой происходит по синусоиде, т. е.:

$$x = a \sin \alpha t$$

Под степенью свободы понимается определение положения вала относительно системы координат с помощью одной координаты. Этой одной координате соответствует одна мешалка на валу.

Если колебания вала возникают из-за колебаний упругих внутренних сил, колебания являются свободными или собственными. Если под действием внешней силы по закону с заданной периодичностью, то колебания являются вынужденными.

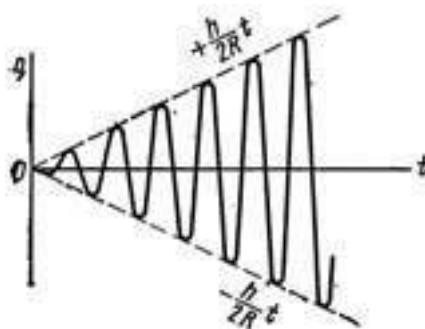
Положительным расчетом вала на колебания является результат, по которому частота собственных колебаний не совпадает и не имеет близкого значения с критической частотой, т. е. с частотой вынуждающей силы.

При расчета по теории колебаний рассчитываются собственные и критические частоты. В случае их совпадения изменяется жесткость вала или устанавливается другая частота вынужденных колебаний.

Изменение жесткости вала связано с изменением статической деформации, которая связана со свободной частотой по формуле:

$$p^2 = \frac{kg}{Q}$$

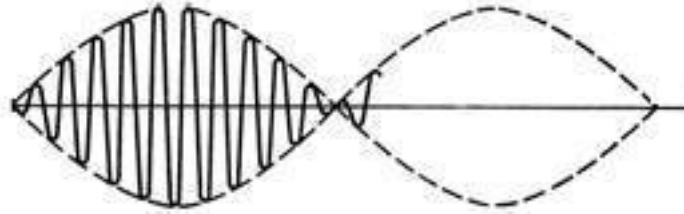
На резонансной частоте амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает при отсутствии внешних сопротивлений:



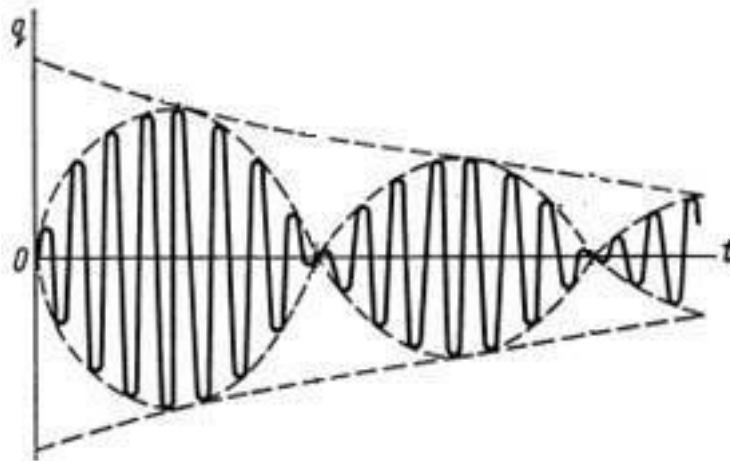
При наличии ограничителей колебаний, при резонансе амплитуды не превышают какого-либо максимального значения. Для валов мешалок в условиях отсутствия элементов, ограничивающих колебания, важно обеспечить расчетом отсутствие совпадения частот свободных

колебаний и резонанса. При разгоне вала до рабочих оборотов, происходит быстрый переход через резонансную частоту, не оказывающий влияния на вал.

Для значений частот, близких к резонансной возникают биения вала. Для случая вала мешалки при отсутствии сопротивлений биению, колебания имеют вид:



Затухающие биения при отходе от частот, близких к резонансным имеет вид:



Для получения формулы вынужденных колебаний с учетом сопротивлений к внешним силам добавляют периодическую возмущающую силу $W \cos mt$ (к внешним силам при-

бавляется сила $\alpha \frac{dx}{dt}$ препятствующая движению).

Упругие колебания системы с одной степенью свободы в общем случае (вторые два члена формулы относятся к вынужденным колебаниям):

$$x = e^{-ft}(A \cos p_1 t + B \sin p_1 t) + \frac{2fqm}{(p^2 - m^2)^2 + 4f^2m^2} \sin mt + \frac{q(p^2 - m^2)}{(p^2 - m^2)^2 + 4f^2m^2} \cos mt$$

Уравнения для всех трех приведенных случаев колебаний можно получить из него как частные случаи:

– собственные колебания без учета сопротивлений ($f = 0, q = 0$)

$$x = A \cos pt + B \sin pt$$

– собственные затухающие колебания (вынуждающая сила $W = 0$,)

$$x = e^{-ft}(A \cos p_1 t + B \sin p_1 t)$$

– вынужденные колебания без учета сопротивлений (в формуле получается, что первый член является вынужденными колебаниями, остальные два члена свободными колебаниями)

$$x = A \cos pt + B \sin pt + \frac{q}{p^2 - m^2} \cos mt$$

Формула вынужденных колебаний получается из вторых двух членов уравнения упругих колебания после отбрасывания свободных колебаний и замены в формуле

$$x = \frac{2fqm}{(p^2 - m^2)^2 + 4f^2m^2} \sin mt + \frac{q(p^2 - m^2)}{(p^2 - m^2)^2 + 4f^2m^2} \cos mt = C \cos \alpha \sin mt + C \sin \alpha \cos mt$$

Т.е. вынужденные колебания являются гармоническими (так же как и собственные)

$$x = C \sin(mt + \alpha)$$

Амплитуда вынужденных колебания находится возведением в квадрат указанных двух членов формулы и последующим сложением:

$$C = \frac{q}{\sqrt{(p^2 - m^2)^2 + 4f^2m^2}}$$

Как видно из формулы амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна возмущающей силе, зависит от сравнительной частоты свободных p и вынужденных m колебаний, определяющих затухание свободных колебаний f .

