Владимир Трошин

Натуральные числа

Этюды,

вариации,

упражнения

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10...

12+

Владимир Трошин

Натуральные числа. Этюды, вариации, упражнения

«Автор»

2020

Трошин В. В.

Натуральные числа. Этюды, вариации, упражнения /
В. В. Трошин — «Автор», 2020

ISBN 978-5-532-06306-8

Тысячи лет человечество использует в практической деятельности и одновременно изучает натуральные числа. В них привлекает внешняя простота, которая при внимательном рассмотрении превращается в необозримую бесконечность. Этим объясняется тот факт, что многие проблемы, связанные с натуральными числами, поставлены очень давно, но не решены до сих пор. Люди постоянно продолжают находить в натуральных числах что-то новое и интересное. Об этом интересном рассказывает книга. Читайте, расширяйте свой кругозор, тренируйте ум, развивайтесь.

ISBN 978-5-532-06306-8

Содержание

Предисловие

Самой древней математической деятельностью был счет. Счет был необходим, чтобы следить за поголовьем скота и вести торговлю. Первыми существенными успехами, заложившими фундамент арифметики, стали определение понятия числа, отделение его от конкретных объектов счета и изобретение четырех основных действий с числами: сложения, вычитания, умножения и деления. Развитие математики началось благодаря вавилонянам и египтянам. Источником наших знаний о вавилонской цивилизации служат хорошо сохранившиеся глиняные таблички, покрытые так называемыми клинописными текстами, которые датируются от 2000 года до н.э. и до 300 года н.э. Математика на клинописных табличках в основном была связана с ведением хозяйства. Наше знание древнеегипетской математики основано главным образом на двух папирусах, датируемых примерно 1700 годом до нашей эры. Излагаемые в этих папирусах математические сведения восходят к еще более раннему периоду – около 3500 до нашей эры. Египтяне использовали математику, чтобы вычислять вес тел, площади посевов, объемы зернохранилищ, размеры податей и количество камней, требуемое для возведения тех или иных сооружений. Затем эстафетную палочку подхватили древние греки. С точки зрения современности родоначальниками математики как науки явились греки классического периода (6–4 вв. до н.э.). Математика, существовавшая в более ранний период, была набором эмпирических заключений. Первой книгой, в которой арифметика излагалась независимо от геометрии, было «Введение в арифметику» греческого математика и философа Никомаха Герасского (первая половина II века нашей эры). В истории арифметики ее роль сравнима с ролью «Начал» Евклида в истории геометрии. На протяжении более 1000 лет она служила стандартным учебником, поскольку в ней ясно, четко и всеобъемлюще излагалось учение о целых числах (простых, составных, взаимно простых).

Наша современная система счисления, основанная на позиционном принципе записи чисел и использовании нуля для обозначения пустого разряда, называется индо-арабской. На стене храма, построенного в Индии около 250 года до н.э., обнаружено несколько цифр, напоминающих по своим очертаниям наши современные цифры. Около 800 года н.э. индийская математика достигла Багдада. Термин «алгебра» происходит от начала названия книги Аль-джебр ва-л-мукабала (Восполнение и противопоставление), написанной в 830 году астрономом и математиком аль-Хорезми.

Около 1100 года в западноевропейской математике начался почти трехвековой период освоения сохраненного арабами и византийскими греками наследия Древнего мира и Востока. Поскольку арабы владели почти всеми трудами древних греков, Европа получила обширную математическую литературу. Перевод этих трудов на латынь способствовал подъему математических исследований. Все великие ученые того времени признавали, что черпали вдохновение в трудах греков. Заканчивая этот краткий экскурс в историю, можно сказать, что нашим знаниям о натуральных числах уже 5 тысяч лет! В дальнейшем математика развивалась как вширь – появлялись новые разделы и области математики, так и вглубь, например, постоянно расширялось понятие числа.

Несколько слов хочется сказать о вкладе нашей страны в развитие математики. На первый, поверхностный взгляд может показаться, что все в науке сделано древними египтянами, греками, потом учеными Западной Европы. Действительно, Россия стала цивилизованной страной, когда элементарная математика уже была создана, поэтому в школьных учебниках мы встречаем теорему Пифагора, формулу Герона, доказательство Гаусса, но нет элементарных вещей созданных Ивановым, Петровым и Сидоровым. Для того чтобы добраться до дифференциальных уравнений математической физики, теорем о распределении простых чисел, сложных законов теории вероятностей, неевклидовой геометрии и услышать фамилии Чебышева, Остроградского, Ковалевской, Лобачевского и десятков других наших соотечественников нужно подняться на вершины высшей математики. Естественно, это удается не каждому, поэтому фамилии наших математиков известны специалистам, а не широкому кругу читателей. Наша страна была первой в космосе. За этой таинственной работой тысяч людей тоже скрыты сложные дифференциальные уравнения и математические расчеты, о которых мы не узнаем, да и не сможем понять. Отечественная космонавтика сложнее и гораздо полезнее в практическом плане, чем древнеегипетские пирамиды.

Теперь о содержании раскрытой вами книги. Итак, тысячи лет ученые занимались натуральными числами, казалось все о них известно и больше делать здесь нечего. Но оказывается это неверно. В 1866 году шестнадцатилетний школьник находит среди чисел парочку «самородков», которые пропустили величайшие умы, такие как Ферма, Декарт и Эйлер. Ближе к нам по времени, всего-навсего в прошлом веке, простой школьный учитель из Индии, увлекшись изучением чисел, открывает в них столько нового, что хватило бы на десяток академиков. Это говорит о том, что среди натуральных чисел еще скрываются числа, обладающие некими уникальными свойствами, которые никто еще пока не открыл. Кроме того, велико число сформулированных, но нерешенных проблем, связанных с натуральными числами. Причем характерной чертой таких проблем является то, что понимание их формулировок доступно школьнику, а доказательства не могут найти столетиями. Современная вычислительная техника помогает перебрать и проверить свойства огромного количества натуральных чисел, но компьютеры бессильны перед бесконечностью и не способны доказать всеобщность некоторых утверждений. Вот об этом и будет дальнейшее повествование. Кроме того вы сможете проверить свои способности к теории чисел, решая специально подобранные задачи.

Этюд о единице, породившей бесконечность

Этюд – небольшое исследование, посвященное какому-либо вопросу, изучению узкой темы.

Математика школьная – это учебный предмет, имеющий множество разветвлений. В расписании начальной школы стоит предмет «математика», которая представляет собой арифметику, с вкраплениями геометрических сведений. В средней школе она перерастает в два предмета: алгебру и геометрию, на стыке геометрии и алгебры появляется раздел тригонометрия. Геометрия из планиметрии переходит в стереометрию, а алгебра подступает к началам математического анализа. Попутно бегло просматриваются комбинаторика и теория вероятностей. В каждом из этих разделов изучается некая основа, необходимый минимум и программа идет дальше, чтобы в следующем разделе изучить тоже только самое необходимое. В результате, коснувшись в арифметике теории чисел, дальше необходимости научить детей выполнению четырех математических действий с числами мы не идем. В эпоху компьютеров, когда калькулятор есть в каждом смартфоне, необходимость этих практических навыков энтузиазма не вызывает, тем более не вызывает интереса. Остается простое требование: «надо, Федя, надо!» То, что может увлечь математикой, заинтересовать, не изучается, а остаются простые примеры на выполнение действий с числами. Именно примеры, не требующие ничего кроме механического соблюдения правил, а не задачи, в которых есть вопросы, заставляющие думать. Тем более не остается времени на рассказы из истории математики, показывающие развитие человеческой мысли.

Когда то в институте, в качестве учебника, мы пользовались книгой «Теория чисел» Александра Адольфовича Бухштаба. Особое впечатление на меня произвело начало книги, где приводился Краткий исторический очерк развития теории чисел и ее последняя глава, в которой перечислялись нерешенные проблемы аддитивной теории чисел, начиная с проблемы Гольдбаха, проблемы простых чисел-близнецов, и далее прямо по пунктам были сформулированы 18 недоказанных на то время утверждений. В этих гипотезах нет каких-то специальных терминов, сложных формулировок. Они просты для понимания, но оказались сложны для доказательства. Прошло полвека с момента моей учебы в институте, появились мощные компьютеры, а в тех проблемах из книги Бухштаба мало что сдвинулось. Проверить выполнение какой-либо гипотезы до немыслимо больших чисел, затратив многие часы компьютерного времени, пожалуйста, а доказать, что это верно для всех чисел вообще – с этим проблемы. Вот что вызывает истинный интерес: вроде бы все просто, понятно, а попробуй, докажи или опровергни!

Поэтому, имея цель заинтересовать, возможно, даже увлечь математикой, выбираем основу основ – натуральные числа.

Натуральные числа (от лат. *naturalis* – естественный) – числа, возникающие естественным образом при счёте: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, … . Последовательность всех натуральных чисел, расположенных в порядке возрастания, называется *натуральным рядом чисел*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, … .

Сделан первый шаг, и сразу возникают сложности. Некоторые считают, что в математике точность абсолютная, «дважды два четыре», независимо от каких бы то ни было обстоятельств, стран, личностей и чего-то другого. На самом деле были споры и до сих пор нет единого мнения о включении нуля во множество натуральных чисел. В нашей стране возобладало приведенное выше определение натуральных чисел, как возникших при счете и не имеющих в своем составе нуля. Существует и альтернативное определение натуральных чисел, как чисел обозначающих количество предметов. Вроде бы небольшая разница, но понятие *количество* допускает отсутствие предметов, то есть ноль, а *счет* предполагает, что есть предметы для счета, хотя бы один, а пустоту не считают. Это отступление сделано, чтобы подчеркнуть важность точного определения любого понятия. Измени его и многое меняется. Мы оставляем нулю невысокий статус просто цифры, используемой для позиционной записи чисел, но отказываем ему в высокой чести быть натуральным числом.

Расположение чисел в натуральном ряду позволяет сравнивать их по величине: число, отстоящее дальше от начала натурального ряда, больше числа, стоящего ближе к началу; число, стоящее правее в натуральном ряду чисел, больше любого числа, стоящего левее.

Не будь у нас натурального ряда чисел, мы бы не знали слова *упорядочить*. Натуральный ряд чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, … – демонстрирует упорядочение по возрастанию в чистейшем виде и становится эталонным инструментом для упорядочения других объектов. Применяемое в словарях лексикографическое упорядочение слов делается на основе упорядочения алфавита, а алфавит упорядочен с использованием натурального ряда чисел: буква «а» – первая, буква «б» – вторая и так далее.

