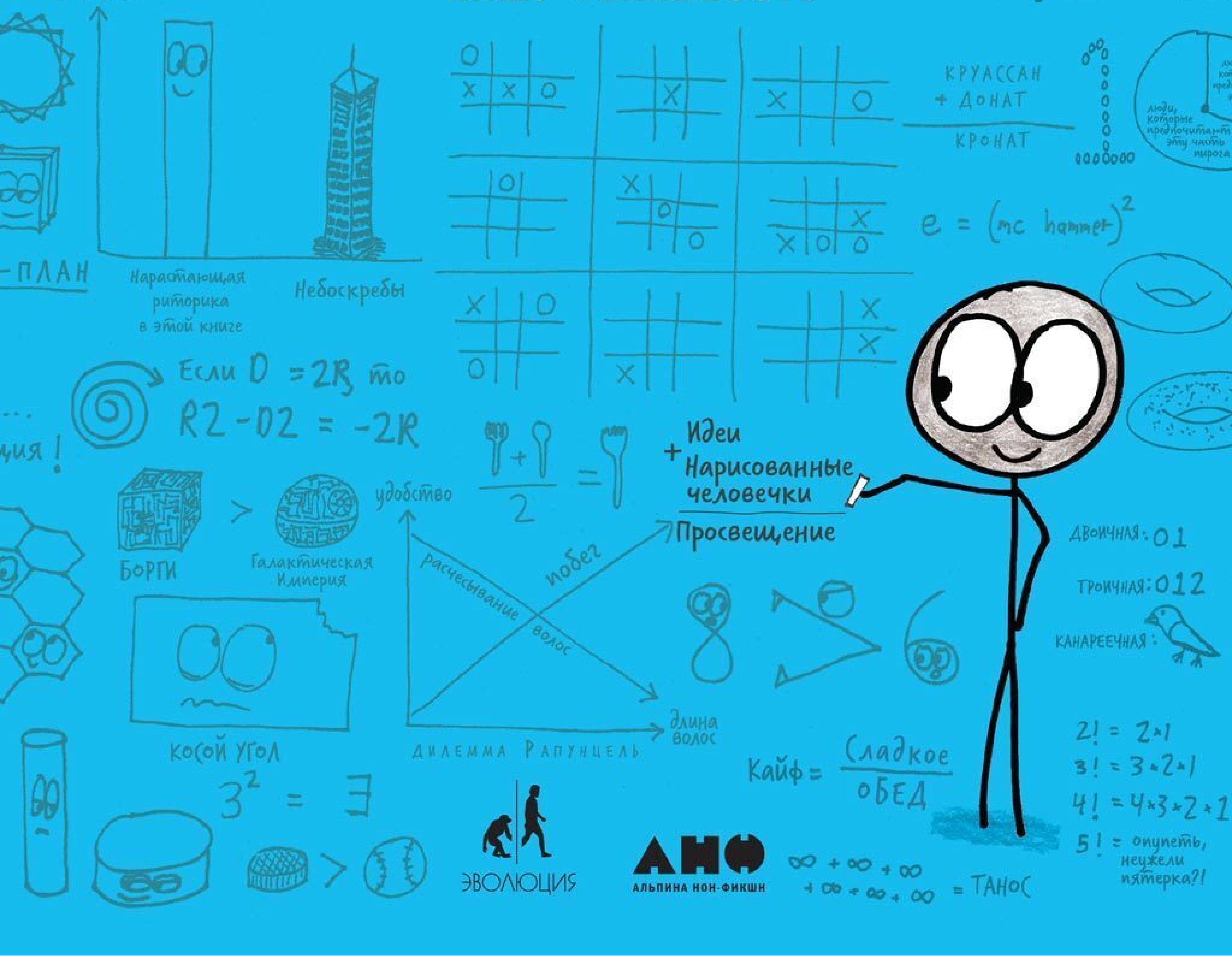
БЕН ОРЛИН

МАТЕМАТИКА с дурацкими рисунками

ИДЕИ, КОТОРЫЕ ФОРМИРУЮТ НАШУ РЕАЛЬНОСТЬ



ЭВОЛЮЦИЯ

АНФ
АЛЬПИНА НОН-ФИКШН

Бен Орлин

Математика с дурацкими рисунками. Идеи, которые формируют нашу реальность

«Альпина Диджитал»

2018

Орлин Б.

Математика с дурацкими рисунками. Идеи, которые формируют нашу реальность / Б. Орлин — «Альпина Диджитал», 2018

ISBN 978-5-0013-9357-3

Вы с содроганием вспоминаете школьные уроки математики? Это нормально, ведь у вас не преподавал Бен Орлин, автор этой книги. Впрочем, и он не сразу додумался объяснять ученикам, что вообще-то математика лежит в основе всего на свете: от лотереи до «Звездных войн», от рецептуры шоколадных пирогов до выборов. И что тот, кто овладел основами точной науки, получает возможность разобраться в природе и устройстве окружающих нас вещей и явлений. Орлин выступает не только как педагог, но и как художник-иллюстратор: его смешные человечки и закорючки покорили тысячи школьников, покорят и вас. Изящные каламбуры и забавные ассоциации, игры разума и цифровые загадки (к каждой из которых вы получите элегантную и ироничную разгадку) и, конечно, знаменитые фирменные рисунки (которые, вопреки заглавию, не такие уж дурацкие) позволяют Орлину легко и остроумно доносить самые сложные и глубокие математические идеи и убеждают в том, что даже математика может быть страшно интересной.

ISBN 978-5-0013-9357-3

Содержание

Бен Орлин
Математика с дурацкими рисунками. Идеи, которые формируют нашу реальность

Переводчик *Алексей Огнёв*
Научный редактор *Михаил Гельфанд, канд. физ. – мат. наук*
Редактор *Вера Копылова*
Издатель *П. Подкосов*
Руководитель проекта *А. Шувалова*
Корректоры *О. Петрова, Е. Сметанникова*
Компьютерная верстка *А. Фоминов*
Арт-директор *Ю. Буга*

⁂

ЭВОЛЮЦИЯ

Просветительский фонд «Эволюция»

основан в 2015 году сообществом российских просветителей.

Цель фонда – популяризация научного мировоззрения, продвижение здравомыслия и гуманистических ценностей, развитие науки и образования.

Одно из направлений работы фонда – поддержка издания научно-популярных книг.

Каждая книга, выпущенная при содействии фонда «Эволюция», тщательно отбирается серьезными учеными. Критерии отбора – научность содержания, увлекательность формы и значимость для общества.

Фонд сопровождает весь процесс создания книги – от выбора до выхода из печати. Поэтому каждое издание библиотеки фонда – праздник для любителей научно-популярной литературы.

Больше о работе просветительского фонда «Эволюция» можно узнать по адресу **www.evolutionfund.ru**

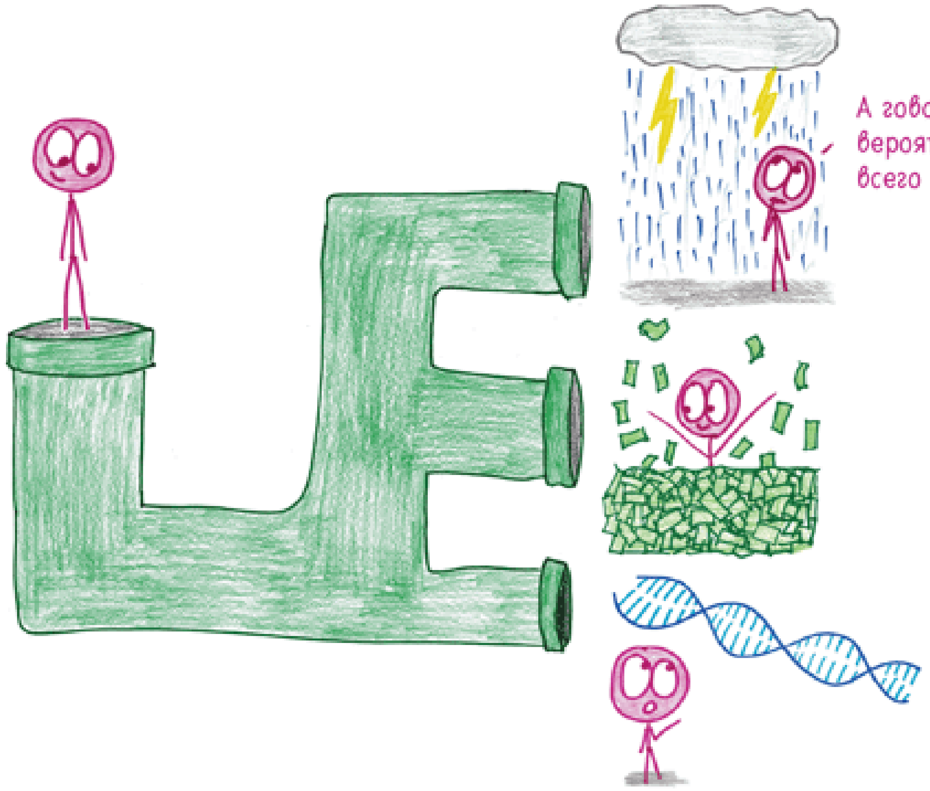
Посвящается Тэрин

Введение

Эта книга посвящена математике. Во всяком случае, таков был изначальный план.

Но сюжет неожиданно вильнул влево. Вскоре я оказался в лабиринте подземных туннелей. Мобильная связь не работала. Когда я вышел на свет, моя книга все еще была о математике, но также и о множестве других вещей. Почему люди покупают лотерейные билеты? Каким образом детская писательница повлияла на исход выборов в Швеции? Каковы отличительные свойства готического романа? Была ли постройка гигантской шарообразной космической станции мудрым шагом со стороны Дарта Вейдера и Галактической Империи?