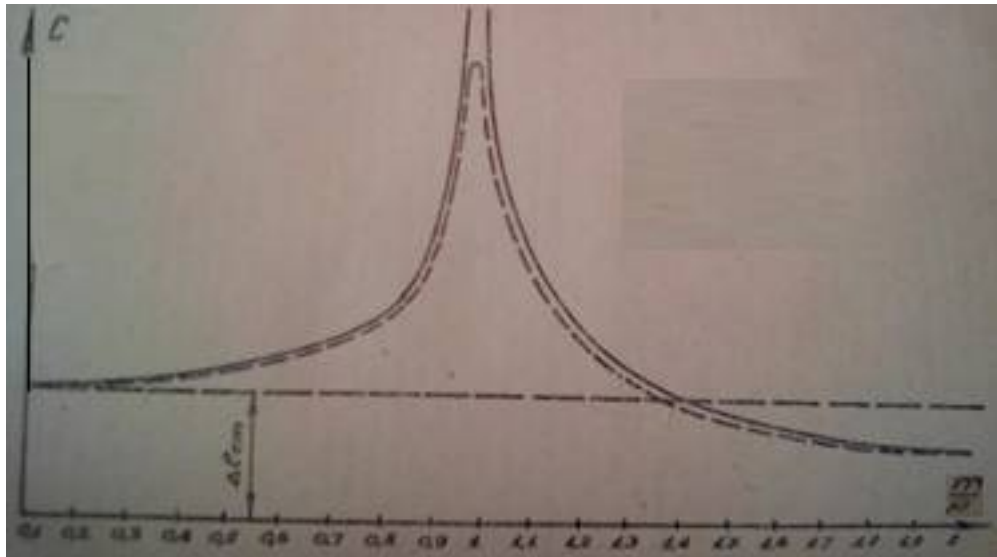
При $m < p$ амплитуда C приближается к статической деформации вала.

При $m = p$ амплитуда C достигает больших величин, наступает явление резонанса вала.

В отсутствии сопротивлений произойдет разрушение вала через определенный промежуток времени.

При $m > p$ амплитуда C стремится к нулевому значению, колебания отсутствуют.

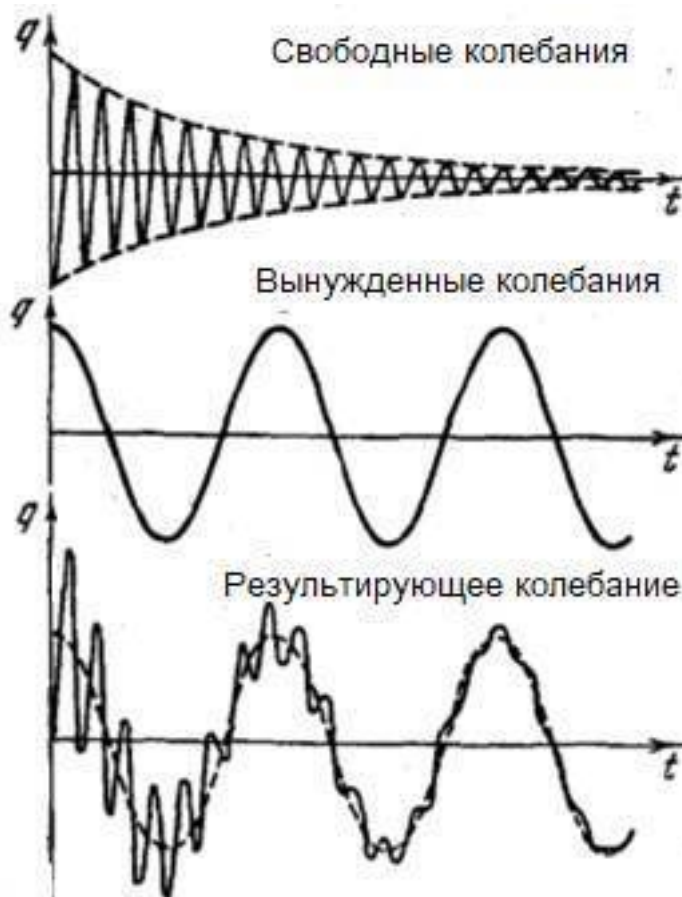
Приведем график амплитуд колебаний:



Как видно из рисунка, при резонансной частоте происходит разрыв кривой прогиба вала и разрушение вала.

При расчете вала необходимо не допускать наличия расчетных частот в пределах биения, то есть в пределах близких к резонансной частоте для недопущения разрушения вала. Запас может превышать критическую частоту на 20 %. Такой запас, например, установлен для валов центробежных нефтяных насосов в ГОСТ 32601.