Натуральные числа – это первые числа, которые придумал человек. Множество натуральных чисел ограничено с одной стороны, у него есть минимальное число – единица, но в сторону увеличения оно бесконечно и этим объясняется тот факт, что до сих пор все свойства этого множества чисел не изучены до конца и многие тайны скрыты в этом стройном ряду чисел.

Числа возникли из потребности счета различных предметов и сравнения количественных показателей различных совокупностей предметов. Число – это абстракция, используемая для количественной характеристики объектов, отвлекаясь от природы этих объектов. Возникновение понятия натурального числа было важнейшим моментом в развитии математики. Появилась возможность изучать сами числа независимо от тех задач, в связи с которыми они возникли. Говоря о натуральных числах, сразу же нужно говорить о действиях или математических операциях с числами. В самой природе построения натурального ряда чисел заложено действие *прибавление единицы*, так как каждое следующее натуральное число получается из предыдущего увеличением его на единицу. Это первое действие с числами. Если в языке вначале было слово, то в математике вначале была единица. Затем к ней прибавили еще единицу и получили число два. К двойке прибавили единицу – получили три, и процесс устремился в бесконечность. Можно сказать, что единица и *операция прибавление единицы* породили бесконечно много натуральных чисел. Сложение двух натуральных чисел – это уже следующее действие, которое фактически является неоднократным прибавлением единицы. $5+3=5+1+1+1$, то есть прибавить к числу 5 число 3 – это прибавить к пяти три раза единицу. При сложении любых двух натуральных чисел получается тоже натуральное число, действие замкнуто на множестве натуральных чисел. Особо останавливаться на фактах известных любому школьнику не будем, хотя и перепрыгнуть через них не упоминая нельзя, но цель книги – поиски интересного, может быть для кого-то нового материала.

Следующим замкнутым действием на множестве натуральных чисел будет умножение, которое по существу представляет собой дальнейшее развитие действия сложения. Умножение – это многократное сложение одинаковых слагаемых: $3\cdot5=3+3+3+3+3$.

Третье действие, не выводящее за рамки натуральных чисел, – это возведение в степень, которое в свою очередь представляет собой многократное умножение одинаковых множителей: $4^3=4\cdot4\cdot4$.

Таким образом, в основе сложения стоит неоднократное прибавление единицы, в основе умножения стоит неоднократное сложение, а в основе возведения в степень – неоднократное умножение, поднимая каждый раз предыдущее действие на новую ступень.

$3^2=3\cdot3=3+3+3=3+1+1+1+1+1+1$.

Эти действия можно считать основными, хотя исторически, после сложения, скорее всего, появилось вычитание, как действие обратное сложению. Но вычитание не замкнуто на множестве натуральных чисел, вычитать здесь можно только из большего числа меньшее число. Даже вычитание равных чисел выводит нас из множества натуральных чисел, среди которых нет нуля. Ноль не является натуральным числом, и ноль не может стоять первой цифрой в записи натурального числа. Даже если его там искусственно поставить, он будет незначащей цифрой.

В связи ограничениями, накладываемыми на вычитание чисел, необходимо ввести действия сравнения чисел между собой, чтобы иметь возможность определить, выполнимо ли вычитание для определенной пары взятых чисел. Учитывая упорядоченность натурального ряда чисел по возрастанию, для любой пары чисел a и b можно сделать одно из трех заключений: $a<b$, $a>b$, $a=b$.

Действие, с которым больше всего проблем на множестве натуральных чисел – это действие деления натуральных чисел, так как выполнимо оно не всегда, и определение возможности деления одного числа на другое не выходя за рамки натуральных чисел, не такое простое действие как для вычитания. Существует целый ряд признаков делимости, которые позволяют, не выполняя само деление, дать ответ возможно ли деление без остатка в принципе. Основные признаки делимости рассмотрим в разделе упражнений с натуральными числами.

Вернемся к единице. Единица единственное из натуральных чисел, которое порождает новые натуральные числа только при сложении, но не при умножении или возведении в степень. При умножении на единицу нового числа не получается, единица в любой степени остается единицей! У древних греков единица служила основой всех других натуральных чисел и с этим не поспоришь. Прибавление единицы к числу меняло его четность. Изменение четности числа от прибавления единицы можно посмотреть в одном очень интересном алгоритме. Алгоритм, позволяет за конечное число шагов-операций превратить любое натуральное число в единицу. Назовем его *Алгоритм возвращения к началу*. Алгоритм циклический, шаги повторяются до получения единицы. Берем произвольное натуральное число.

Шаг 1. Если взятое число четное, нужно разделить его на 2. Если число нечетное, перейти к шагу 2.

Шаг 2. Если число нечетное, нужно умножить его на 3 и прибавить 1. После чего перейти к шагу 3.

Шаг 3. Вернуться в начало алгоритма и повторять вышеописанные действия циклически, пока не получится единица.

Как видите, второй шаг превращает нечетное число в четное число в результате прибавления единицы. Возьмем произвольное двузначное число, например, 53. Число нечетное – выполняем шаг 2. Получаем 160 – возвращаемся и делаем шаг 1, получаем 80, продолжаем 40, 20, 10, 5. Снова шаг 2 – 16. Шаг 1: 8, 4, 2, 1. Казалось бы, при нечетности числа, умножая его на три, алгоритм будет уводить нас к большим числам, но нет, в конечном итоге приходим к единице. Считается, что по этому алгоритму любое число можно вернуть к «неделимой сущности», то есть, к единице. Ни один специалист по теории чисел пока не смог доказать, что такой алгоритм заканчивается единицей для любого первоначально взятого натурального числа. Второй, не выясненный вопрос, связанный с этим алгоритмом: почему для одних чисел последовательность получаемых значений короткая, а для других слишком длинная. Показанная выше последовательность имеет вид: 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Всего 12 чисел, включая начальное число и конечную единицу. Возьмем для примера число 25, значительно меньше 53, и выпишем получаемую последовательность чисел: 25, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Число меньше, а шагов больше в два раза. Теперь испытаем число 27, недалеко отстоящее от 25: 27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, … . Честно говоря, мне уже надоело, последовательность получается длинная-длинная. В ней встретится даже четырехзначное число больше девяти тысяч. В конечном итоге она придет к единице, но почему так долго, в чем отличие начальных чисел 25 и 27?

Если кто-то заинтересуется исследованием этого алгоритма и захочет поэкспериментировать с ним, то можно видоизменить второй шаг, делая в нем деление полученного четного числа на 2 и только потом возвращение к шагу 1. Это сократит ряд членов последовательности, приводящей к единице. Шаг 2. Если число нечетное, нужно умножить его на 3, затем прибавить 1 и результат поделить на 2. После чего перейти к шагу 3. Можно посмотреть, как изменится алгоритм, если на втором шаге умножать не на 3, а на другое простое нечетное число. Так уже на первых страницах повествования появились интересные и еще не решенные вопросы, которые ждут своих исследователей.

После лирического отступления с интересным алгоритмом вернемся к математическим операциям с натуральными числами. Все перечисленные ранее действия или операции называются *бинарными* (приставка *би* от слова *два*, по числу аргументов арифметической операции), так как в них всегда два исходных компонента: два слагаемых, уменьшаемое и вычитаемое, два сомножителя, делимое и делитель, основание и степень, два сравниваемых между собой числа. Для всех действий, кроме возведения в степень придуманы свои знаки операций, которые ставятся между исходными компонентами:

$a+b$; $a-b$; $a\cdot b$; $a:b$; a^b; $a<b$; $a>b$; $a=b$.

Возведение в степень, аристократ среди действий с числами, показывается не с помощью специального знака, а особой позиционной записью a^b. Аристократизм этого действия проявляется и в том, что у него, в отличие от сложения и умножения нет переместительного закона. От перестановки слагаемых сумма не меняется, от перестановки сомножителей не меняется произведение, но стоит поменять местами основание и показатель степени, и равенства нет:

$2^3=8\neq 3^2=9$; $5^4=625\neq 4^5=1024$.

Правда в этом правиле есть одно исключение: $2^4=4^2=16$.

Еще одно отличие действия возведения в степень от сложения и умножения в том, что у сложения и умножения есть ровно по одному обратному действию: для сложение – вычитание, для умножения – деление. Возведение в степень имеет два обратных действия: извлечение корня и вычисление логарифма. У действий, обратных возведению в степень, появляются свои знаки – радикал и логарифм, но о них мы не будем вести речь, так как их выполнимость на множестве натуральных чисел еще сильнее под вопросом, чем деление чисел.

Каждое обратное действие приводило к расширению понятия числа. Вычитание, чтобы быть замкнутой операцией, расширило множество натуральных чисел до чисел целых, которые включают в себя все натуральные числа, к ним еще добавляется ноль, и числа противоположные натуральным – отрицательные числа. Для замкнутости деления чисел пришлось снова расширять множество чисел, уже до чисел рациональных. Наконец, извлечение корня и вычисление логарифмов потребовали введения чисел иррациональных, которые вместе с рациональными числами составили множество действительных или вещественных чисел.

На множестве действительных чисел стали выполняться все перечисленные операции, но…захотелось извлекать корни четной степени из отрицательных чисел, и придумали числа комплексные. Думаете на этом остановились, как бы ни так. Есть еще числа гиперкомплексные. И все это тоже удивительно интересно, но мы не станем «растекаться мыслью по древу» и вернемся к числам натуральным.

Все перечисленные бинарные операции с натуральными числами известны из программы начальной и средней школы, также, надеюсь, как и свойства этих операций.