Это математика для вас. Она соединяет отдаленные уголки жизни, как секретная система труб водопроводчика Марио.



Если вы видите математику иначе, возможно, дело в том, что вы посещали заведение под названием «школа». В таком случае примите мои соболезнования.

Когда я окончил колледж в 2009 году, мне казалось, что я знаю, почему математика не пользуется популярностью: в общем и целом ее дурно преподают. На уроках математики красивое, образное, логическое искусство измельчили в конфетти и велели школьникам собрать оригинал обратно. Невозможная, парализующая задача. Неудивительно, что школьники стонали. Неудивительно, что они терпели поражения. Неудивительно, что взрослые вспоминают о школьных уроках математики с содроганием и чувствуют позывы к рвоте. Решение проблемы казалось мне очевидным: математику необходимо лучше объяснять, да и сами преподаватели должны быть лучше.

Потом я стал учителем. Я был заносчив и неопытен, во мне клокотала гордыня, но первый учебный год преподал мне жестокий урок: пускай я знаю математику, но все еще не знаю, как ее преподавать и что она значит для моих учеников.

Однажды в сентябре у меня спонтанно завязалась неловкая дискуссия с девятиклассниками о том, зачем мы изучаем геометрию. Неужели взрослые пишут двухэтажные доказательства? Неужели инженеры работают без калькуляторов? Неужели при подсчете личных финансов постоянно нужны ромбы? Все традиционные оправдания звучали неубедительно. В конце концов мои девятиклассники пришли к единому мнению: «Мы изучаем математику, чтобы доказать наш ум и трудолюбие вузам и работодателям». Если исходить из этой формулировки, математика сама по себе не имела значения. Решение математических задач превращалось в тяжелую атлетику, накачивание мускулов, бессмысленную демонстрацию интеллектуальной мощи, нудное упражнение ради строчки в резюме. Я был подавлен этим ответом, но школьников он обрадовал, отчего я был подавлен еще больше.

Школьники были правы. Учеба напоминает состязание, игру с нулевой суммой[1], и математика выполняет функцию механизма сортировки. Но школьники не осознавали высший смысл математики, а я не умел им его показать.

Почему математика лежит в основе всего в жизни? Как ей удается выстраивать связи между разрозненными областями: монеты и гены, игральные кости и акции, книги и бейсбол? Причина в том, что математика – это система мышления, а любая проблема в мире решается мышлением.

Я пишу о математике и образовании с 2013 года – иногда для *Slate, The Atlantic* и *Los Angeles Times*, но в основном для моего блога «Математика с дурацкими рисунками». Читатели постоянно спрашивают: почему я плохо рисую? Странный вопрос! Если я угощаю гостей сэндвичами, никто не интересуется, почему я не приготовил сногсшибательную курицу под апельсиновым соусом. То же самое с моим «изобразительным искусством». Я мог бы назвать этот блог «Математика с лучшими рисунками, на которые я способен; честное слово, ребята, я стараюсь», смысл остался бы тем же, но это прозвучало бы слишком патетично.

Мой путь художника начался в тот день, когда я нарисовал на доске собачку, чтобы проиллюстрировать решение задачи, и надо мной расхохотались так, как никогда за всю мою карьеру. Моя бездарность насмешила и шокировала школьников, но в конечном итоге они сочли ее по-своему милой. Часто математика похожа на соревнование с высокими ставками; когда безусловный эксперт в этой науке оказывается совершенно бездарен в чем-то другом, это очеловечивает его, а в дальнейшем, возможно, очеловечит и сам предмет, который он ведет. С тех пор самоуничижение стало ключевым элементом моей педагогики; вы не найдете такого совета ни в одной методичке для учителей, но, вы знаете, это работает.

Чаще всего на своих уроках я терплю поражение. Моим ученикам кажется, что математика – затхлый подвал, где туда-сюда шныряют бессмысленные символы. Дети пожимают плечами, изучают хореографию и вальсируют не в такт.

Но в удачные дни они видят далекий проблеск света и осознают, что математика – это не подвал, а потайной подземный лабиринт, соединяющий все, что они знают, и все остальное, что только есть на свете. Школьники бьются над задачами, фантазируют, проводят параллели, рвутся вперед, и постепенно их настигает неуловимое счастье – понимание истины.

---

[1] Термин теории игр. Выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. Простейший пример – игра в орлянку. Строго говоря, уроки математики не являются такой игрой: все ученики могут одновременно получить высший балл и «выиграть» (или наоборот), хотя, конечно, это крайне маловероятно. – *Прим. пер.*

Эта книга – не учебник, поэтому я буду пропускать технические детали. (Любители хардкора могут заглянуть в примечания.) На ее страницах вы обнаружите несколько уравнений, но даже самые кошмарные из них – не более чем украшения. Я хочу сосредоточиться на том, что, на мой взгляд, составляет истинное сердце математики, – на концепциях. Каждый раздел этой книги посвящен тому или иному пейзажу, но все они, как сеть подземных туннелей, объединены одной большой идеей. Как законы геометрии ограничивают наши дизайнерские идеи? Как методы вероятности откупоривают нектар вечности? Как крошечные приращения дают квантовые скачки? Как статистика приводит в порядок безумное расползание реальности?

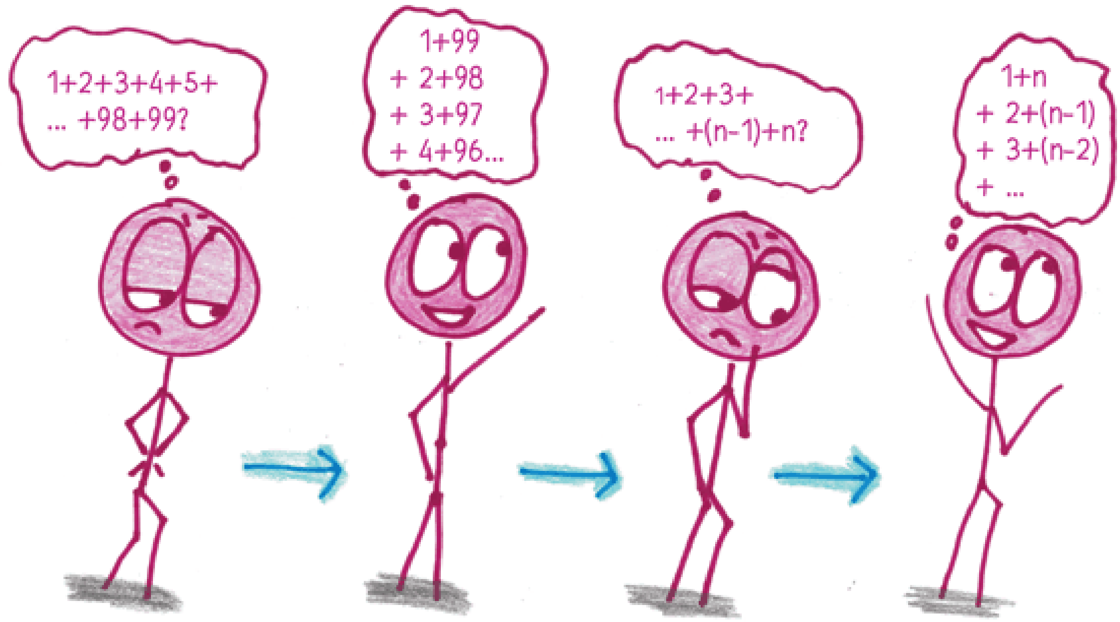
Эта книга вывела меня в диковинные места. Надеюсь, что это произойдет и с вами.

БЕН ОРЛИН, октябрь 2017

I
Думать как математик

По правде говоря, математики не делают ничего особенного. Прихлебывают кофе, хмурясь на грифельную доску. Прихлебывают чай, хмурясь на контрольные учеников. Прихлебывают пиво, хмурясь на доказательство, которое записали год назад и в жизни больше не поймут.

Так протекает их жизнь: разнообразные напитки, нахмуренные брови и размышления, прежде всего размышления.



Видите ли, в математике нет физических объектов: нет необходимости вычислять концентрацию химических веществ, ускорять частицы, сотрясать финансовые рынки. Математики просто думают, вот и все. Когда мы проводим вычисления, мы превращаем одну абстракцию в другую. Когда мы выстраиваем доказательства, мы перекидываем логические мостики между взаимосвязанными идеями. Когда мы пишем алгоритмы или компьютерные программы, мы передоверяем электронному мозгу задачи, с которыми не могут справиться наши собственные водянистые мозги, слишком медленные или слишком перегруженные.

Каждый год, проведенный в компании математики, я изучаю новые стили мышления, новые способы использования первоклассного механизма, спрятанного внутри черепа и годного на все случаи жизни. Как освоить игру, покрутив ее правила? Как сохранить мысли на будущее, записав их крючковатыми греческими буквами? Как учиться на своих ошибках, словно это авторитетные профессора? И как не терять твердость духа, когда дракон хаоса наступает на пятки?

В общем, математика – это работа ума.