При сложении свободных и вынужденных колебаний получается результирующее колебание как результат наложения колебаний, колебание получается в форме биений:



Для описания положения мешалки используется обобщенная координата, то есть независимая величина, которая определяет изменение формы оси вала (положение системы).

Обобщенной силой является сила, которая полностью определяет действующую систему сил.

Обобщенная координата и сила связаны формулировкой: в результате произведения приращения обобщенной координаты на обобщенную силу получается работа.

Движение вала с мешалкой описывается уравнениями в обобщенных координатах. Между обобщенными координатами и декартовыми координатами всегда существует зависимость в виде функции декартовых координат от обобщенных координат.

Из общего уравнения движения системы, полученного в декартовых координатах, получают уравнение движения в обобщенных координатах. В результате получается запись:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i'' \delta x_i + y_i'' \delta y_i + z_i'' \delta z_i)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = Q \delta q_i$$

Для кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

находится производная по обобщенным координате и скорости и после преобразований:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i'' \delta x_i + y_i'' \delta y_i + z_i'' \delta z_i) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) \delta q_i - \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i$$

Уравнение движения запишется в виде

$$Q \delta q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) \delta q_i - \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i$$

Силы, действующие на вал, зависят только от положения и не зависят от времени, скорости. В этом случае, согласно теоремы Кастильяно, обобщенная сила равна производной потенциальной энергии (при этом совершаемая работа переводит потенциальную энергию в кинетическую):

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$$

По теореме Кастильяно [5,с.319] прогиб точки приложения сосредоточенной силы (P) равен частной производной потенциальной энергии деформации по этой силе, а производная потенциальной энергии деформации по обобщенной силе равна обобщенному перемещению:

$$y = \frac{\partial U}{\partial P} \text{ и } \theta = \frac{\partial U}{\partial M}$$

В результате получается уравнение движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q'_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$$

Равновесное положение системы вала принимается за начало обобщенных координат, т. е.

$$q_j(j = 0, 1, 2 \dots s) = 0$$

Кинетическая и потенциальная энергии системы:

$$T(j = 0, 1, 2 \dots s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} q'_i q'_j$$

$$\Pi(j = 0, 1, 2 \dots s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s c_{ij} q'_i q'_j$$

В результате частные решения первой системы уравнений:

$$q_j^{(1)} = \mu_j^{(1)} A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \beta_1)$$

– первое главное колебание с частотой

k_1

и

начальной фазой β_1

.

.

$$q_j^{(2)} = \mu_j^{(2)} A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \beta_2)$$

– второе главное колебание с частотой

k_2

>

k_1

и

начальной фазой β_2

.

.

.

$$q_j^{(3)} = \mu_j^{(3)} A_1^{(3)} \sin(k_3 t + \beta_3)$$

– третье главное колебание с частотой

k_3

>

k_2

и

начальной фазой β_3

.

.

.

.....

$$q_j^{(s)} = \mu_j^{(s)} A_1^{(s)} \sin(k_s t + \beta_s) \quad (j=1,2,3,4\dots s)$$

На основании приведенного выше, алгоритм полного исследования свободных колебаний системы с s степенями свободы состоит из следующих действий:

- а) нахождение частот свободных колебаний μ_j , $j = 1, 2 \dots s$ из векового уравнения,
 б) нахождение коэффициентов распределе-

ния $\mu_j^{(1)}, \mu_j^{(2)} \dots \mu_j^{(s)}$ ($j = 1, 2 \dots s$)

- в) нахождение амплитуд $A_1^{(r)}$ ($r = 1, 2 \dots s$) и начальных фаз β_r

Применение программы MathCAD

Яблонский отмечает [3, с.143] если число степеней свободы превышает 4, то для полного решения задачи потребуется громадная вычислительная работа.

Однако, в настоящее время возможно применение математических пакетов таких как MathCAD.

Программа MathCAD позволяет для матриц выполнять нахождение определителя, решать матричные уравнения. Применение этой программы исключает выполнение громоздких ручных расчетов и позволяет по приведенному выше алгоритму получать точное решение без каких-либо приближенных методов.

MathCAD позволяет выполнять с матрицами символьные вычисления.

Для решения матричного уравнения типа:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix} = 0$$

необходимо записать матрицу

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

вставить определитель

$$\left| \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \right|$$

, вызвать команду « \leftrightarrow ».

В результате получается запись многочлена из определителя. Многочлен копируется в отдельное место. Выделяют переменную «X» в многочлене и в панели инструментов выбирают полиномиальный коэффициент. В результате этого получится матрица с коэффициентами из полученного многочлена:

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

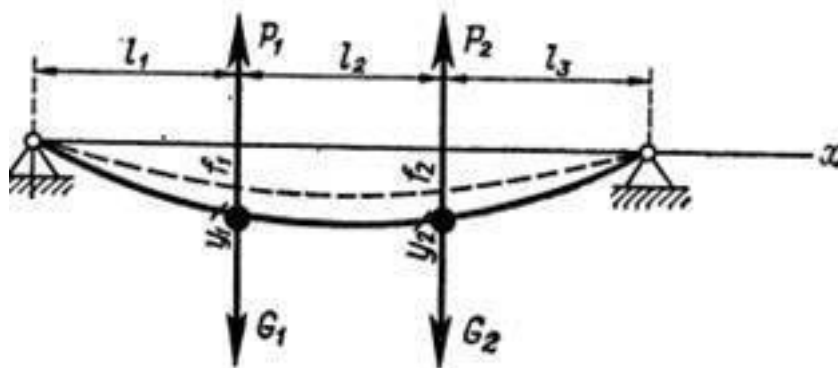
Затем вызывается или записывается вручную команда `polyroots`, в которую добавляется полученная матрица в виде:

$$\text{polyroots}\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$$

M_1 и M_2 — являются корнями матричного уравнения.