Работая с натуральными числами, в особенности с многозначными числами, состоящими из нескольких цифр, часто приходится выполнять с ними операции, которые являются *унар-*

ными (приставка *уно* от слова *один*), то есть операции, выполняемые с одним отдельно взятым числом, а не с парой чисел. Например, признак делимости на 3 определяется так: многозначное число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3. Аналогично, на 9 делятся те числа, сумма цифр которых делится на 9. Оба раза звучит словесный оборот «сумма цифр данного числа», который для каждого числа однозначно определяет некоторое другое натуральное число. Фактически, это действие можно считать функций, заданной на множестве натуральных чисел, а иначе можно назвать унарной операций. Часто работая с этим понятием, для него почему-то не придумали специального знака. Работая далее с натуральными числами, приходится рассматривать сумму квадратов цифр данного числа или сумму кубов цифр числа, количество делителей числа, сумму всех его делителей или сумму собственных делителей (в которые не входит само число), приходится упорядочивать цифры числа по возрастанию или по убыванию и так далее. Все эти операции применяются к отдельно взятому числу, то есть являются унарными операциями. Для обозначения этих операций математики используют разные знаки, например, для обозначения суммы всех делителей натурального числа Леонард Эйлер ставил перед числом знак интеграла, об этом написал Д. Пойа, который сам использовал обозначение «функция сигма от *n*» [25]. В разных книгах встречаются и другие попытки обозначения подобных операций. Или же для них сохраняются словесные формулировки. Это привело меня к мысли ввести для этих унарных операций специальные, различные, но однотипные, обозначения.

Если рассматривать знаки бинарных операций (кроме возведения в степень и обратных к нему), то знак действия ставится между двумя числами. Для унарной операции это не подойдет, число одно. Не поставишь знак и справа от числа, там будет стоять знак равенства, справа от числа и выше ставится показатель степени, справа и ниже ставится индекс числа. Выход один, навеянный физиками:

$$ {}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{30}_{15}P + {}^{1}_{0}n. $$

Свободна левая сторона числа. Предлагаю ввести новую группу знаков для обозначения унарных математических операций с натуральными числами. Например, ставим знак плюс слева и снизу от числа для обозначения суммы цифр числа, получаем запись:

${}_{+}n$ – сумма цифр данного натурального числа, например, ${}_{+}56235=5+6+2+3+5=21$.

Далее вводим обозначения других унарных операций по аналогии с первой операцией:

${}_{+}^{2}n$ – сумма квадратов цифр данного натурального числа,

${}_{+}^{2}562=5^2+6^2+2^2=25+36+4=65$;

${}_{+}^{3}n$ – сумма кубов цифр данного натурального числа,

${}_{+}^{3}235=2^3+3^3+5^3=8+27+125=160$;

${}_{+}^{d}n$ – сумма всех делителей данного натурального числа,

${}_{+}^{d}12=1+2+3+4+6+12=28$;

${}_{+}^{s}n$ – сумма собственных делителей данного числа,

${}_{+}^{s}6=1+2+3=6$;

${}_q^d n$ – количество делителей данного числа, ${}_q^d 24=8$;

${}_q^s n$ – количество собственных делителей числа, ${}_q^s 30=7$;

${}_{\text{в}}n$ – упорядочение цифр данного числа по возрастанию,
${}_{\text{в}}4723=2347$;

${}_{\text{у}}n$ – упорядочение цифр данного числа по убыванию,
${}_{\text{у}}4723=7432$;

${}_{\text{х}}n$ – произведение цифр данного числа,
${}_{\text{х}}1953=1\cdot 9\cdot 5\cdot 3=135$.

В этом предложении есть свои плюсы. Во-первых, любой введенный математический знак фактически является иероглифом, то есть заменяет целое слово или, как здесь, целую группу слов.

Во-вторых, все эти знаки есть в редакторе формул программы *Microsoft Word* и, следовательно, никаких проблем с набором текстов на компьютере не создадут.

Время покажет, приживется ли это предложение.

Среди унарных операций, которые можно провести с каждым натуральным числом есть одна, которая первоначально использовалась не в математических целях, а в целях околонаучных, типа гаданий, предсказаний и тому подобного. Операция называется вычисление цифрового корня числа. *Цифровой корень натурального числа* – это цифра, полученная в результате повторяющегося процесса суммирования цифр сначала данного числа, затем вновь полученного, повторяя процесс до тех пор, пока не будет получена одна цифра. Например, цифровой корень числа 1987652 это 2, потому что 1+9+8+7+6+5+2=38, далее 3+8=11 и, наконец, 1+1=2. Для этой операции встречается и другое название – *конечная сумма цифр*. В обоих случаях название многословное. Пользуясь сказанным выше, по аналогии, можно ввести обозначение для этой унарной операции: ${}_{(+)}n$ – тогда запись примет вид: ${}_{(+)}1987652=2$. Объяснение вводимого знака следующее: + означает суммирование цифр, а круглые скобки показывают, что суммирование неоднократное, как в периодической дроби они показывают период цифры.

Очевидное свойство цифрового корня: $n\leq 9 \; {}_{(+)}n=n$, то есть цифровой корень однозначного числа равен этому числу, а точнее этой цифре. Имеет место следующее утверждение: Сумма цифр числа n имеет такой же остаток при делении на 9, как и число n.

Поскольку, если число больше 9, сумма цифр этого числа меньше самого числа, то справедливы следующие две формулировки:

а). Цифровой корень числа совпадает с остатком от деления исходного числа на 9, если только этот остаток отличен от 0.

б). Для чисел, сравнимых с 0 по модулю 9, цифровой корень равен не 0, а 9.

Цифровые корни часто используют для того, чтобы убедиться, что какое-нибудь очень большое число не является точным квадратом или кубом. Все квадраты имеют цифровые корни 1, 4, 7 или 9, а их последними цифрами могут быть 2, 3, 7 или 8. Кубы могут оканчиваться на любую цифру, но их цифровыми корнями могут быть только 1, 8 или 9.

Определившись с математическими операциями на множестве натуральных чисел, в том числе с операциями унарными, которые в этом множестве часто применяются, перейдем к изучению свойств натуральных чисел. Но прежде хочу поместить изображения вводимых унарных операций так, как они выглядят в редакторе формул, а не в клавиатурном наборе. Клавиатурный набор искажает эти знаки. Последний знак еще не введен, он встретится в дальнейшем изложении. Подчеркну, что введенные обозначения объединены одной идеей, легко запоминаются и допускают продолжение, то есть введение новых обозначений по аналогии при возникновении необходимости.

$$ {}_{+}n \qquad {}^{2}_{+}n \qquad {}^{3}_{+}n \qquad {}^{d}_{+}n \qquad {}^{s}_{+}n \qquad {}^{d}_{q}n $$

$$ {}_{\times}n \qquad {}_{\uparrow}n \qquad {}_{\downarrow}n \qquad {}_{(+)}n \qquad {}^{2}_{(+)}n $$

Вернемся к числам. При рассмотрении натуральных чисел имеют место несколько подходов к изучению их свойств. Рассматривая некое свойство, из множества всех натуральных чисел выделяется подмножество чисел, обладающих данным свойством, и этому подмножеству присваивается характеристический термин в виде прилагательного. Как оказалось, таких прилагательных потребуется много. Иногда в таком подмножестве будет конечное количество чисел, но это редко, чаще всего из бесконечности выделяется другая бесконечность. Мы получаем интереснейшее явление: в бесконечном множестве можно выделить бесконечно много бесконечных подмножеств.

С другой стороны выделенное подмножество можно рассматривать как числовую последовательность, обладающую определенным свойством и говорить не просто о подмножестве, а об упорядоченном подмножестве, в котором можно пронумеровать его члены, то есть превратить подмножество в последовательность.

Еще один подход в рассмотрении натуральных чисел – это извлечь из натурального ряда конкретное число, рассмотреть свойства этого числа, присущие именно ему и поставить вопрос, есть ли другие числа, обладающие подобным свойством. Иначе говоря, дать числу характеристику. Особенно интересен вопрос вариативного представления чисел с помощью математических действий и знаков. Например, $100=(1+2+3+4)^2=1^3+2^3+3^3+4^3$. В таких вариациях с числами своя, математическая красота. Этими процессами мы и займемся далее.

Натуральный ряд чисел напоминает мне клавиатуру фортепиано с чередованием черных и белых клавишей: нечетное, четное, нечетно, четное и так далее. Представьте себе, что каждому числу был бы присущ определенный звук. Если уж на 88 клавишах фортепиано много веков композиторы создают мелодии, исчерпать разнообразие которых кажется невозможно, то какую музыку услышали бы мы, если бы числа звучали! Подумав об этом, решил писать не главы книги, а этюды, вариации и упражнения. Как будто мы учимся играть на фортепиано.

Вариации на тему разнообразия натуральных чисел

Вариация – произведение, представляющее собой повторение и разработку одной темы в различных видоизменениях.

Эта книга о натуральных числах, следовательно, о математике, но написана она на русском языке, и при изложении материала невозможно обойтись без прилагательных. Поэтому поговорим о прилагательных, которыми могут характеризоваться различные числа. Уверяю вас, в этом направлении можно найти много интересного, возможно, ранее неизвестного вам. За основу берем узкую область математики – только *натуральные* числа (первое прилагательное). При этом мы должны отбросить такие прилагательные как: отрицательные, целые, противоположные, дробные, рациональные, иррациональные, трансцендентные, алгебраические, действительные, вещественные, комплексные и гиперкомплексные. Все эти слова относятся к последующим расширениям множества натуральных чисел, не входящим в область нашего рассмотрения. Думаете, после этого останется мало прилагательных, которые можно «приложить» к натуральным числам? Как бы ни так, их еще удивительно много. В первую очередь натуральные числа являются *положительными* числами (второе прилагательное), к которым относятся все числа большие нуля.

Это были два общих определения, относящиеся ко всем натуральным числам. Далее мы будем использовать некие характеристические свойства, позволяющие выделить определенные числа из общей массы натуральных чисел или разбить их на непересекающиеся, а может быть и пересекающиеся подмножества. Классификацию будем вести одновременно по двум уровням. В первый уровень выделим основополагающие классы чисел, а во второй производные от основных определений, менее значимые.

Первый уровень классификации

Критерий – количество цифр в числе

По количеству цифр в записи числа натуральные числа можно разделить на следующие непересекающиеся подмножества:

однозначные, состоящие из одной цифры: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 (их всего девять);

двузначные, состоящие из двух цифр: от 10 до 99 (их девяносто);

трехзначные, от 100 до 999 (их девятьсот) и так далее, с обобщающим прилагательным – *многозначные*.

Критерий – делимость чисел

Взяв в качестве инструмента для классификации деление чисел, получаем разбиение натуральных чисел на *четные* и *нечетные*, *простые* и *составные*, *избыточные* и *недостаточные*, наконец, *совершенные* и *дружественные*.

Поговорим о каждом виде чисел подробнее.

Начнем с *четных* и *нечетных*, с ними нет никаких затруднений, они изучаются в школе. *Четными* называются числа, которые делятся на 2 без остатка: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24,…. *Нечетными* называются числа, которые не делятся на 2, а дают остаток 1 при делении на 2: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23,….