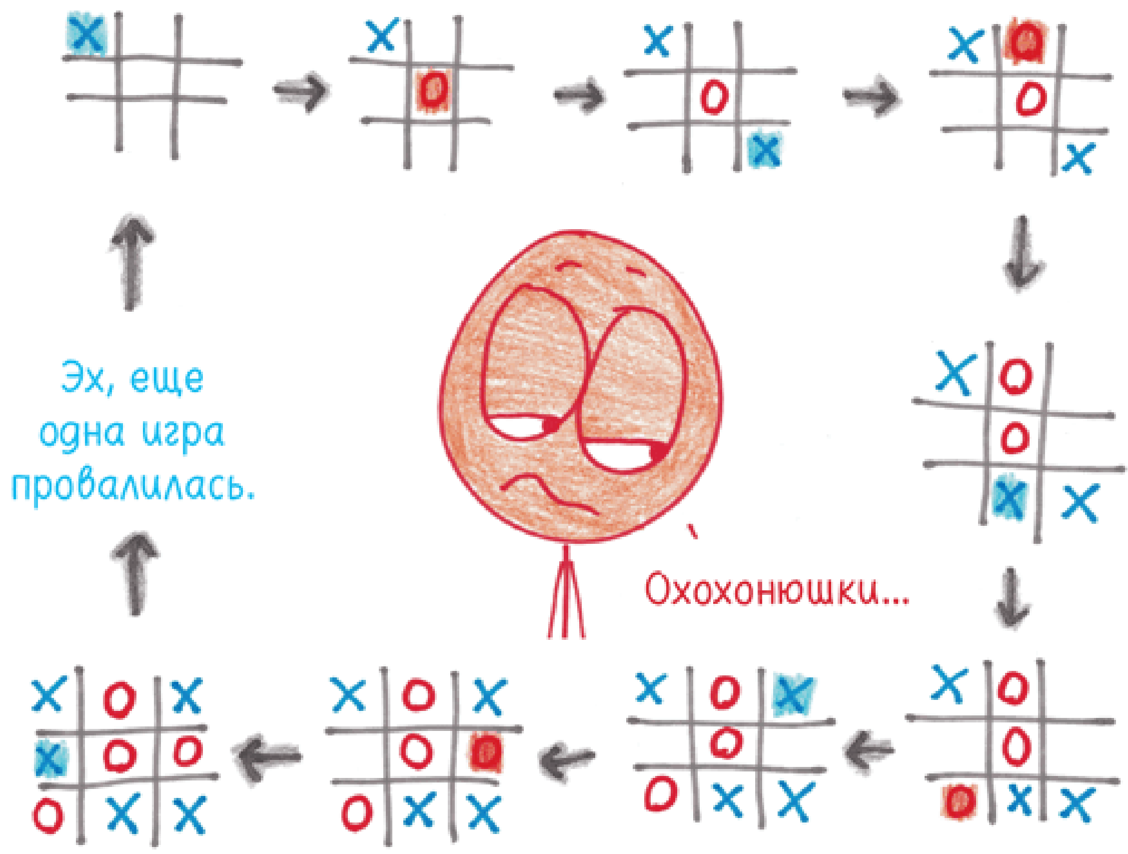
А как насчет хваленой пользы математики в повседневной жизни? Откуда на горизонте чистой мысли появляются смартфоны, космические корабли и, не к ночи будет помянута, таргетированная реклама? О, терпение, дружище. Всему свое время. Мы должны начать с того, с чего начинается вся математика, то есть с игры…

Глава 1
Жесткие крестики-нолики

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА?

Однажды на пикнике в Беркли я увидел группу математиков, которые побросали свои летающие тарелки фрисби и сгрудились, чтобы сыграть – вот уж чего никак не ожидал – в крестики-нолики.

Возможно, вы успели убедиться на собственном опыте, что крестики-нолики смертельно скучны (в медицинском смысле слова). Из-за того, что возможностей для хода ничтожно мало, опытные игроки быстро запоминают оптимальную стратегию. Вот как проходят все мои партии:

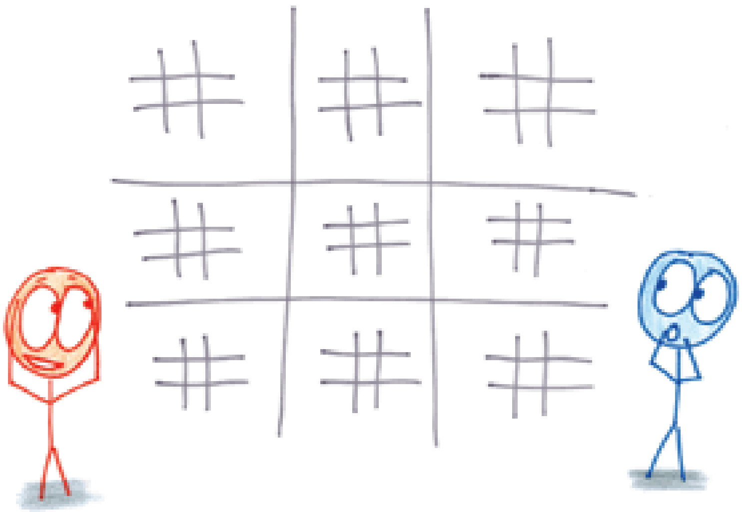


Если оба игрока хорошо понимают правила, все партии раз за разом проходят вничью – механически, без простора для творческой мысли.

Но на том пикнике в Беркли математики играли в необычные крестики-нолики. На их игровом поле каждая из девяти клеток делилась еще на девять клеточек[2]:

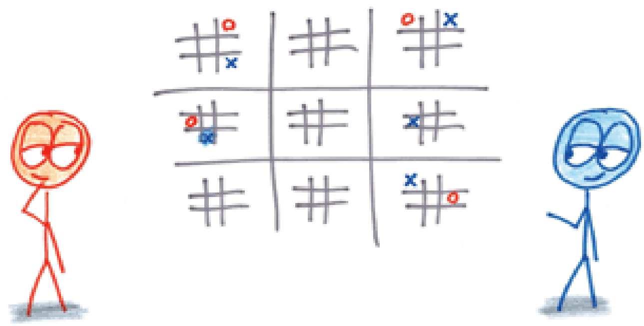
---

[2] Происхождение этой игры теряется в тумане. Возможно, впервые ее правила были изложены в журнале *Games* в конце 1990-х или начале 2000-х (хотя на мой запрос сотрудники редакции ответили, что никогда не слышали об этой игре). В 2009-м версия под названием «Тик-так-ку» (с фишками на деревянной доске) завоевала премию Менсы за лучшую американскую настольную игру. Возможно, эту игру независимо придумывали несколько раз, как некоторые танцы или дифференциальное исчисление.

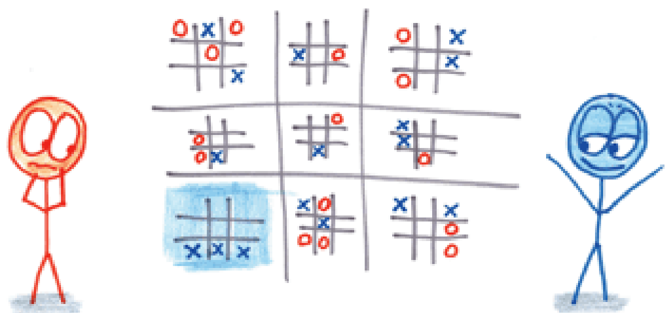


Когда я присмотрелся, основные правила прояснились:

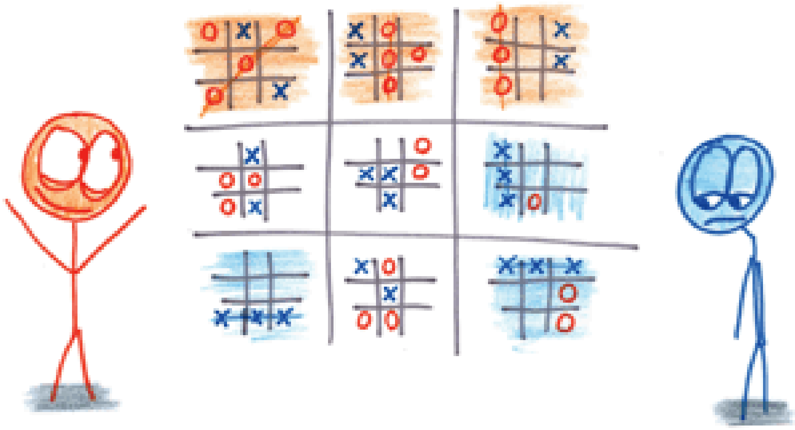
1. Игроки поочередно ставят крестики и нолики в клеточках на мини-полях.



2. Если игрок набирает три крестика или нолика на одной прямой, он выигрывает мини-поле.