Для подробного ознакомления с вычислением матриц в MathCAD следует обратиться к учебному пособию по программе.

—
Рассмотрим пример построения эпюры свободных колебаний



Находим значение кинетической и потенциальной энергии:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 y_1'^2 + m_2 y_2'^2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(c_{11} y_1^2 - 2 \frac{c_{12} + c_{21}}{2} y_1 y_2 + c_{22} y_2^2 \right)$$

Находим коэффициенты инерции и жесткости системы:

$$a_{11} = m_1 = \frac{G_1}{g}, a_{12} = 0, a_{22} = m_2 = \frac{G_2}{g}$$

$$c_{11} = c_{11}, c_{12} = -\frac{c_{12} + c_{21}}{2}, c_{22} = c_{22}$$

Для системы с 2 степенями свободы, уравнения частот записываются в виде:

$$\begin{cases} (c_{11} - a_{11}k^2) + \mu(c_{12} - a_{12}k^2) = 0 \\ (c_{12} - a_{12}k^2) + \mu(c_{22} - a_{22}k^2) = 0 \end{cases}$$

После выполнения операции исключения μ из системы двух уравнений, получается одно уравнение частот:

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) + (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0$$

Корни уравнения частот

$$k_1^2$$

и

$$k_2^2$$

определяют частоты свободных колебаний

k

1

и

k

2

(частоты главных колебаний системы).

Частота k_1 ($k_1 < k_2$) является основной частотой колебаний.

Значения коэффициентов инерции и жесткости подставляются в полученное уравнение частот:

$$\left(c_{11} - \frac{G_1}{g}k^2\right)\left(c_{22} - \frac{G_2}{g}k^2\right) - \left(-\frac{c_{12} + c_{21}}{2}\right)^2 = 0$$

После преобразований:

$$k^4 - \frac{g}{G_1 G_2} (c_{11} G_2 - c_{22} G_1) k^2 + \frac{g^2}{4 G_1 G_2} (4 c_{11} c_{22} - (c_{12} + c_{21})^2) = 0$$

$$k_{1,2}^2 = \frac{g}{2 G_1 G_2} \left(c_{11} G_2 - c_{22} G_1 \mp \sqrt{(c_{11} G_2 - c_{22} G_1)^2 - G_1 G_2 (4 c_{11} c_{22} - (c_{12} + c_{21})^2)} \right)$$

В условиях при-
мера $l_1 = l_2 = \frac{l}{3}, G_1 = G_2 = G, c_{11} = c_{22}, c_{12} = c_{21}, f_1 = f_2$

$$k_1^2 = \frac{g(c_{11} - c_{22})}{G}$$

$$k_2^2 = \frac{g(c_{11} + c_{22})}{G}$$

Корни:

$$k_1 = \sqrt{\frac{g(c_{11} - c_{22})}{G}}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{g(c_{11} + c_{22})}{G}}$$

Значения частот k_1 и k_2 по результатам сопроматского расчета (см. работу Беляева [5]):

$$c_{11} = c_{22} = \frac{1296 EJ}{5 l^3}$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{1134 EJ}{5 l^3}$$

С учетом этого значения корней:

$$k_1 = \sqrt{\frac{g(c_{11} - c_{22})}{G}} = \sqrt{\frac{1296 - 1134}{5}} \sqrt{\frac{EJg}{Gl^3}} = 5,69 \sqrt{\frac{EJg}{Gl^3}}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{g(c_{11} + c_{22})}{G}} = \sqrt{\frac{1296 + 1134}{5}} \sqrt{\frac{EJg}{Gl^3}} = 22,04 \sqrt{\frac{EJg}{Gl^3}}$$

Коэффициенты распределения:

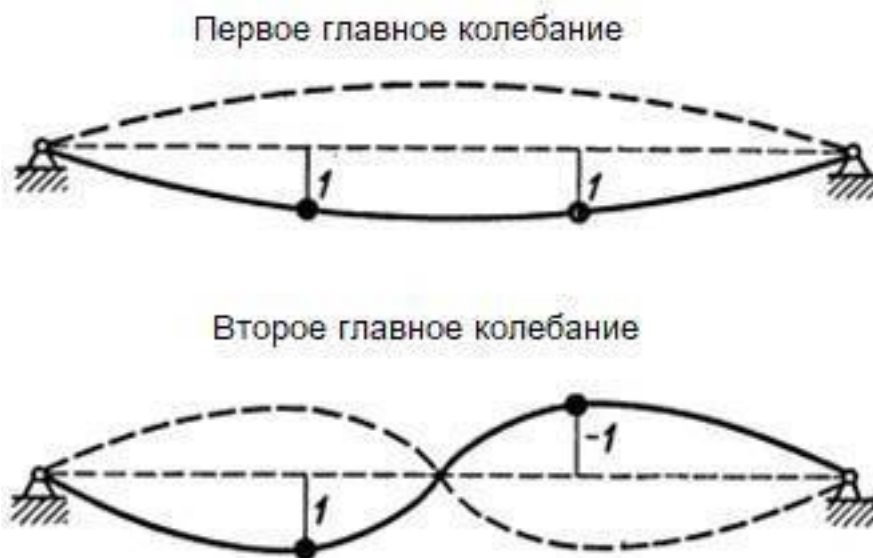
$$\mu_1 = -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{c_{11} - \frac{Gg(c_{11} - c_{22})}{gG}}{-\frac{c_{12} + c_{21}}{2}} = +1$$