В натуральном ряду чисел идут попеременно нечетное число, четное число, нечетное, четное. При сложении двух четных чисел, получается четное число, при сложении двух нечетных чисел тоже получается четное число: 8+18=26, 9+19=28. Если складывают четное число с нечетным, то получается нечетное число. Если умножаются нечетные числа, то получается число нечетное, а если хотя бы один сомножитель четный, то и всё произведение будет четным. Деление на четные и нечетные числа разбивает множество натуральных чисел на два равных, бесконечных и непересекающиеся подмножества.

По-другому произойдет разбиение натуральных чисел, если ввести более широкое понятие *кратность*. Натуральное число, которое делится на данное натуральное число без остатка, называется *кратным* данного числа. Про четные числа можно сказать, что они кратны числу 2.

Далее можно говорить о числах, которые кратны 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, …; кратны 4: 4, 8, 12, 16, 20, …; кратны 5: 5, 10, 15, 20, … и так далее. Получаются пересекающиеся подмножества, имеющие общие элементы. Так число 12 кратно 2, 3, 4, 6 и 12. Ему хоть разорвись, но нужно попасть в пять различных подмножеств. В них же попадут числа 24, 48 и другие. Любое натуральное число имеет бесконечно много чисел кратных ему. Наименьшим из кратных некоторого числа является само это число. Например, наименьшее число кратное 7 – это само число 7. Получили еще одно прилагательное для характеристики натуральных чисел – *кратное*.

Критерии – количество делителей и их суммы

Натуральное число, имеющее ровно два делителя (единицу и само себя), называется *простым*. Это одно из важнейших подмножеств натуральных чисел. Доказано, что простых чисел бесконечно много, и написано о них бесконечно много, так как они не так уж просты, как их назвали, поэтому о них поговорим чуть позже и отдельно.

Все натуральные числа, кроме единицы и простых, имеют более двух делителей. Натуральные числа, имеющие более двух делителей, называются *составными*. В связи с делимостью чисел рассматривают две операции: сумма всех делителей числа ${}_{+}{}^{d}n$, включает само это число, и сумма собственных делителей ${}_{+}{}^{s}n$, которая рассматривается без самого числа. Например, ${}_{+}{}^{d}12=1+2+3+4+6+12=28$; ${}_{+}{}^{s}12=1+2+3+4+6=16$.

С помощью суммы собственных делителей числа, все числа делятся на три класса:

если сумма собственных делителей меньше самого числа (${}_{+}{}^{s}n<n$), то число называется *недостаточным*;

если сумма собственных делителей больше самого числа (${}_{+}{}^{s}n>n$), то число называется *избыточным*;

если свершится чудо и сумма собственных делителей будет равна самому числу (${}_{+}{}^{s}n=n$), то число называется *совершенным*!

Следует отметить, что древние греки, от которых идут основы теории чисел, не считали само число его делителем. Чтобы наглядно прочувствовать разбиение натуральных чисел на отдельные виды, нужно поработать с числами. Возьмем для примера первые 100 чисел натурального ряда. Вычислим делители каждого из чисел, найдем количество делителей, сумму всех делителей числа и сумму собственных делителей. После этого можно будет сделать некоторые выводы о количестве тех или иных чисел в первой сотне.

n	Делители	${}^{d}_{q}n$	${}^{d}_{+}n$	${}^{s}_{+}n$	Примечания
1	1	1	1	0	недостаточное
2	1, 2	2	3	1	недостаточное, простое
3	1, 3	2	4	1	недостаточное, простое
4	1, 2, 4	3	7	3	недостаточное, состав.
5	1, 5	2	6	1	недостаточное, простое
6	1, 2, 3, 6	4	12	6	совершенное
7	1, 7	2	8	1	недостаточное, простое
8	1, 2, 4, 8	4	15	7	недостаточное, состав.
9	1, 3, 9	3	13	4	недостаточное, состав.
10	1, 2, 5, 10	4	18	8	недостаточное, состав.
11	1, 11	2	12	1	недостаточное, простое
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6	28	16	избыточное, состав.
13	1, 13	2	14	1	недостаточное, простое
14	1, 2, 7, 14	4	24	10	недостаточное, состав.
15	1, 3, 5, 15	4	24	9	недостаточное, состав.
16	1, 2, 4, 8, 16	5	31	15	недостаточное, состав.
17	1, 17	2	18	1	недостаточное, простое
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	6	39	21	избыточное, состав.
19	1, 19	2	20	1	недостаточное, простое
20	1, 2, 4, 5, 10, 20	6	42	22	избыточное, состав.
21	1, 3, 7, 21	4	32	11	недостаточное, состав.
22	1, 2, 11, 22	4	36	14	недостаточное, состав.
23	1, 23	2	24	1	недостаточное, простое

24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	8	60	36	избыточное, состав.
25	1, 5, 25	3	31	6	недостаточное, состав.
26	1, 2, 13, 26	4	42	16	недостаточное, состав.
27	1, 3, 9, 27	4	40	13	недостаточное, состав.
28	1, 2, 4, 7, 14, 28	6	56	28	совершенное, состав.
29	1, 29	2	30	1	недостаточное, простое
30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	8	72	42	избыточное, состав.
31	1, 31	2	32	1	недостаточное, простое
32	1, 2, 4, 8, 16, 32	6	63	31	недостаточное, состав.
33	1, 3, 11, 33	4	48	15	недостаточное, состав.
34	1, 2, 17, 34	4	54	20	недостаточное, состав.
35	1, 5, 7, 35	4	48	13	недостаточное, состав.
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	9	91	55	избыточное, состав.
37	1, 37	2	38	1	недостаточное, простое
38	1, 2, 19, 38	4	60	22	недостаточное, состав.
39	1, 3, 13, 39	4	56	17	недостаточное, состав.
40	1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40	8	90	50	избыточное, состав.
41	1, 41	2	42	1	недостаточное, простое
42	1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42	8	96	54	избыточное, состав.
43	1, 43	2	44	1	недостаточное, простое
44	1, 2, 4, 11, 22, 44	6	84	40	недостаточное, состав.

45	1, 3, 5, 9, 15, 45	6	78	33	недостаточное, состав.
46	1, 2, 23, 46	4	72	26	недостаточное, состав.
47	1, 47	2	48	1	недостаточное, простое
48	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48	10	124	76	избыточное, состав.
49	1, 7, 49	3	57	8	недостаточное, состав.
50	1, 2, 5, 10, 25, 50	6	93	43	недостаточное, состав.
51	1, 3, 17, 51	4	72	21	недостаточное, состав.
52	1, 2, 4, 13, 26, 52	6	98	46	недостаточное, состав.
53	1, 53	2	54	1	недостаточное, простое
54	1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54	8	120	66	избыточное, состав.
55	1, 5, 11, 55	4	72	17	недостаточное, состав.
56	1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56	8	120	64	избыточное, состав.
57	1, 3, 19, 57	4	80	23	недостаточное, состав.
58	1, 2, 29, 58	4	90	32	недостаточное, состав.
59	1, 59	2	60	1	недостаточное, простое
60	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60	12	168	108	избыточное, состав.
61	1, 61	2	62	1	недостаточное, простое
62	1, 2, 31, 62	4	96	34	недостаточное, состав.
63	1, 3, 7, 9, 21, 63	6	104	41	недостаточное, состав.
64	1,2,4,8,16,32, 64	7	127	63	недостаточное, состав.

65	1, 5, 13, 65	4	84	19	недостаточное, состав.
66	1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66	8	144	78	избыточное, состав.
67	1, 67	2	68	1	недостаточное, простое
68	1, 2, 4, 17, 34, 68	6	126	58	недостаточное, состав.
69	1, 3, 23, 69	4	96	27	недостаточное, состав.
70	1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70	8	144	74	избыточное, состав.
71	1, 71	2	72	1	недостаточное, простое
72	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72	12	195	123	избыточное, состав.
73	1, 73	2	74	1	недостаточное, простое
74	1, 2, 37, 74	4	114	40	недостаточное, состав.
75	1, 3, 5, 15, 25, 75	6	124	49	недостаточное, состав.
76	1, 2, 4, 19, 38, 76	6	140	64	недостаточное, состав.
77	1, 7, 11, 77	4	96	19	недостаточное, состав.
78	1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78	8	168	90	избыточное, состав.
79	1, 79	2	80	1	недостаточное, простое
80	1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80	10	186	106	избыточное, состав.
81	1, 3, 9, 27, 81	5	121	40	недостаточное, состав.
82	1, 2, 41, 82	4	126	44	недостаточное, состав.
83	1, 83	2	84	1	недостаточное, простое

84	1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84	12	224	140	избыточное, состав.
85	1, 5, 17, 85	4	108	23	недостаточное, состав.
86	1, 2, 43, 86	4	132	46	недостаточное, состав.
87	1, 3, 29, 87	4	120	33	недостаточное, состав.
88	1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88	8	180	92	избыточное, состав.
89	1, 89	2	90	1	недостаточное, простое
90	1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90	12	234	144	избыточное, состав.
91	1, 7, 13, 91	4	112	21	недостаточное, состав.
92	1, 2, 4, 23, 46, 92	6	168	76	недостаточное, состав.
93	1, 3, 31, 93	4	128	35	недостаточное, состав.
94	1, 2, 47, 94	4	144	50	недостаточное, состав.
95	1, 5, 19, 95	4	120	25	недостаточное, состав.
96	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96	12	252	156	избыточное, состав.
97	1, 97	2	98	1	недостаточное, простое
98	1, 2, 7, 14, 49, 98	6	171	73	недостаточное, состав.
99	1, 3, 9, 11, 33, 99	6	156	57	недостаточное, состав.
100	1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100	9	217	117	избыточное, состав.

В первой сотне выявлено только два *совершенных* числа 6 и 28. Совершенные числа – это большая редкость.

Простых чисел в первой сотне 25. Исключаем единицу, как не относящуюся ни к простым числам, ни к составным, следовательно, в первой сотне 74 составных числа. Составных чисел больше и отношение количества составных чисел к количеству простых равно 74/25=2,96.