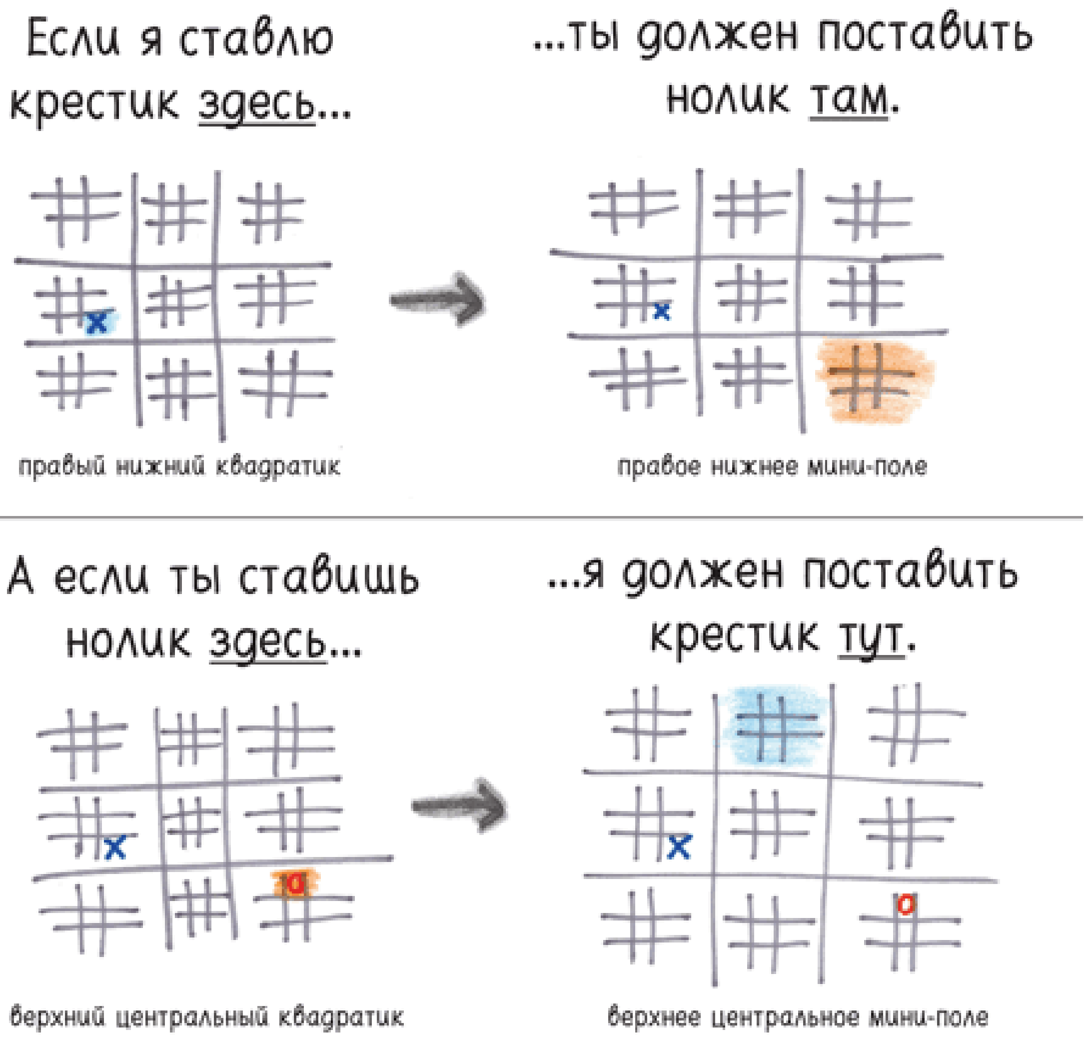
3. Когда игрок выигрывает три мини-поля на одной прямой, он выигрывает игру.



Но потребовалось чуть больше времени, чтобы понять самое важное правило:

Вы не можете поставить крестик или нолик в клеточке на произвольном мини-поле. Все зависит от предыдущего хода противника. **Вы должны играть на том мини-поле, которое соответствует клеточке, где он поставил свой крестик или нолик.**

(А от того, где *вы* поставите свой крестик или нолик, зависит, на каком мини-поле *он* будет играть дальше.)



Это придает игре стратегический элемент. Вы не можете ставить крестик или нолик где угодно. Вы должны рассчитать, куда ваш ход перенаправит вашего противника и куда его ход перенаправит вас – и так далее, и так далее. (Есть всего одно исключение: если ваш противник перенаправляет вас на поле, которое уже сыграно, поздравляю – вы можете выбрать любое другое.)

В итоге сценарии игры выглядят эксцентрично: игроки легко теряют по два-три крестика или нолика на одной линии. Как будто звезда баскетбола упускает открытую передачу и кидает мяч в толпу. Но в этом безумии есть метод. Игроки думают на несколько ходов вперед, в зависимости от того, что предпринимает противник. Осуществив хитрую атаку на мини-поле, вы остаетесь в дураках на большом поле, и наоборот – это-то и вносит напряжение в процесс игры.

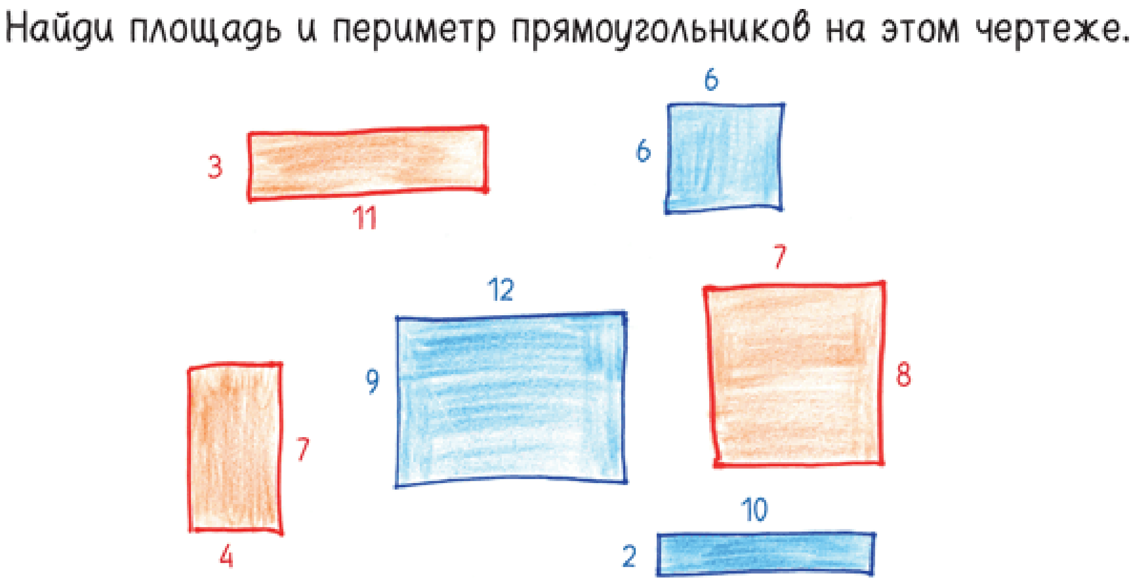
Время от времени я играю в жесткие крестики-нолики с моими учениками[3]; они наслаждаются стратегией, шансом победить учителя и, что самое существенное, отсутствием тригонометрических функций. Но частенько кто-нибудь из них застенчиво спрашивает: «Ну, мне, конечно, нравится игра, но какое отношение она имеет к математике?»[4]

---

[3] Когда я впервые продемонстрировал эту игру моим ученикам в Оклендской чартерной средней школе (*Oakland Charter High School*) в 2012 году, они-то и окрестили ее «жесткие крестики-нолики» (Ultimate Tic-Tac-Toe). Мой пост в блоге с таким заголовком вызвал всплеск популярности: статью в «Википедии», несколько научных статей и множество мобильных приложений. Мораль: гордитесь, матадоры! Вы придумали название для этой штуковины.

[4] Я благодарен Марку Торнтону, который прочел черновик этой главы и задал в точности тот же самый вопрос. Правки Майка сродни текстам песен Леонарда Коэна или прозе Хемингуэя: я всегда знал, что они хороши, но чем старше я становлюсь, тем больше ценю их.

Я знаю, как обычные люди воспринимают мою профессию: унылая тирания жестких правил и формульных процедур, где не больше разнообразия, чем, скажем, в заполнении страхового свидетельства или налоговой декларации. Вот пример задачки, которая ассоциируется с математикой:



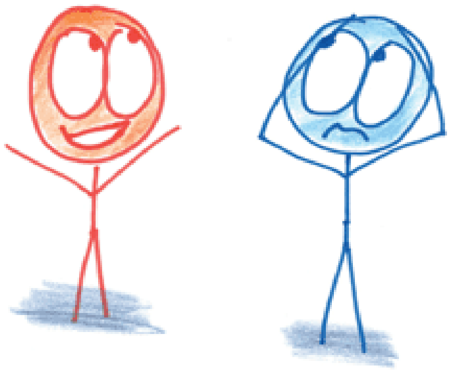
Эта задачка, вероятно, сможет занять ваше внимание на пару минут, хотя вскоре вы абстрагируетесь от геометрического смысла. Периметр больше не будет означать длину линии, ограничивающей прямоугольник. Он превратится просто-напросто в удвоенную сумму двух чисел. Как и в обычных крестиках-ноликах, все сведется к примитивным вычислениям, не требующим интеллектуального напряжения. Здесь нет места фантазии, нет вызова вашим способностям.

Но математика не ограничивается бухгалтерскими вычислениями, ее потенциал гораздо шире. Математика может быть дерзкой и увлекательной, успех может зависеть от баланса терпеливости и авантюризма. Попробуем переформулировать рутинную задачу, приведенную выше, в таком духе:

Эта задачка уже по-настоящему захватывающая. Она противопоставляет площадь и периметр. Вы не просто пользуетесь формулой; в процессе решения вам необходимо постичь суть прямоугольника. (Спойлеры – в примечаниях[5].)

Или как насчет такого:

Придумай два прямоугольника, чтобы периметр первого был вдвое больше, чем периметр второго, а площадь второго вдвое больше, чем площадь первого.



В этом уже есть какая-то перчинка, не правда ли?

За два быстрых шага мы перескочили от сомнамбулически нудной работы к довольно любопытной небольшой головоломке, и у шестиклассников горят глаза, когда я закидываю им эту задачу в качестве дополнительного вопроса на итоговом экзамене. (Ответ – опять-таки в примечаниях[6].)