$$\mu_2 = -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{c_{11} - \frac{Gg(c_{11} + c_{22})}{gG}}{-\frac{c_{12} + c_{21}}{2}} = -1$$

$$\mu_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = +1$$

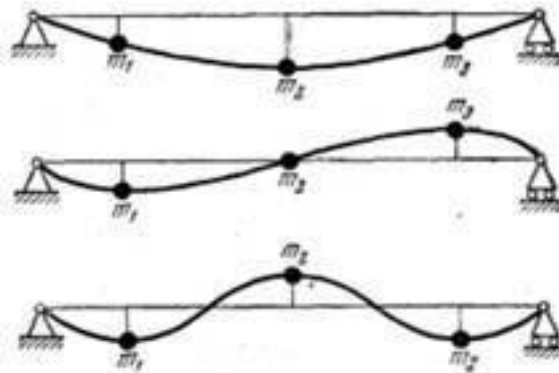
$$\mu_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = +1$$

Этюры главных колебаний:



Форма этюров подчиняется теореме об узлах собственных форм колебаний [4, с.120]. По этой теореме амплитуды для разных частот колебаний не имеют одинакового знака. То есть, если амплитуда первой формы положительная, то амплитуда остальных форм должна иметь минимально одну переменную знака. Число перемен знака или число узлов собственной формы колебаний m -го порядка равно $m-1$.

Бабаков [4,с.124] для балки с 3 точечными нагрузками приводит три возможные формы колебаний:



—
Решение приближенным методом Релея

По методу Релея допускается:

- масса системы не изменяет типа колебаний
- перемещение системы при колебании имеют ту же форму, что и при статической деформации (сходство формы не означает равенство величин деформации).

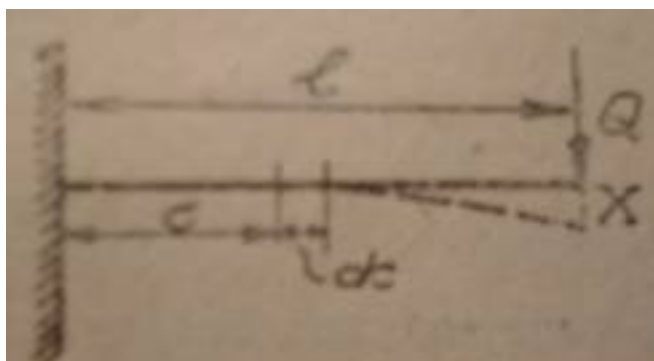
Ошибка по методу Релея не превышает 1,5 % [2,с.60].

Метод Релея состоит в том, что в конкретный момент времени находится перемещение точек вала по формулам статической деформации. Для других моментов времени перемещения могут отличаться от выбранного момента времени. Так как действующая на вал сила P ,

$$— \frac{Q}{g} \frac{d^2 x}{dt^2}$$

состоящая из веса груза и сил инерции зависит от времени.

—
Рассмотрим по методу Релея колебания консольной балки (вала) с защемленным концом [2,с.73].



p – круговая частота собственных колебаний в этом примере и ниже.

Обобщенное перемещение:

$$q_i = x$$

Кинетическая энергия груза:

$$T_1 = \frac{Qx'^2}{2g}$$

$$x'^2 = v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

в этом уравнении квадрат скорости
Кинетическая энергия элемента балки dc :

$$T_2 = \frac{x_c'^2 qdc}{2g}$$

Уравнение упругой линии:

$$EI \frac{d^2 x}{dc^2} = M = P(l - c) = P \frac{(l - c)^2}{2} + D$$

Минуса выкладки, полная кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{x'^2}{2g} \left(Q + \frac{33ql}{140} \right)$$

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}$$

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{x''}{g} \left(Q + \frac{33ql}{140} \right) + kx = 0$$
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p_0^2 x = 0$$

В этом уравнении круговая p_0 частота:

$$p_0^2 = \frac{kg}{Q + \frac{33ql}{140}}$$

Статический прогиб на консоли балки:

$$f = Q + \frac{33ql}{140}$$

И

$$p_0^2 = \frac{k}{f}$$

Решение уравнения $\frac{d^2 x}{dt^2} + p_0^2 x = 0$:
– период колебания

$$T = \frac{2\pi}{p_0} \sqrt{\frac{f}{kg}}$$

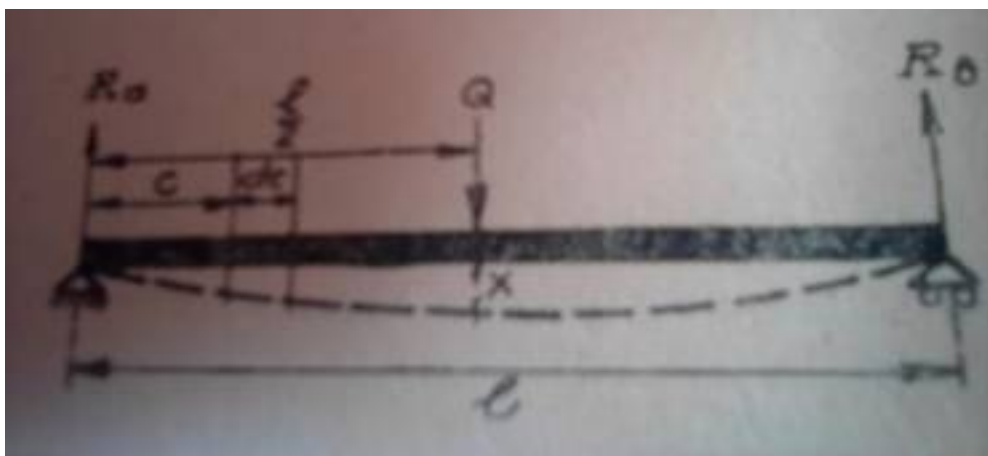
– частота

$$\tau = \frac{p_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kg}{f}}$$

– круговая частота

$$\omega = p_0$$

Рассмотрим по методу Релея колебания двухопорной однопролетной балки (вала), нагруженной сосредоточенной силой посередине [2,с.65].



Обобщенное перемещение:

$$q_i = x$$

Кинетическая энергия груза:

$$T_1 = \frac{Qx'^2}{2g}$$

Уравнение упругой линии:

$$EI \frac{d^2 x}{dc^2} = M = \frac{P}{2} c$$

Интегрируя последовательно:

$$EIx = \frac{P}{4} \left(\frac{c^3}{3} - \frac{l^2 c}{4} \right)$$

Прогиб:

$$x_c = \frac{Pl^3}{48EI} \left(\frac{4c^3 - 3l^2 c}{l^3} \right)$$

Прогиб посередине пролета:

$$x = \frac{Pl^3}{48EI}$$

Следовательно,

$$x_c = x \left(\frac{4c^3 - 3l^2 c}{l^3} \right)$$

Как видно, прогибы x и x_c являются динамическими прогибами, а не статическими, и имеют переменное значение, зависящее от времени.

$$x = \frac{Pl^3}{48EI}$$

Так, формула прогиба

имеет переменное от времени значение так как

$$- \frac{Q}{g} \frac{d^2 x}{dt^2}$$

сила P , состоящая из веса груза и сил инерции

зависит от времени.

Кинетическая энергия стержня:

$$T_2 = \frac{x_c'^2}{2g} \frac{17}{35} ql$$

Полная кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{x'^2}{2g} \left(Q + \frac{17}{35} ql \right)$$

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = \frac{Px^2}{2}$$

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{x''}{g} \left(Q + \frac{17ql}{35} \right) + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p_0^2 x = 0$$

Эта формула аналогична формуле $\frac{d^2x}{dt^2} + p^2 x = 0$ движения груза, подвешенного на пружине, имеющий общий интеграл $x = A \cos pt + B \sin pt$.
Используя этот интеграл находим:
– период:

$$T = \frac{2\pi}{p_0}$$

– частоту

$$\tau = \frac{p_0}{2\pi}$$

– круговая частота

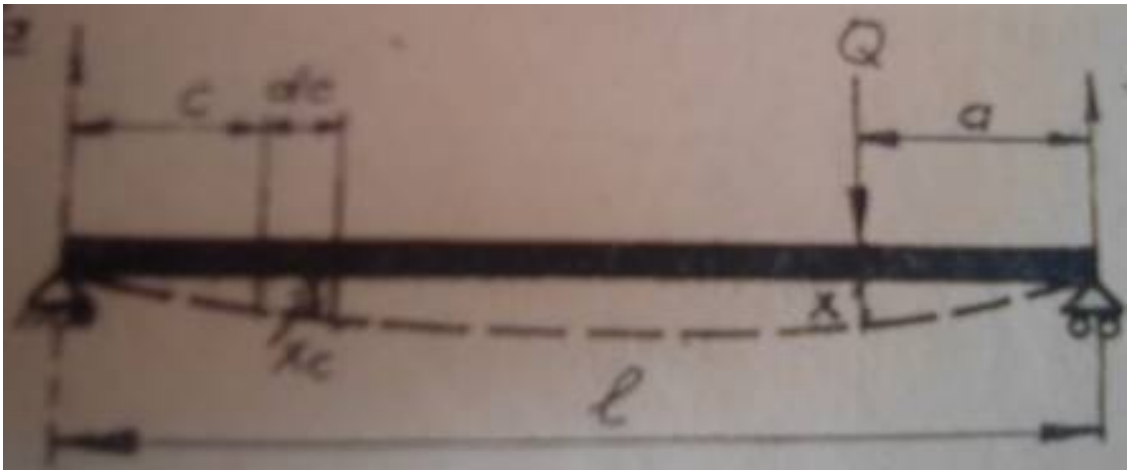
$$\omega = p_0 = \sqrt{\frac{kg}{Q + \frac{17}{35}ql}}$$

Если собственную массу балки не учитывать:

$$p = \sqrt{\frac{kg}{Q}}$$

Т.е. к массе мешалки необходимо прибавить $\frac{17}{35}$ от веса вала.