Избыточных чисел в первой сотне 22, недостаточных больше, их 75. Отношение количества недостаточных чисел к количеству избыточных равно 75/22=3,4(09). Как много бедных, как мало богатых…, среди чисел, разумеется. Эти соотношения меняются в зависимости от рассматриваемого отрезка натурального ряда чисел. В интернете можно найти таблицу делителей натуральных чисел от 1 до 1000 и даже до 10 000. Для множества в тысячу чисел результаты следующие: простых чисел 168, следовательно, составных 831 и соотношение равно 831/168=4,95.

Рассмотрим поближе *избыточные* числа: 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 100 … .

Существует бесконечно много как чётных, так и нечётных избыточных чисел. Уверяю вас, это утверждение доказано, но посмотрите на перечисленные избыточные числа первой сотни! Не в пору ли усомниться в сказанном, где среди них нечетные числа? Их нет. Наименьшим избыточным числом является 12, это мы видим в приведенной таблице. Оказывается, избыточные нечетные числа более редкая вещь и чтобы найти наименьшее из них пришлось бы перебирать числа первой тысячи, так как наименьшим нечетным избыточным числом является 945, которое стоит на 386-ом месте среди избыточных чисел. В тексте будут попадаться задания для читателей отмеченные цифрой и знаком вопроса. На такие задания в конце книги даются ответы.

1?. Какое следующее по порядку нечетное избыточное число из бесконечного множества нечетных избыточных чисел?

Попробуйте найти сами. Подскажу только, что и во второй тысяче есть только одно нечетное избыточное число, в третьей тысяче их два и так далее. Довольно редкие создания. Если говорить о множестве всех натуральных чисел, то почти каждое четвёртое натуральное число является избыточным. Более точно установлено, что произвольно взятое натуральное число является избыточным с вероятностью, лежащей между 0,2474 и 0,2480.

Интересную закономерность доказал советский математик Лев Шнирельман: любое натуральное число, большее 28 123, может быть представлено в виде суммы двух избыточных чисел. Видите, работают люди с натуральными числами, находят новые закономерности. Нам и далее будут встречаться закономерности и проблемы, связанные со сложением чисел, их называют аддитивными, в отличие от вопросов, связанных с умножением, называемых мультипликативными. Почему-то аддитивных проблем в теории чисел больше, видимо, это заложено в аддитивном принципе получения множества натуральных чисел. Таким образом, Лев Шнирельман доказал одну из аддитивных теорем.

Нельзя обойти вниманием недостаточные числа. Их гораздо больше, чем избыточных, поэтому им всегда уделяли меньше внимания, никакой благотворительности, сами пусть разбираются, почему они недостаточные. Вот сколько *недостаточных* набралось среди первых пятидесяти чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50. Существует бесконечно много как чётных, так и нечётных недостаточных чисел. Но обратите внимание, нечетные числа среди недостаточных чисел встречаются гораздо чаще четных в отличие от чисел избыточных. Тоже ведь интересно, почему образовалось такое распределение? Возможно потому, что к недостаточным числам относятся все простые числа (так как у них только один собственный делитель – это единица), а также степени простых чисел и собственные делители недостаточных и совершенных чисел.

Переходим в область редко встречающихся чисел и поговорим о редкостях, превосходящих в своей исключительности даже нечетные избыточные числа. *Совершенные числа* были известны как древним грекам, так и математикам древнего Востока. До Евклида были известны только два совершенных числа, которые находятся в первой сотне натуральных чисел: 6 и 28. Евклид вывел формулу для получения четных совершенных чисел, он доказал, что четное совершенное число имеет вид $2^{p-1}\cdot(2^p-1)$, где p простое число и при этом 2^p-1 также должно быть простым. Используя эту формулу, он нашел третье и четвертое совершенные числа при $p=5$ и $p=7$.

$2^{5-1}\cdot(2^5-1)=16\cdot(32-1)=16\cdot31=496$;

$2^{7-1}\cdot(2^7-1)=64\cdot(128-1)=64\cdot127=8\ 128$.

Формула Евклида позволяет без труда доказывать многочисленные свойства совершенных чисел. Все совершенные числа треугольные (об этом дальше). Это значит, что, взяв совершенные число шаров, мы всегда сможем сложить из них равносторонний треугольник. Все совершенные числа, кроме 6, можно представить в виде частичных сумм ряда кубов последовательных нечетных чисел: $1^3+3^3+5^3+ \ldots$. Впоследствии Леонард Эйлер строго доказал, что все чётные совершенные числа имеют вид, указанный Евклидом. В первой сотне их оказалось всего два, а далее они отстоят друг от друга все дальше и дальше. Почти полторы тысячи лет люди знали только четыре совершенных числа. Трудность состояла не в том, чтобы подставить в формулу очередное простое p, а в том, чтобы проверить простоту 2^p-1. Требовались большие по объему вычисления, а вычислительной техники не существовало. Только в XV веке смогли обнаружить пятое совершенное число 33 550 336, соответствующее $p=13$ в формуле Евклида. Сделал это немецкий математик Региомонтан. В следующем веке немецкий учёный Шейбель нашел ещё два совершенных числа: 8 589 869 056 и 137 438 691 328. Они соответствуют $p=17$ и $p=19$. Независимо от него на совершенство этих чисел указывали итальянец Катальди и француз Марин Мерсенн.

Самое любопытное, что четные совершенные числа кроме 6 (а до сих пор не было найдено ни одного нечетного совершенного числа!) заканчиваются в десятичной записи на 16, 28, 36, 56, 76 или 96. Если отбросить наименьшее совершенное число 6, то у всех остальных совершенных чисел цифровой корень равен 1.

С появлением компьютеров стали возможными вычисления, превосходящие человеческие возможности. На январь 2018 года известно 50 чётных совершенных чисел. Но по-прежнему неизвестно, бесконечно ли множество всех совершенных чисел. Нечётных совершенных чисел до сих пор не обнаружено, однако не доказано и то, что их не существует. Неизвестно также конечно ли множество нечётных совершенных чисел, если они существуют.

Проверено, что нечётное совершенное число, если оно существует, превышает 10^{1500}; при этом число простых делителей такого числа с учётом кратности не меньше 101. Поэтому не бросайтесь сразу искать нечетное совершенное число, это уже дело компьютерных программ, а не человека.

В природе кроме редких драгоценных камней существуют более распространенные полудрагоценные камни. У нас кроме совершенных чисел будут рассмотрены не совсем совершенные, но их мы отнесем во второй уровень классификации, в виду ослабления характеристического критерия.

С древних времен пару чисел 220 и 284 считали символом дружбы. В средние века имели хождение талисманы с выгравированными на них числами 220 и 284, якобы способствующими укреплению любви. Чем же заинтересовали людей эти два с виду обыкновенных числа?

Список собственных делителей числа 220: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 и 110, сумма делителей равна 284.

Список собственных делителей числа 284: 1, 2, 4, 71 и 142, сумма делителей равна 220.

Последователи Пифагора дали этим числам название – *дружественные* числа. Однако пифагорейцы знали только одну пару дружественных чисел – 220 и 284. Если для двух натуральных чисел сумма собственных делителей первого числа равна второму из этих чисел и наоборот, то такие два числа называются *дружественными*.

То есть, пару натуральных чисел M, N называют дружественной, если: $m_1+m_2+\ldots+m_k=N$, $n_1+n_2+\ldots+n_i=M$, где $m_1, m_2,\ldots,m_k$ собственные делители числа M, $n_1, n_2,\ldots,n_i$ собственные делители числа N.

Многие математики занимались поисками дружественных чисел, хотя большого значения для теории чисел эти пары не имеют, но являются любопытным элементом занимательной математики. Формулу для нахождения некоторых пар дружественных чисел предложил примерно в 850 году арабский астроном и математик Абу-л-Хасан Сабит ибн Курра. Его формула позволила найти две новые пары дружественных чисел: 17 296 и 18 416; 9 363 584 и 9 437 056. Восток дело тонкое и в Европе об этом узнали гораздо позже того, как сами нашли эти числа. Первым из западных математиков новую пару дружественных чисел нашел француз Пьер Ферма (1601-1665), потом обнаружили, что их упоминал в своем трактате марокканский ученый Ибн аль-Банна аль-Гарани (1256-1321). Через два года после Ферма еще одну пару нашел Рене Декарт. После Декарта великий Леонард Эйлер нашел свой критерий, с помощью которого смог пополнить множество дружественных чисел на несколько десятков. Пишу так расплывчато, потому что в разных источниках упоминается разное количество пар дружественных чисел найденных Эйлером.

Указанные выше две пары дружественных чисел фактически не являются второй и третьей, по величине входящих в них чисел, так как многие гораздо меньшие пары дружественных чисел были пропущены и вторая пара по величине: 1184 и 1210, а пара 17 296 и 18 416 стоит в последовательности на восьмом месте. Пару дружественных чисел 1184 и 1210 пропустили Ферма, Декарт и Эйлер, а обнаружил ее в 1866 году 16-летний итальянский школьник – Никколо Паганини – полный тёзка великого скрипача. Школьник потряс математический мир сообщением о том, что числа 1184 и 1210 дружественные! Эту пару, ближайшую к 220 и 284, проглядели все знаменитые математики, изучавшие дружественные числа. Вот так делаются открытия во множестве натуральных чисел!

Дружественные числа продолжают скрывать множество тайн. Неизвестно, конечно или бесконечно количество пар дружественных чисел. В различных источниках называется разное количество найденных пар дружественных чисел, где-то называют 400, где-то 1100 пар, а в Википедии сказано, что на апрель 2016 года известно более миллиарда пар дружественных чисел. Среди них преобладают пары четных чисел, но встречаются и нечетные пары, например седьмая пара: 12 285 и 14 595. Пока не найдена четно-нечетная пара, и поэтому неизвестно, существует ли такая смешанная пара дружественных чисел. Неизвестно существует ли общая формула, позволяющая описать все пары дружественных чисел.

Критерий – разложение на множители

На стыке теории чисел и геометрии рассмотрим так называемые *фигурные* числа. Это понятие было введено последователями Пифагора. Они представляли собой некое философско-религиозное сообщество, занимавшееся многими науками, в частности они изучали свойства чисел. Со времён пифагорейцев традиционно различают следующие виды фигурных чисел.

Линейные числа – числа, не разлагающиеся на сомножители большие единицы, то есть их ряд совпадает с рядом простых чисел, дополненным единицей: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, … .