---

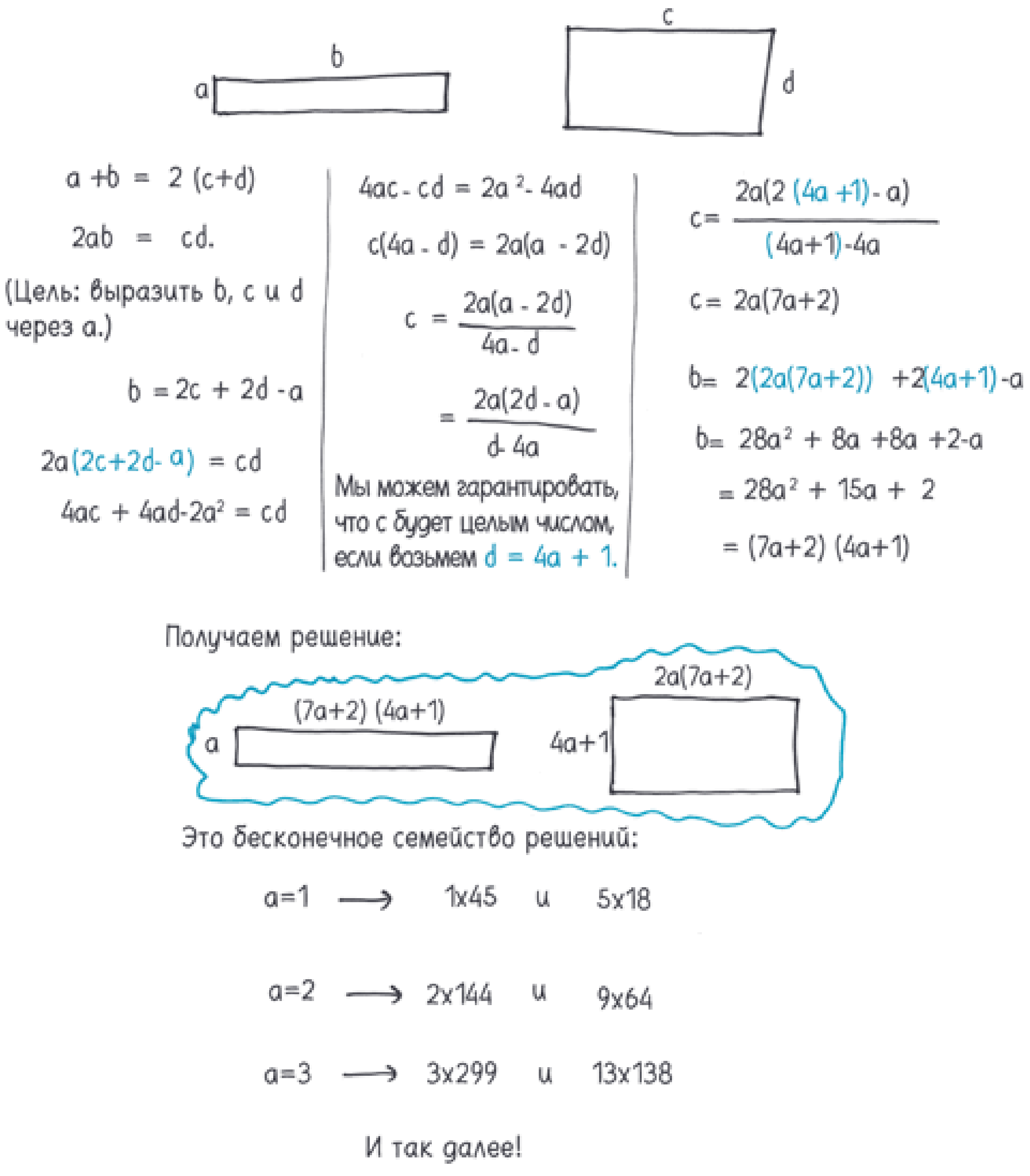
[5] Ключевая идея заключается в том, что у продолговатых прямоугольников непропорционально большой периметр, а у похожих на квадраты – непропорционально большая площадь. Поэтому нужно просто взять продолговатый прямоугольник (например, 10×1) и почти квадратный (например, 3×4).

[6] Если в ответе должны быть целые числа, задача становится еще веселее. Вот мой вывод формулы, порождающей целое семейство решений:

Творчество требует свободы, но одной свободы недостаточно. Псевдоголоволомка «нарисуйте два прямоугольника» подразумевает не только свободу, но и неизбежность скучных математических вычислений. Головоломка должна быть непредсказуемой, чтобы вызвать настоящий творческий порыв.

Вернемся к жестким крестикам-ноликам. У вас есть всего несколько вариантов каждого хода – вероятно, три или четыре. Их достаточно, чтобы включилось ваше воображение, и не настолько много, чтобы вы захлебнулись в море бессчетных альтернатив. Игра представляет собой гармонию жестких правил и свободы выбора.

И это великолепная иллюстрация того удовольствия, которое доставляет математика: творчество, порожденное непредсказуемостью. Привычные крестики-нолики – это математика

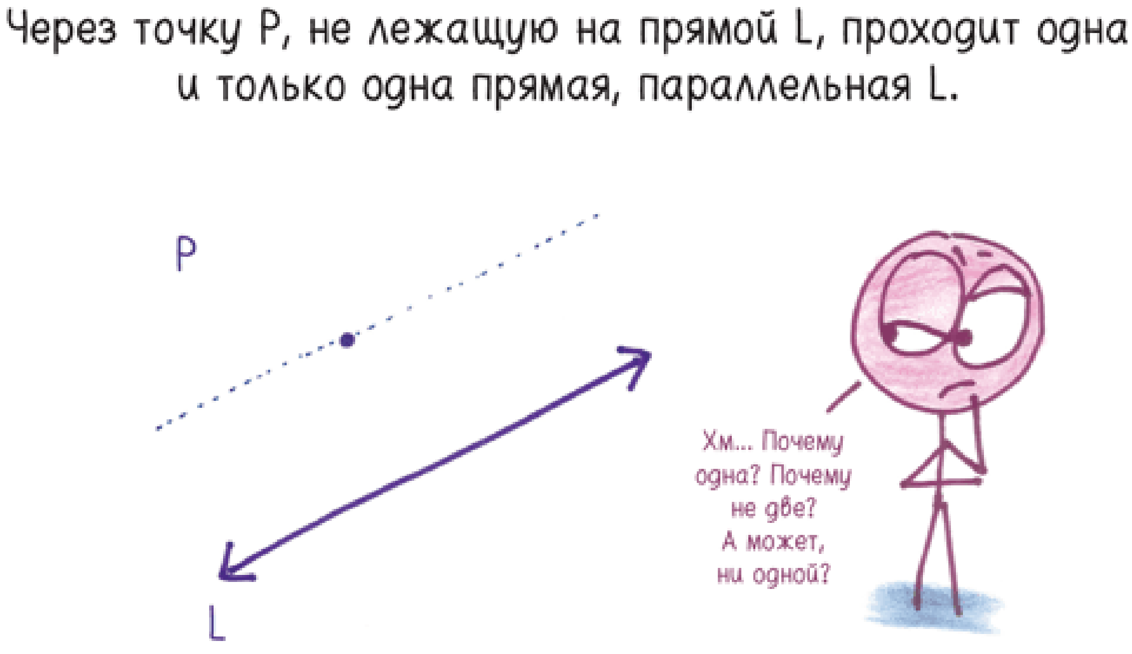


Решений бесконечно много, но некоторые все равно остаются вне поля зрения, потому что другие значения *d* тоже могут давать целочисленные значения *c*. Например, эта формула не дает моего любимого решения: 1 × 33 и 11 × 6. Мой коллега Тим Кросс, съевший собаку на диофантовых уравнениях, подсказал мне ловкий способ найти все целочисленные решения. Моей профессии свойственна мизантропия, поэтому на сей раз я предлагаю читателю найти этот способ самостоятельно.

с точки зрения большинства людей; жесткие крестики-нолики – это математика, какой она должна быть.

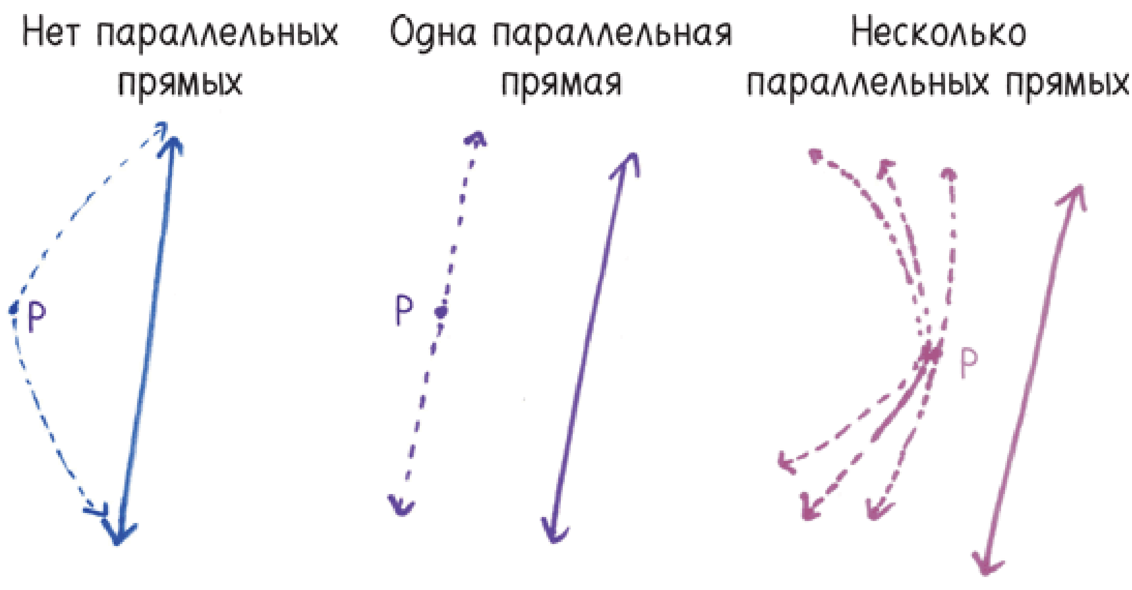
Вы можете найти множество аргументов в пользу того, что *все* творческие порывы стремятся нарушить четкие правила. По словам физика Ричарда Фейнмана, «творчество – это воображение в надежной смирительной рубашке». Жесткие правила сонета – «Укладывайся в ритм! Соблюдай длину строки! Следи за рифмовкой! Окей… а теперь выражай свою любовь, Вильям ты наш Шекспир!» – не ограничивают, а совершенствуют мастерство. Или возьмем, к примеру, спорт. Футболисты должны достичь определенной цели *(забить мяч в ворота)*, следуя твердым правилам *(нельзя дотрагиваться до мяча руками)*. В процессе игры они изобретают удар «ножницами» (удар через себя в падении) или удар «рыбкой» (удар головой в падении). Пренебрегая правилами, вы теряете изящество. Даже авангардное искусство – экспериментальный фильм, экспрессионистская картина, профессиональный реслинг – обретают силу благодаря тому, что выбор средств самовыражения ограничен.