Рассмотрим по методу Релея колебания двухопорной однопролетной балки (вала), нагруженной сосредоточенной силой в произвольном положении [2,с.70].



Обобщенное перемещение:

$$q_i = x$$

Кинетическая энергия груза:

$$T_1 = \frac{Qx'^2}{2g}$$

Кинетическая энергия элемента балки dc :

$$T_2 = \frac{x_c'^2 qdc}{2g}$$

Уравнение изогнутой оси балки (вала):

$$x_c = \frac{Pa}{6lEI} (-c^3 + l^2c - a^2c)$$

$$x_c = \frac{Pa^2(l-a)^2 (-c^3 + l^2c - a^2c)}{3lEI \cdot 2a(l-a)^2}$$

В точке приложения груза:

$$x = \frac{Pa^2(l-a)^2}{3lEI}$$

$$x_c = x \frac{(-c^3 + l^2c - a^2c)}{2a(l-a)^2}$$

$$dT_2 = \frac{qx'^2 (-c^3 + l^2c - a^2c)^2}{2g \cdot 4a^2(l-a)^4} dc$$

$$T_2 = \frac{qx'^2}{2g4a^2(l-a)^4} \int_0^l (-c^3 + l^2c - a^2c)^2 dc = \frac{ax'^2 l^3 (8l^4 + 35a^4 - 28a^2l^2)}{2g \cdot 4a^2(l-a)^4 105}$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{x'^2}{2g} \left(Q + \frac{ql^3(8l^4 + 35a^4 - 28a^2l^2)}{4a^2(l-a)^4 105} \right)$$

При $a = \frac{l}{2}$ формула имеет вид, как для предыдущего примера:

$$T = \frac{x'^2}{2g} \left(Q + \frac{17}{35} ql \right)$$

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = \frac{Px^2}{2}$$

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{x''}{g} \left(Q + \frac{ql^3(8l^4 + 35a^4 - 28a^2l^2)}{4a^2(l-a)^4 105} \right) + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p_0^2 x = 0$$

$$p_0^2 = \frac{kg}{ql^3(8l^4 + 35a^4 - 28a^2l^2)} \cdot 4a^2(l-a)^4 105$$

Для статического удлинения к необходим груз:

$$k = \frac{3lEI}{a^2(l-a)^2}$$

Находим:

– период

$$T = \frac{2\pi}{p_0}$$

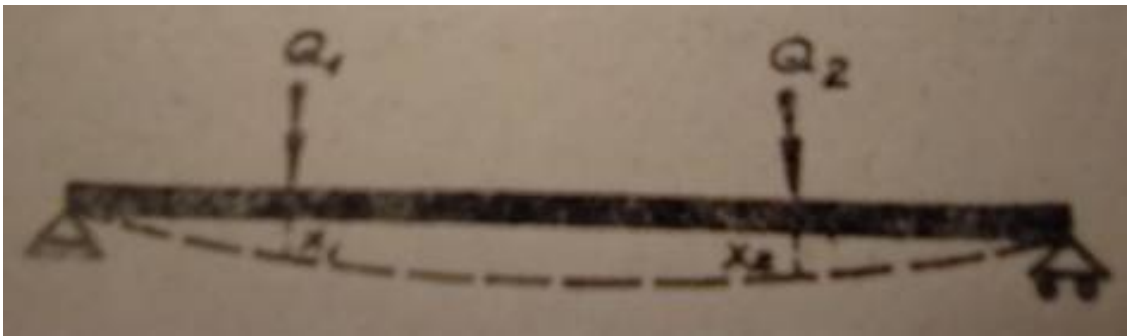
– частоту

$$\tau = \frac{p_0}{2\pi}$$

– круговая частота

$$\omega = p_0 = \sqrt{\frac{kg}{\frac{ql^3(8l^4 + 35a^4 - 28a^2l^2)}{4a^2(l-a)^4 105}}}$$

Рассмотрим по методу Релея колебания двухопорного однопролетного вала, нагруженной двумя произвольно приложенными сосредоточенными силами [2, с.76].



Ограничения метода Релея приводят систему к системе с 1 степенью свободы. При точном рассмотрении системы, она имеет множество степеней свободы.

Перемещение каждого груза:

$$x = x_1 \sin pt$$

$$x = x_2 \sin pt$$

Наибольшие перемещения грузов являются амплитудой для $Q_1 - x_1$, для $Q_2 - x_2$

Скорости грузов:

$$v = \frac{dx}{dt} = x_1 p \cos pt$$

$$v = \frac{dx}{dt} = x_2 p \cos pt$$

Максимальная скорость при $\cos pt = 1$

$$v_{max} = x_1 p$$

$$v_{max} = x_2 p$$

Максимальная скорость соответствует переходу точки через статическое равновесие, т. к. фаза pt равна 0° или 180° при положении точки s на оси балки.

Скорость колебаний переменная, так как колебание происходит по закону синусоиды,

например, $v = x_1 p \cos pt$. При изменении положения и скорости точки, меняется энергия колебания. При колебании происходит непрерывный взаимный переход кинетической энергии в потенциальную.