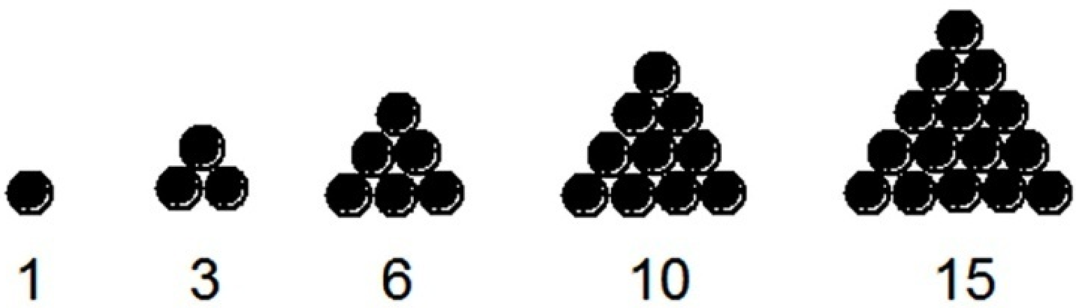
Плоские числа – числа, составные, представимые в виде произведения двух сомножителей больших единицы: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, … .

Телесные числа – числа, представимые произведением трёх сомножителей больших единицы: 8, 12, 16, 18, 20, 24, 27, 28, 30, 32, 36, 40, 42, … .

Эти определения приводятся в «Началах» Евклида. Мне не очень нравится, что при подобном подходе многие числа попадают одновременно в два различных вида. Например, 8=2·4=2·2·2, 12=2·6=3·4=2·2·3, 18=2·9=3·6=2·3·3 и так далее.

Критерии – геометрическая интерпретация

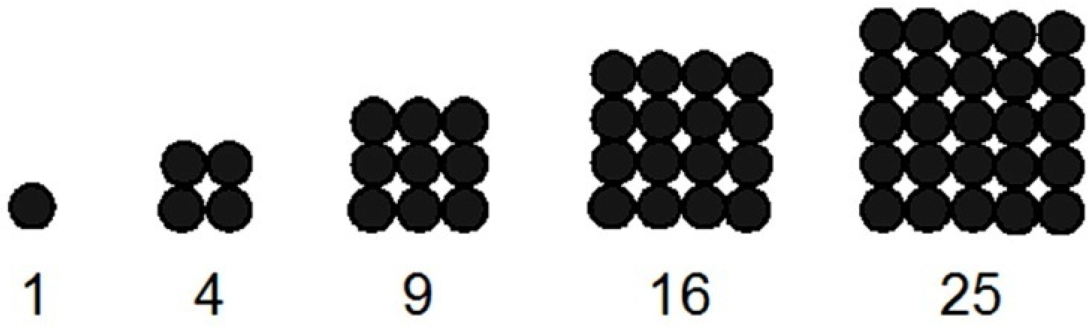
Многоугольные числа – числа, ассоциированные с определённым многоугольником, которые соответствовали количеству точек, расположенных в виде некоторой геометрической фигуры – треугольника, квадрата и так далее. Про точки может быть не совсем корректно говорить, так как в математике точка – это абстрактное понятие, не имеющее линейных размеров, поэтому будем подразумевать некие круглые фишки одинаковых размеров, из которых и выкладываются геометрические фигуры. Ряд фигур будем начинать с одной фишки, а затем достраиваем до равностороннего треугольника со стороной в две фишки, в три фишки и так далее.



Получаем *треугольные* числа: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, … . Треугольные числа можно получить и без геометрической интерпретации посредством последовательного суммирования чисел натурального ряда: 1, 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=10, 1+2+3+4+5=15, … . Формула для получения n-го треугольного числа: $P_n^{(3)}=(n(n+1))/2$. Сумма двух последовательных треугольных чисел дает полный квадрат: $P_n^{(3)}+P_{n+1}^{(3)}=(n+1)^2$. Четность элементов последовательности меняется с периодом 4: нечетное, нечетное, четное, четное.

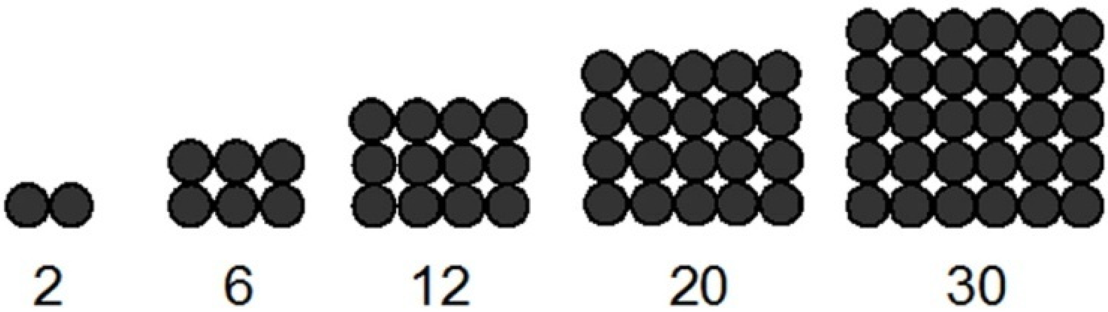
Извините, формулы получаются написанными коряво, так как конвертер издательства не принимает и не распознает формулы, красиво сделанные во встроенном редакторе формул, и приходится изощряться, чтобы написать их в Worde просто с клавиатуры. В результате остается только изображение в строчку, красота формулы теряется.

Получение *квадратных* чисел можно иллюстрировать построением квадратов с последовательным увеличением длины стороны квадрата: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, … .



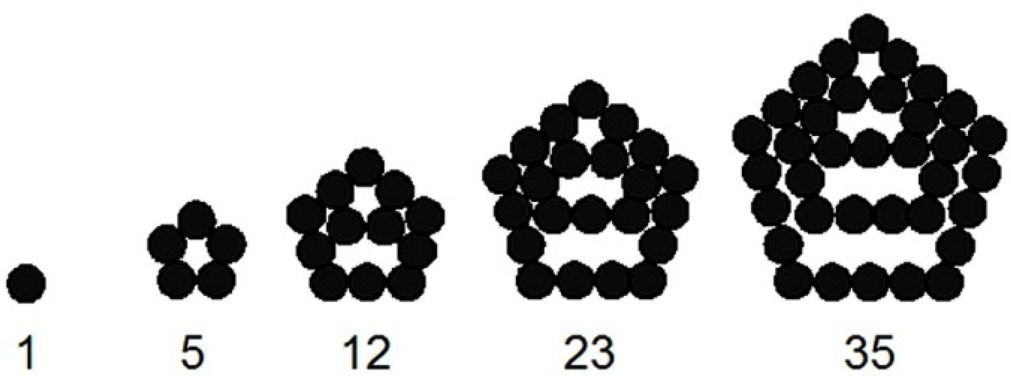
С алгебраической точки зрения они представляют собой квадраты чисел натурального ряда, но могут быть интерпретированы и как результат последовательного суммирования нечетных чисел натурального ряда: 1+3=4, 1+3+5=9, 1+3+5+7=16, 1+3+5+7+9=25. Формула для получения n-го квадратного числа $P_n^{(4)}=n^2$. Каждое квадратное число, кроме единицы, есть сумма двух последовательных треугольных чисел: 4=1+3, 9=3+6, 16=6+10, $P_n^{(4)}=P_{n-1}^{(3)}+P_n^{(3)}$. До сих пор не доказана гипотеза Лежандра (1808 год): между последовательными квадратными числами всегда найдётся простое число. Не доказана, но и не опровергнута.

Частным случаем *плоских* чисел являются *прямоугольные* числа, являющиеся произведением двух последовательных натуральных чисел: 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, … .



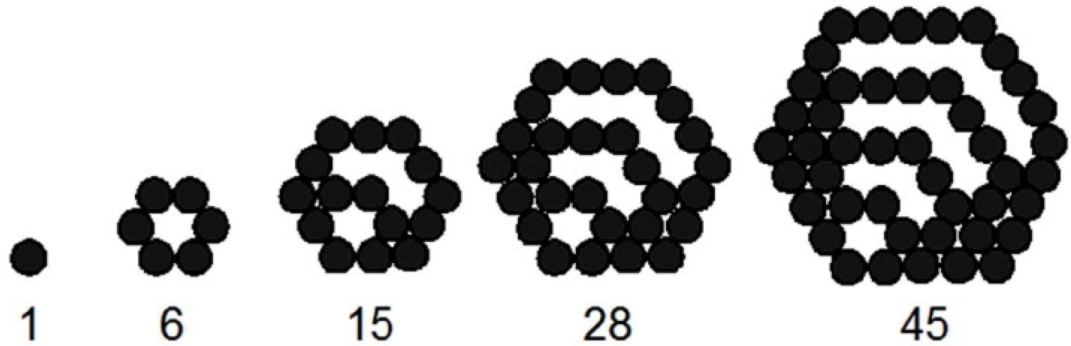
Прямоугольные числа представляют собой удвоенные треугольные числа: $P_n^{(np)}=n(n-1)$.

Вернемся к правильным многоугольникам. На очереди *пятиугольные* числа: 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, 176, 210, … .



Формула для получения n-го пятиугольного числа: $P_n^{(5)}=(n(3n-1))/2$.

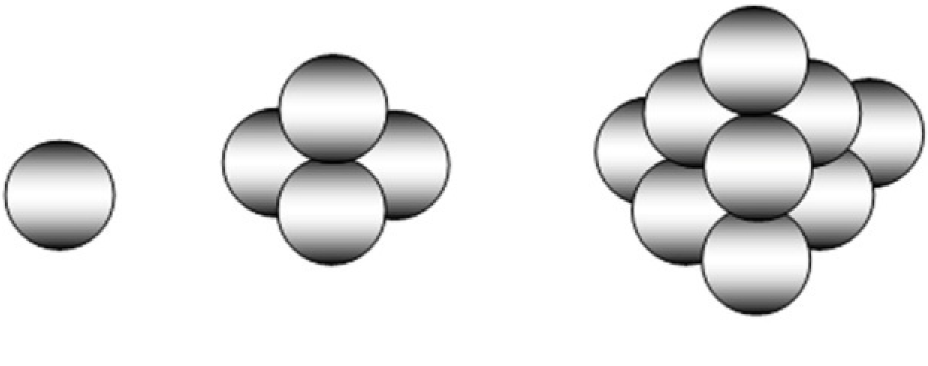
Далее идут *шестиугольные* числа: 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, 231, ….