Математики делают еще один концептуальный шаг. Мы не просто следуем заранее заданным правилам – мы изобретаем их и заигрываем с ними. Мы делаем предположение, выводим его логические следствия – и если они ведут в никуда или, что гораздо хуже, если они наводят скуку, мы ищем новый и более плодотворный путь.



Например, что произойдет, если я усомнюсь в постулате о параллельных прямых?

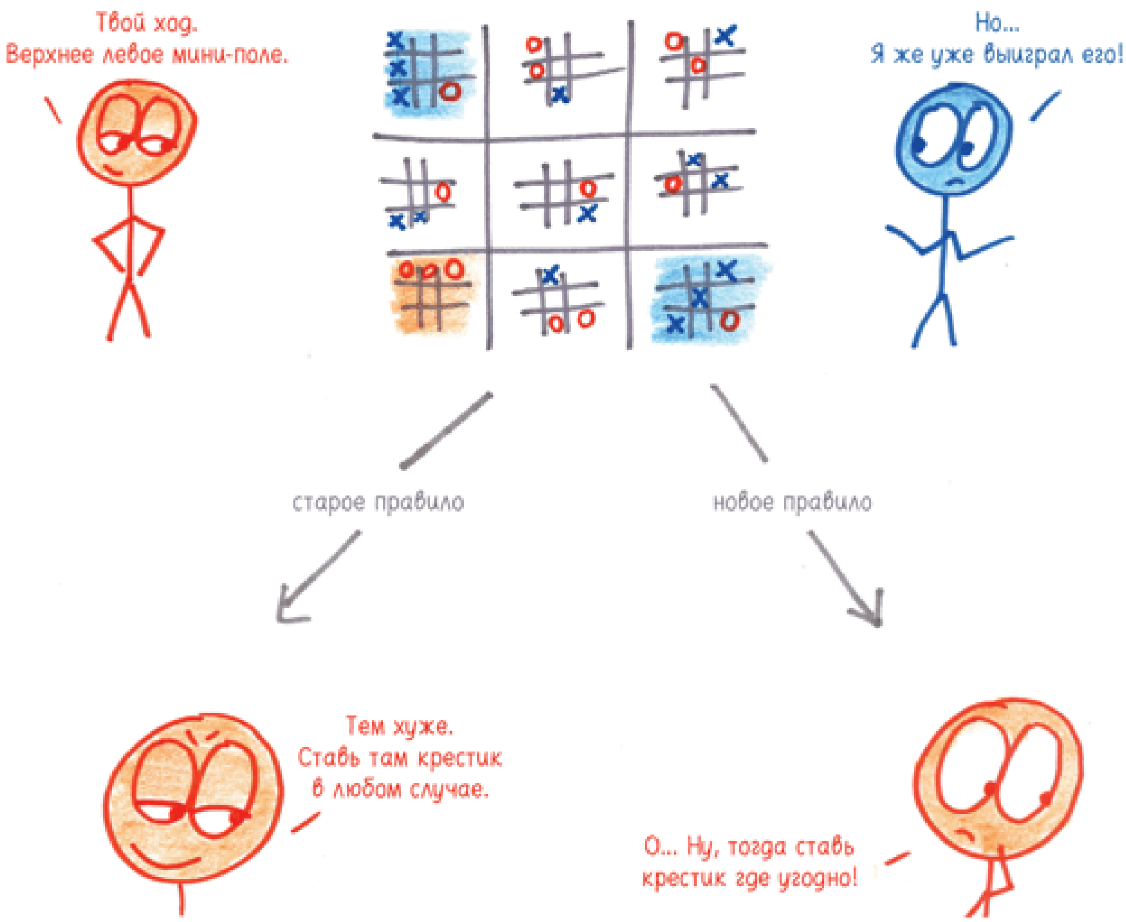
Евклид изложил этот закон параллельных прямых примерно в 300 году до н. э.; он принял его как должное и назвал фундаментальным предположением («постулатом»). Его преемники сочли это несколько смехотворным. Мы действительно должны принимать на веру данное утверждение? Может быть, его можно доказать? На протяжении двух тысячелетий ученые ковыряли это правило, как волоконце мяса, застрявшее между зубов. В конце концов они поняли: «О да! Это всего лишь предположение». Вы можете предположить иное. В таком случае традиционная геометрия обрушится и уступит место диковинным альтернативным геометриям, где слова «параллельность» и «прямая» имеют совершенно другой смысл.



Новое правило – новая игра.

То же самое работает в случае с жесткими крестиками-ноликами. Вскоре после того, как я стал пропагандировать эту игру, я увидел единственную техническую деталь, на которой все держится. Она сводится к вопросу, которого я уже касался раньше. Как быть в том случае, если мой противник перенаправляет меня на мини-поле, которое уже сыграно?

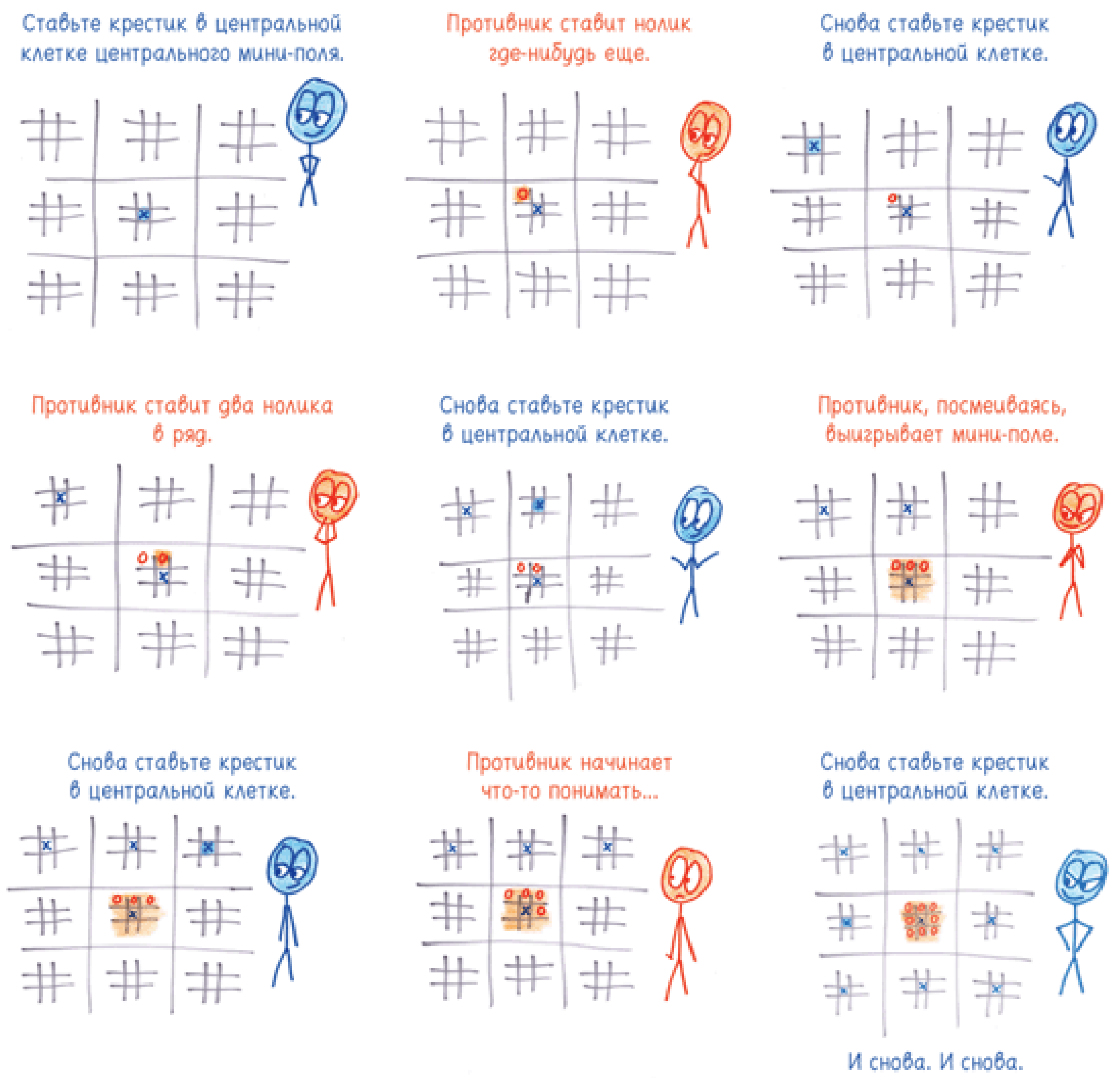
Сейчас мой ответ совпадает с тем, который я приводил выше. Если мини-поле уже сыграно, вы можете выбрать любое другое.