Сумма энергий постоянна и является полной энергией системы при рассмотрении идеального случая без потерь:

$$U = T + \Pi$$

Для какого-либо конкретного положения системы:

$$T = \frac{Q_1 v^2}{g} = \frac{Q_1 (x_1 p \cos pt)^2}{g}$$

$$\Pi = \frac{Q_1 x}{2} = \frac{Q_1 x_1 \sin pt}{2}$$

При нахождении точки на оси абсцисс (оси вала), потенциальная энергия равна нулю, кинетическая максимальная:

$$T_{max} = \frac{Q_1 (x_1 p)^2}{g}$$

$$\Pi = 0$$

$$U = T_{max} + \Pi = \frac{Q_1 (x_1 p)^2}{g}$$

Т.е. вся полная энергия системы является максимальной кинетической энергией.

Для фазы pt равной 90° или 270° кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия максимальная:

$$T = 0$$

$$\Pi_{max} = \frac{Q_1 x_1}{2}$$

$$U = T + \Pi_{max} = \frac{Q_1 x_1}{2}$$

Т.е. вся полная энергия системы является потенциальной энергией.
Можно записать:

$$U = U$$

$$\frac{Q_1 (x_1 p)^2}{g \cdot 2} = \frac{Q_1 x_1}{2}$$

Для случая рассматриваемого груза:

$$\frac{Q_1 x_1^2 p^2}{g \cdot 2} + \frac{Q_2 x_2^2 p^2}{g \cdot 2} = \frac{Q_1 x_1}{2} + \frac{Q_2 x_2}{2}$$

Из этой формулы находится круговая частота:

$$p = \sqrt{\frac{g(Q_1 x_1 + Q_2 x_2)}{Q_1 x_1^2 + Q_2 x_2^2}}$$

Период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{Q_1 x_1^2 + Q_2 x_2^2}{g(Q_1 x_1 + Q_2 x_2)}}$$

Для трех грузов на валу, круговая частота запишется по формуле:

$$p = \sqrt{\frac{g(Q_1x_1 + Q_2x_2 + Q_3x_3)}{Q_1x_1^2 + Q_2x_2^2 + Q_3x_3^2}}$$

Для n грузов круговая частота запишется по формуле:

$$p = \sqrt{\frac{g(Q_1x_1 + Q_2x_2 + \dots + Q_nx_n)}{Q_1x_1^2 + Q_2x_2^2 + \dots + Q_nx_n^2}}$$

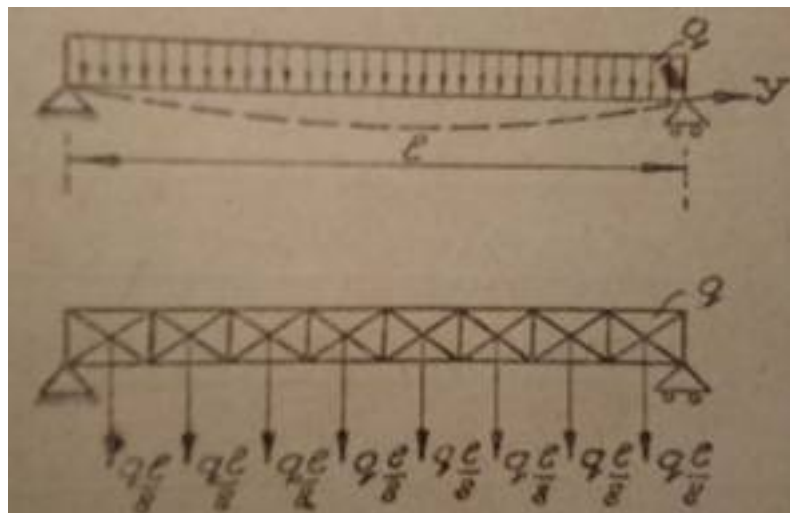
Как можно видеть, определение круговой частоты сводится к нахождению статических прогибов. Прогибы могут быть также найдены графоаналитически.

Для одного груза круговая частота запишется по формуле:

$$p = \sqrt{\frac{g}{f}} = \frac{2\pi}{T}$$

Рассмотрим по методу Релея колебания двухопорного однопролетного вала, нагруженной распределенной нагрузкой [2, с.81].

Мешалки являются сосредоточенной нагрузкой на валу и пример приводится для сведения.



Балка с распределенной нагрузкой условно разбивается на ряд участков с заменой распределенной нагрузки, приходящейся на каждый участок, сосредоточенной силой, приложенной по центру тяжести участка.

Колебания системы с распределенной нагрузкой находятся по приведенной выше формуле:

$$p = \sqrt{\frac{g(Q_1x_1 + Q_2x_2 + \dots + Q_nx_n)}{Q_1x_1^2 + Q_2x_2^2 + \dots + Q_nx_n^2}}$$

Точность решения зависит от числа n участков.

Прогибы находят по уравнению упругой линии с равномерно распределенной нагрузкой:

$$x = \frac{ql^4}{24EI} \left(\frac{y}{l} - \frac{2y^3}{l^3} + \frac{y^4}{l^4} \right)$$

Для 8 участков (8 прогибов):

$$\begin{aligned} x_1 = x_8 & \text{ при } y = \frac{l}{16} \\ x_2 = x_7 & \text{ при } y = \frac{3l}{16} \\ x_3 = x_6 & \text{ при } y = \frac{5l}{16} \\ x_4 = x_5 & \text{ при } y = \frac{7l}{16} \end{aligned}$$

С учетом этого, уравнение упругой линии:

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «ЛитРес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на ЛитРес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.