Формула для получения n-го шестиугольного числа: $P_n^{(6)}=2n^2-n$. Последовательность шестиугольных чисел получается из последовательности треугольных чисел вычёркиванием элементов с чётными номерами: $P_n^{(6)}=P_{2n-1}^{(3)}$.

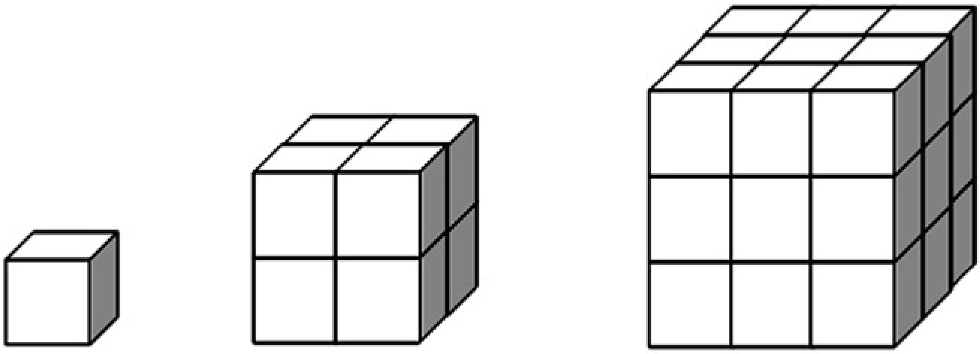
Можно было бы продолжать бесконечно, рассматривая прочие *многоугольные плоские фигурные* числа, но нужно где-то остановиться. Пусть это будут шестиугольные числа.

Выйдя из плоскости можно рассмотреть *трехмерные правильные фигурные* числа. *Пирамидальные числа* возникают при складывании маленьких шаров одинакового диаметра горкой так, чтобы они не раскатывались. Получается пирамида. Первые из них *тетраэдрические* числа – это фигурные числа, которые представляют собой пирамиду, сложенную из сфер одного диаметра. Каждый слой в такой пирамиде – треугольное число. Наверху один шар, под ним – 3, под теми – 6 и т. д.: 1, 1+3=4, 1+3+6=10, 1+3+6+10=20, … . Пример нескольких первых тетраэдрических чисел: 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, … . Формула для тетраэдрического числа: $T_n^{(4)}=(n(n+1)(n+2))/6$.



Затем к пирамидальным числам отнесем *квадратные пирамидальные* числа, представляющие собой количество сложенных сфер в пирамиде с квадратным основанием. И далее, далее … .

Кубические числа возникают при складывании кубиков: 1, 2·2·2=8, 3·3·3=27, 4·4·4=64, 5·5·5=125… , то есть это просто кубы натуральных чисел.



В любом рассмотренном варианте фигурных чисел возможны продолжения. Некоторые из них мы отнесли во второй уровень классификации и все равно перебрать это многообразие невозможно. Причем, у каждого из этих видов чисел открыты свои свойства, о которых здесь не рассказано. Целью этой книги не является подробное описание свойств всех существующих групп натуральных чисел. Задача ставится иная: легкими штрихами наметить общую картину, заинтересовать читателя, который возможно сам продолжит рассмотрение понравившегося ему класса чисел, и тогда уж изучит все их свойства по другим источникам, а возможно сделает свои открытия. Вот где простор для тематики ученической проектной деятельности. Каждому ученику поручить исследование отдельного вида чисел, их хватит на целый класс.

Столкнувшись с тем многообразием, которое скрыто в одних только натуральных числах, понимаешь, для чего могла бы пригодиться бесконечная жизнь – изучать эти числа.

С другой стороны, поставьте себя на место древних пифагорейцев. Телевизоров нет, смартфонов нет, развлечений кот наплакал. Поэтому они и развлекались с натуральными числами и достигли в этом таких высот, которые современный человек вряд ли охватит своим умом. Причем учтите, во времена пифагорейцев занимались математикой и философией люди свободные от других забот, не ведающие иного труда, кроме умственного. Даже в умственной деятельности теоретические исследования считались достойными привилегированного класса, а чисто вычислительная, практическая деятельность поручалась низшим сословиям. В наше время нет привилегированных классов и большинству людей не до чисел, ведь жизнь с развитием цивилизации легче не становится. Но как в любой другой области, среди множества людей разумных есть и любители исследовать числа.

Фигурные числа, по мнению пифагорейцев, играют важную роль в структуре мироздания. Поэтому их изучением занимались многие математики античности (Эратосфен, Диофант), большой интерес к фигурным числам проявили индийские математики и первые математики средневековой Европы (Фибоначчи, Кардано), выдающиеся умы более позднего времени (Ферма, Эйлер, Гаусс). Все результаты, которых они достигли не описать и в нескольких книгах. В частности Диофант знал формулу, связывающую треугольные и квадратные числа: $8P_n^{(3)}=P_n^{(4)}$. Были выведены общие формулы представления n-го по порядку k-угольного числа. Ферма сформулировал в 1637 году так называемую «золотую теорему»: Всякое натуральное число – либо треугольное, либо сумма двух или трёх треугольных чисел.

Всякое натуральное число – либо квадратное, либо сумма двух, трёх или четырёх квадратных чисел.

Всякое натуральное число – либо пятиугольное, либо сумма от двух до пяти пятиугольных чисел; и т.д.

Полное доказательство этой теоремы сумел дать Коши в 1813 году. Оцените промежуток времени, потребовавшийся для доказательства одной теоремы: с 1637 до 1813 года.

Критерий – цифровое выражение числа

Последние годы в занимательной математике много пишется о числах, имеющих специфическое представление в виде цифр. В первую очередь речь идет о числах – *палиндромах*. Это понятие пришло в математику из языка, где палиндром (от греч. *palindromos* – бегущий обратно), слово, фраза или стих, которые могут читаться (по буквам или по словам) спереди назад и с конца вперед, давая одинаковый смысл. В русском языке палиндромами являются, например, такие слова: довод, доход, заказ, радар и другие. Некоторые палиндромы, если их написать печатными буквами, не только читаются одинаково слева направо и наоборот, но обладают осью симметрии, например, поп, потоп, топот. Палиндромы известны во многих языках (например, gig (кабриолет), eve (канун), level (уровень) – в английском), а их история восходит к временам незапамятным. Чтобы не нарушать принятый в книге принцип давать классам чисел название в виде прилагательного, назовем такие числа *палинромическими* числами.

В математике к понятию палиндрома нужен иной подход, нежели в языкознании, потому что, в отличие от слова, любое число, написанное произвольным набором цифр, имеет право на существование, например, 1234567890987654321 – вполне реальное число. А что в нем еще интересного, в чем его исключительность? Содержательная сторона, изюминка идеи отражения здесь отсутствует, посмотришь на это число, и скажешь: «Ну, и что?». Можно поставить вопрос так: найти квадраты целых чисел, которые неизменно читаются как слева направо, так и наоборот. Некоторые из них найти легко: 11^2=121, 111^2=12321, 1111^2=1234321. Все получившиеся числа палиндромы, и данное правило применимо к любому числу единиц, не превосходящему девяти. Есть и другие случаи, но их найти труднее, например, 264^2=69696, 836^2=698896, 2285^2=5221225. Одним вопросом намечено целое направление для поиска числовых палиндромов с определенным смыслом. Есть палиндромы и среди кубов, например 11^3=1331, причем в большинстве случаев, если куб – палиндром, то и кубический корень из него – тоже палиндром. Поиск палиндромов среди пятых степеней, пока не дал результатов. Высказана гипотеза, согласно которой не существует чисел палиндромов вида x^k при k>4 . Ее тоже кому-то нужно доказать или опровергнуть. Другой вопрос – сколько существует простых чисел палиндромов. Среди первых пятидесяти простых чисел я нашел шесть палиндромов: 11, 101, 131, 151, 181, 191. Сколько их всего – неизвестно! Высказывалось предположение о том, что простых чисел палиндромов бесконечно много, но эта гипотеза пока не доказана. Таким образом, в математике числовые палиндромы кроме своей специфической записи должны обладать каким-то еще интересным свойством, чтобы заслуживать внимание.

В свою очередь среди чисел палиндромов выделяются так называемые *моноцифровые* числа. Это если определять их более-менее по-русски (хотя какое *моно* русское слово?). По-английски они называются *репдигит* или *репдиджит* в зависимости от того, как мы прочитаем английскую запись (от англ. *repdigit – repeated digit* – повторение цифры). Вы уже поняли, что это числа, в записи которых повторяется одна цифра: 11111, 222222, 33333. Среди них в свою очередь выделяются числа *репьюниты* – натуральные числа, запись которых состоит из единиц (от *repeated unit* - повторённая единица). Термин *репьюнит* был придуман в 1966 году Альбертом Х. Бейлером в его книге «Recreations in the theory of numbers: the queen of mathematics entertains». Для них принято сокращенное обозначение в виде R_n: R_1=1, R_2=11, R_3=111 и т. д. Получаем последовательность: 1, 11; 111; 1111; 11111; 1111111 … . Обидно, но приходится употреблять эти неудобоваримые названия, которые неблагозвучны на русском языке и мне не очень нравятся, в отличие от самих чисел, вынужденных носить эти «*репы*». Для палиндромов придумали русское название – перевертень. Звучит хорошо, но почему-то не прижилось, а везде употребляется слово палиндром. Ничего не имею против взаимопроникновения языков.

Мне только не нравится, что в основном это они в нас проникают. В моноцифровых числах много интересного, занимательного, поэтому о них еще поговорим в других разделах книги.

Еще один вид чисел, зависящих от входящих в них цифр – это *стробограммные числа*. *Стробограммное число* – это число, которое будучи записано на листе бумаги выглядит одинаково при повороте листа на 180 градусов. Например, 69, 96, 1001. Следует сделать небольшое замечание относительно записи единицы. Ее хвостик слева вверху немного портит картину, но принято на него не обращать внимание. При записи с использованием стандартных символов числа 0, 1, 8 симметричны вокруг горизонтальной оси, а 6 и 9 одинаковы друг с другом при повороте на 180 градусов. В такой системе записи первыми стробограммными числами являются: 1, 8, 11, 69, 88, 96, 101, 111, 181, 609, 619, 689, 808, 818, 888, 906, 916, 986, 1001, 1111, 1691, 1881, … .

Подобные числа входят в круг интересов любителей занимательной математики, а профессиональные математики, как правило, не занимаются ими. Стробограммные свойства данного числа зависят от шрифта. Например, в семисегментном изображении на электронных часах цифры 2 и 5 имеют центральную симметрию. Самый последний перевернутый год был 1961, А до этого последовательно 1881 и 1691.