Но изначально мой ответ был другим. До тех пор, пока на этом мини-поле остаются пустые клетки, вам необходимо идти туда и делать ход, даже если он лишен смысла.

Это кажется мелочью – всего лишь одна нить в гобелене игры. Но посмотрите, как вся ткань распустится, если потянуть за нее.

Я покажу суть старого правила с помощью дебютной стратегии, которую я окрестил (в порыве скромности) «гамбитом Орлина»:



Иными словами, крестики жертвуют центральным мини-полем ради выигрышной позиции на оставшихся восьми. Я полагал, что эта стратегия весьма крута, пока читатели не указали мне на ее глубочайшую глупость. Гамбит Орлина дает небольшое преимущество, но его легко расширить до гарантированно беспроигрышной стратегии[7]. Вы можете пожертвовать не одним мини-полем, а двумя, завоевав при этом по два крестика на одной прямой на оставшихся семи мини-полях.

Я был смущен и переформулировал старое правило – легкая перенастройка, которая вдохнула в жесткие крестики-нолики новую жизнь.

Новое правило – новая игра.

Именно так развивается математика. Мы выбираем правила и начинаем играть. Когда игра нам приедается, мы меняем правила. Мы вводим новые ограничения и смягчаем старые. Каждое нововведение влечет за собой новые головоломки и вызовы.

По большей части математики не бьются над чужими загадками, а изобретают свои собственные, исследуя, какие ограничения приводят к интересным играм, а какие – к наводящим скуку. В конце концов постоянная смена правил и перескоки от одной игры к другой становятся похожи на отдельную грандиозную нескончаемую игру.

---

[7] Эта стратегия слишком сложна, чтобы полностью изложить ее здесь, но она реализована коллегами из Академии Хана: https://www.khanacademy.org/computer-programming/tic-tac-toe/5946909186326528.

Математика – это логическая игра по изобретению логических игр.

Вся история математики снова и снова иллюстрирует этот тезис. Логические головоломки изобретают, решают и изобретают снова. Например, что произойдет, если я подправлю знакомое уравнение и заменю двойку на другое число: 3, или 5, или 797?

Уравнение

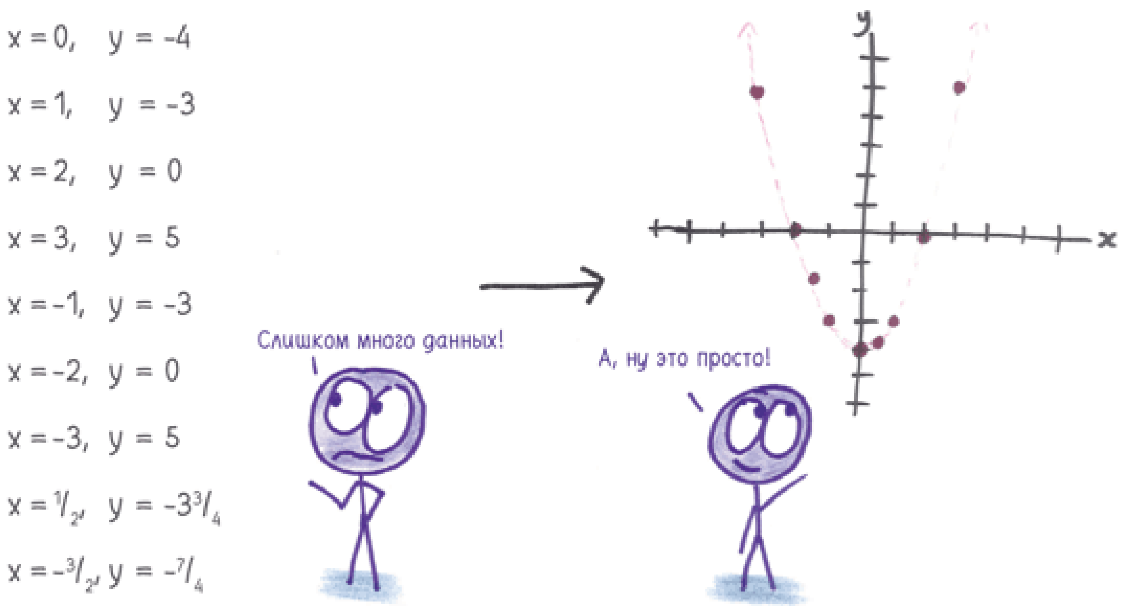
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Новые уравнения

$$a^3 + b^3 = c^3$$
$$a^5 + b^5 = c^5$$
$$a^{797} + b^{797} = c^{797}$$

и т.д.

С ума сойти! Я превратил элементарное древнее уравнение, имеющее множество решений в целых числах (например, 3, 4 и 5), в самую досадную задачу, с которой когда-либо сталкивалось человечество, – в великую теорему Ферма. Она тревожила умы математиков около 350 лет, но в 1990-е годы гениальный британец[8] заперся на чердаке и вышел примерно десять лет спустя, щурясь на солнечный свет, с доказательством, что уравнение не имеет целочисленных решений, если степени неизвестных больше двух[9].

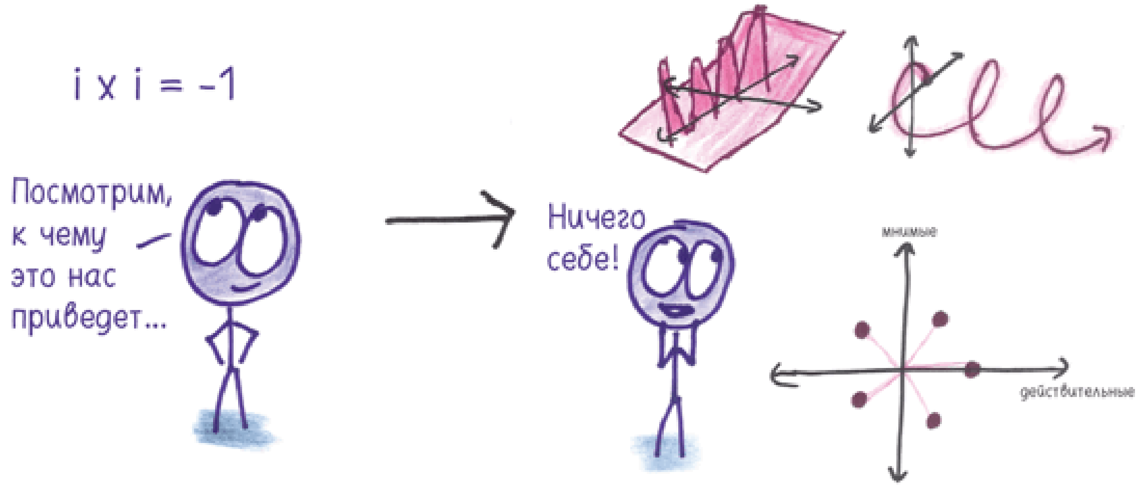


А что произойдет, если я возьму две переменных, скажем x и y, и построю координатную сетку, чтобы посмотреть, как они зависят друг от друга?

[8] Эндрю Уайлс (род. 1953), профессор Принстонского университета. – *Прим. пер.*

[9] Я рекомендую прочесть эту историю целиком: Simon Singh, *Fermat's Last Theorem* (London: Fourth Estate Limited, 1997). [Сингх С. Великая теорема Ферма. – М.: МЦНМО, 2000.]

Невероятно! Я изобрел координатную плоскость и совершил революцию в математике, наглядно изобразив алгебраические идеи, и поэтому мне платят кучу денег. Будем знакомы: меня зовут Декарт.



Или припомним, что возведение числа в квадрат всегда дает положительную величину. А что, если мы придумаем особое число, которое при возведении в квадрат дает *отрицательную* величину? И что тогда?

Вот это да! Мы изобрели мнимые числа, открыв возможности для исследования электромагнетизма и взломав математическую истину под названием «основная теорема алгебры»[10]. Звучит неплохо, можно включить в резюме.

В каждом из этих случаев математики поначалу недооценивали преображающую силу смены правил. Ферма полагал, что его теорема доказывается крайне просто; как выяснилось, он заблуждался, и его сбитые с толку преемники бились над доказательством несколько веков. Идея Декарта о координатной плоскости (которую называют «декартовой системой координат» в его честь) вначале была высказана в приложении к философскому тексту[11]; впоследствии текст забылся, а идея получила свое развитие. Над мнимыми числами издевались и смеялись несколько веков («настолько же неуловимые, насколько бесполезные», сказал великий итальянский математик Кардано[12]), пока их не признали настоящими и полезными. Кстати, само слово «мнимый»[13] по отношению к таким числам изначально имело уничижительный смысл, и придумал это поношение не кто иной, как Декарт.

Легко недооценить новаторские идеи, если они родились не в результате серьезных размышлений, а во время игры. Кто мог предположить, что небольшая перемена в правилах (новая степень, новая визуализация, новое число) превратит фантазию в нечто официально признанное?

Не думаю, что математики на том пикнике думали о таких вещах, когда склонились над игрой в жесткие крестики-нолики. Но в этом и не было необходимости. Осознаём мы это или нет, но логическая игра по изобретению логических игр оказывает влияние на всех нас.

---

[10] Любой многочлен n-й степени над полем комплексных чисел имеет в нем ровно n корней *(с учетом кратности)*. – *Прим. науч. ред.*

[11] См.: Декарт Р. Рассуждение о методе с приложениями. Диоптрика, метеоры, геометрия. – М.: АН СССР, 1953. – *Прим. пер.*

[12] Цитата из единственного словаря, чтение которого доставляет мне удовольствие: David Wells, *The Penguin Book of Curious and Interesting Mathematics.* – London: Penguin Books, 1997.]