Тетрадные или *четырехполюсные* числа – это числа, которые остается неизменными при отражении относительно горизонтальной или вертикальной оси симметрии, а также при центральной симметрии. Единственными цифрами, которые остаются теми же, если перевернуты вверх-вниз или зеркально отражены, являются 0, 1 и 8, поэтому тетрадное число-это палиндромическое число, содержащее только 0, 1 и 8 в качестве цифр. Первые несколько тетрадных чисел: 1, 8, 11, 88, 101, 111, 181, 808, 818, … . Четырехсторонняя симметрия объясняет название, поскольку *tetra* – это греческое число *четыре*. Тетрадные числа являются одновременно *стробограммными и палинромическими.* Более крупное тетрадное число всегда может быть сгенерировано путем добавления другого тетрадного числа к каждому концу исходного числа, сохраняя симметрию.

Наименования подмножеств натуральных чисел выражаются не только прилагательными, но и именами собственными. В дальнейшем имена собственные будет встречаться чаще.

Числа Цукермана - такие натуральные числа, которые делятся на произведение своих цифр. В честь какого Цукермана названы эти числа мне не удалось выяснить. Фамилия довольно распространенная и в русской интерпретации превращается в фамилию Сахаров. Определение этих чисел приведено в книге *James J. Tattersall «Elementary Number Theory in Nine Chapters»* издательства Кэмбриджского университета, 1999 года. Например, 135 – число Цукермана, так как 1+3+5=9; 135/9=15. Все целые числа от 1 до 9 являются числами Цукермана. Все числа, включающие ноль, не являются числами Цукермана, так как произведение их цифр равно нулю, а деление на ноль невыполнимо. Первые несколько чисел Цукермана, состоящие более чем из одной цифры: 11, 12, 15, 24, 36, 111, 112, 115, 128, 132, 135, 144, 175, 212, 216, 224, 312, 315, 384 … .

Числа Цукермана не могут содержать более чем восемь различных цифр, так как цифра 5 не может совмещаться ни с одной четной цифрой. Произведение четной цифры и 5 даст число, кратное 10, а исходное число не содержит цифры 0, следовательно, не может делиться на 10. Наименьшее число Цукермана, содержащие восемь различных цифр – это 1196342784. В свою очередь числа Цукермана это подмножество *обнаженных* чисел (извините, но есть и такие).

Натуральное число называют *обнаженным*, если оно делится на каждую из своих цифр в отдельности (которые должны быть ненулевыми). Например, 48=4·12=8·6, 672=6·112=7·96=2·336. Введение этого термина объясняют тем, что такие числа раскрывают (обнажают) свои сокровенные тайны. В первом миллионе натуральных чисел содержится 9039 обнаженных чисел. Всего таких чисел бесконечно много, так как любое моноцифровое число является обнаженным.

Первые обнаженные числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 22, 24, 33, 36, 44, 48, 55, 66, 77, 88, 99, 111, 112, 115, 122, 124, 126, 128, … . Насколько мне удалось выяснить, этот странный термин ввел некий У. Катагири. Фамилия, распространенная в Японии настолько, что установить, кто он такой не удалось.

Полет фантазии

Процесс отыскания и наименования новых классов чисел среди чисел натуральных, кроме уже рассмотренных, шел сотни лет. Придумано так много разного, что издание с кратким описанием всего открытого и названного должно быть многотомным. Можно только на свой вкус отобрать конечное множество разнообразных определений чисел, и в какой-то момент сказать себе стоп! Попробуем так и сделать.

***

Бесквадратным, или *свободным от квадратов*, называется число, которое не делится ни на один квадрат, кроме 1. К примеру, 10 – *свободное от квадратов*, а 18 – нет, так как 18 делится на $9=3^2$. Начало последовательности свободных от квадратов чисел таково: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39, … .

Натуральное число n свободно от квадратов тогда и только тогда, когда в разложении этого числа на простые множители ни одно простое число не встречается больше одного раза, то есть все простые множители входят в разложение числа только в первой степени.

***

Гладким числом называется натуральное число, все простые делители которого малы. Поскольку понятие «делители малы» может быть истолковано произвольно, чаще всего гладким числом называют такое, чьи простые делители не превосходят 10 (то есть, фактически равны 2, 3, 5 или 7).

Натуральное число называется *M-гладким*, если все его простые делители не превосходят *M*. Исходя из этого определения, можно говорить о 3-гладких, 5-гладких, 7-гладких и т. д. числах. Например, к 3-гладким числам относятся: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, ….Все они в разложении на простые множители имеют только два простых числа 2 и 3 в различных степенях. Число 5000 имеет следующее разложение на множители: $2^3 \cdot 5^4$. Поэтому 5000 – это 5-гладкое число, а также 6-гладкое число и так далее, но не 4-гладкое. В основном определении *гладкого* натурального числа, останавливаются на множителях 2, 3, 5 или 7, следовательно, это определение соответствует 7-гладкому числу. Последовательность таких чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, … . То есть, из натурального ряда чисел выбрасываются числа, кратные простым числам начиная от 11 и выше.

***

Полнократное число – натуральное число, которое делится нацело квадратом каждого своего простого делителя. Эквивалентное определение: число, представимое в виде $a^2 \cdot b^3$, где a и b натуральные числа. Наименование придумано математиком Соломоном Голомбом. Когда мы подходим ближе к нашему времени уже можно четко понять, кто ввел в оборот те или иные числовые определения, история сохраняет имена первооткрывателей. Последовательность полнократных чисел: 1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 72, 81, 100, 108, 121, 125, 128, 144, 169, 196, 200, … .

Из определения следует, что квадраты чисел и кубы чисел являются полнократными числами, так как вторым числом в определении может быть единица. Два наименьших последовательных полнократных числа – это 8 и 9. Согласно *гипотезе Эрдёша*, не существует трёх последовательных полнократных чисел. В связи с понятием полнократных чисел стали рассматривать разложение чисел не только в сумму и произведение других чисел, но ввели в рассмотрение разложение чисел в виде разности двух полнократных чисел. Именно введение разности в рассмотрение – главное значение этого класса чисел. Ведь до сих пор упоминалось сложение, умножение, деление, а о разности даже не заикались. Любое нечетное число представимо в виде разности двух последовательных квадратов: $(k+1)^2-k^2=k^2+2k+1-k^2=2k+1$ – нечетное число. Аналогично в виде разности квадратов представимо любое число кратное четырем: $(k+2)^2-k^2=k^2+4k+4-k^2=4k+4$. Встал вопрос о представлении в виде разности двух полнократных чисел любого числа, кратного двум, но не кратного четырем. Например, $2=3^3-5^2$. Долго стоял вопрос с разложением числа 6, пока не доказали, что любое число допускает бесконечно много таких представлений. В частности, $6=25^2\cdot 7^3-463^2=214\ 375-214\ 369$. На русском языке литературы о полнократных числах нет, но спасает то, что в Википедии дается перевод статей на русский и можно почерпнуть информацию.

***

Натуральное число называется *необычным*, если в его разложении на простые множители самый большой простой множитель строго больше квадратного корня из числа n. Как тяжело писать, когда нельзя употреблять ни редактор формул, ни встроенные символы и приходится использовать только то, что есть на клавиатуре. Вместо одного значка пишешь четыре слова. В определении приходится выходить из множества натуральных чисел и опираться на числа иррациональные, но для полноты охвата прилагательных, применимых к натуральным числам, не хотелось выбрасывать это определение. Все простые числа необычны. Для любого простого p все его кратные меньше p^2 необычны. Первые несколько необычных чисел: 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 28, 29, 31, 33, 34, 35, … .

***

Сфеническое натуральное число (от др.-греч. *сфена* – клин) – число, равное произведению трёх различных простых чисел (так, например, $30=2\cdot 3\cdot 5$; соответственно, число 30 является первым сфеническим). Количество делителей произвольного сфенического числа всегда равно 8. Например, если $n=pqr$, где p, q и r – разные простые числа, то делителями n будут: 1, p, q, r, pr, qr, pq, pqr Так первое сфеническое число 30 имеет делители: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 и 30. Сфенические числа образуют последовательность: 30, 42, 66, 70, 78, 102, 105, 110, 114, 130, 138, 154, 165, 170, 174, 182, 186, 190, 195, … . Примером двух последовательных сфенических чисел являются 230 ($230=2\cdot 5\cdot 23$) и 231 ($231=3\cdot 7\cdot 11$). Примером трёх последовательных сфенических чисел являются 1309 ($1309=7\cdot 11\cdot 17$), 1310 ($1310=2\cdot 5\cdot 131$) и 1311 ($1311=3\cdot 19\cdot 23$). Более чем трёх последовательных сфенических чисел быть не может, поскольку каждое четвёртое натуральное число будет делиться на 4.

***

Радостное число определяется следующим процессом: взяв некоторое натуральное число, замените число суммой квадратов его цифр и повторите процесс до тех пор, пока число либо не будет равно 1 (на чем процесс закончится), либо оно бесконечно крутится в цикле, который не включает 1. Те числа, для которых этот процесс заканчивается в 1, являются радостными числами, а те числа, которые не заканчиваются в 1, будут *печальными* числами. Происхождение радостных чисел не ясно. Если число радостно, то все члены его последовательности суммирования квадратов цифр радостны; если число печально, все члены последовательности печальны. Например, 19 является радостным, так получается последовательность $_{(+)}{}^{2}19$: $1^2+9^2=82$, $8^2+2^2=68$, $6^2+8^2=100$, $1^2+0^2+0^2=1$. В первой тысяче натуральных чисел есть 143 радостных числа: 1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94, 97, 100 … . Радость числа не зависит от перестановки цифр и вставки или удаления любого количества нулей в любом месте числа. Например, радостное число 19 порождает радостные числа: 91, 109, 190, 910 и так далее. Из этого утверждения следует радостный вывод о том, что радостных чисел бесконечно много.

Вариация *радостных* чисел состоит в том, чтобы, взяв некоторое натуральное число, заменить число суммой кубов его цифр и повторять процесс до тех пор, пока число либо не будет равно 1 (на чем процесс закончится), либо оно бесконечно крутится в цикле, который не включает 1. Например, берем число 1579 и проводим процесс кубирования: 1^3

Конец ознакомительного фрагмента.