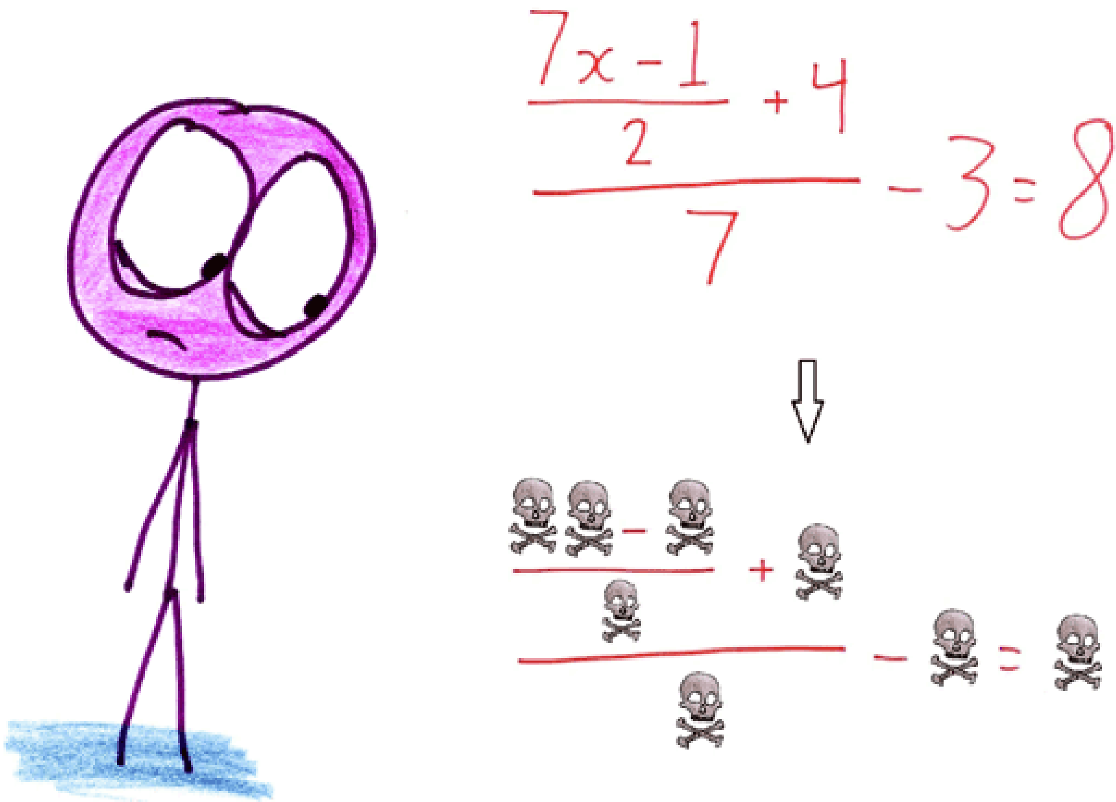
[13] По-английски это слово звучит еще хуже: *imaginary*, то есть «воображаемые». – *Прим. науч. ред.*

Глава 2
Как математику видят школьники?

Увы, эта глава будет краткой и мрачной. Я прошу прощения. Но я слишком занят, чтобы просить прощения даже за другие вещи, например за мои душеразжижающие уроки математики.

Вы понимаете, что я имею в виду. Для множества школьников заняться математикой означает записать карандашом предписанную последовательность действий. Математические символы ничего не символизируют; они просто пляшут по странице, выполняя бестолковые хореографические упражнения.

Вся эта математика, приятель, –
Побасенки и выдумки абака,
Сплошь синусы да греческие буквы,
Не значащие ровно ничего[14].



[14] Пародия на монолог Макбета из одноименной пьесы Шекспира (акт V, сцена 5): «Жизнь – это история, рассказанная идиотом, полная шума и ярости, ничего не значащая». – *Прим. пер.*

Позвольте принести два кратких извинения. Во-первых, я прошу прощения у своих учеников за то, что я часто заставлял их чувствовать себя как персонаж на этой картинке. Я пытался избежать подобных ситуаций; кроме того, я пытался отвечать на все электронные письма, экономить на мороженом и посещать парикмахерскую чаще, чем раз в четыре месяца. Пожалуйста, простите, ведь я обычный человек и ничто человеческое мне не чуждо.

Во-вторых, я извиняюсь перед математикой за все нанесенные мною раны. В свою защиту могу сказать: госпожа Математика, вы живете в неосязаемой башне количественных концепций, зацементированных абстрактной логикой, поэтому вряд ли я оставил на вашем теле глубокие шрамы. Но я не настолько заносчив, чтобы не попросить прощения.

Вот и все в этой главе. Обещаю: следующая будет гораздо более взрывной, как и любой хороший сиквел.

Глава 3
Как математику видят математики?

Тут все очень просто. Математика похожа на язык.

Курьезный язык, я не спорю. Насыщенный, лаконичный и требующий кропотливого чтения. За то время, пока я успею проглотить пять глав «Сумерек»[15], вы, возможно, так и не перелистнете страницу вашего учебника по математике. Этот язык приспособлен для того, чтобы рассказывать некоторые истории (например, о соотношениях между кривыми и уравнениями), но не в силах поведать другие (например, об отношениях между девушками и вампирами). Поэтому он обладает определенным лексиконом и полон слов, которых нет в другом языке. Например, даже если я переведу формулу $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sin\frac{n\pi x}{L} + b_n \cos\frac{n\pi x}{L}\right)$ на привычный английский, она останется бессмыслицей для тех, кто не знаком с рядами Фурье, так же как «Сумерки» – бессмыслица для тех, в ком не играют подростковые гормоны.

Но все-таки кое в чем математика – обычный язык. Пытаясь добиться понимания, математики используют стратегии[16], знакомые большинству читателей. Они формируют мысленные образы. Они составляют парафразы в своей голове. Они пропускают отвлекающие формальности. Они проводят параллели между тем, что читают, и тем, что уже знают. И, как ни странно, они испытывают эмоции: радуются, веселятся или брезгливо кривятся, когда читают научные тексты.

За одну короткую главу нельзя научить бегло говорить на математическом языке, это не легче, чем научить американца бегло говорить по-русски. Филологи могут часами дискутировать о четверостишии Джерарда Мэнли Хопкинса[17] или о двусмысленной фразе из электронного письма. Математики тоже могут расходиться во мнениях по определенным вопросам. У каждого своя оригинальная точка зрения, сформированная жизненным опытом и личными ассоциациями.

Тем не менее я хочу предложить вашему вниманию несколько вольных переводов, несколько беглых взглядов на стратегию, с помощью которой математики могут читать актуальные математические статьи. Назовем ее Теорией закорючек 101[18].

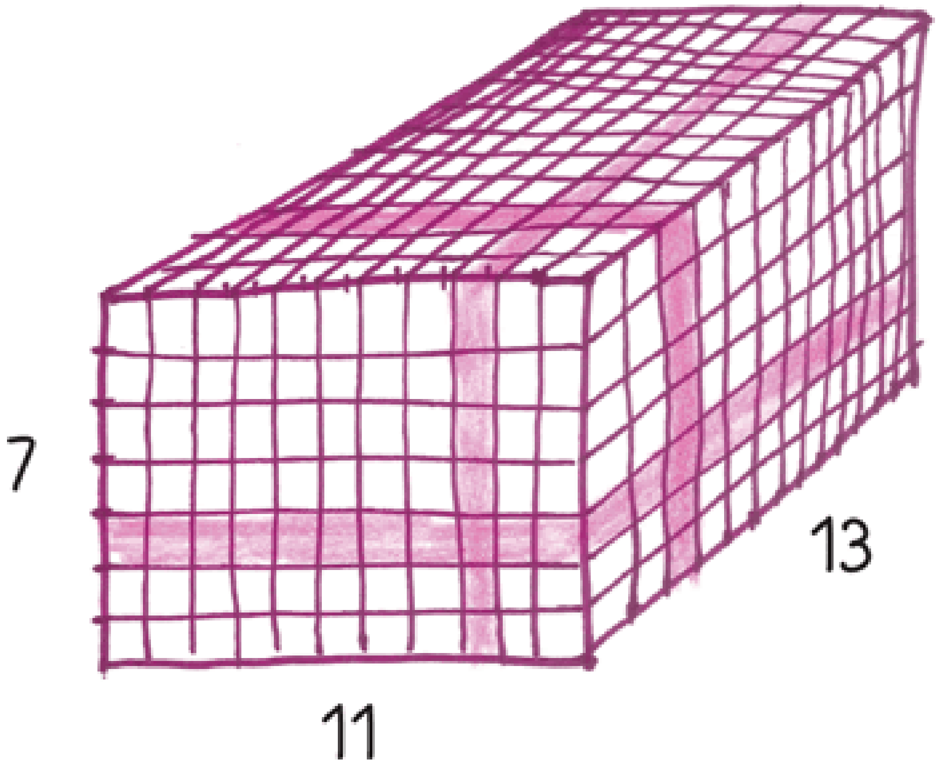
[15] По правде говоря, я скорее уж фанат «Голодных игр».

[16] Майкл Першен, удивительный человек и обладатель самого аналитического интеллекта на свете, сформулировал идеи этих «стратегий» раньше, чем они пришли мне в голову. Я благодарю его за помощь при написании этой главы.

[17] Джерард Мэнли Хопкинс (1844–1889) – английский поэт, католический священник. – *Прим. пер.*

[18] Тут пародируется типичное название вводного курса математического анализа в американских университетах: *Calculus 101*. – *Прим. науч. ред.*

Когда <u>математики</u> видят 7 × 11 × 13...



Обычно я слышу от школьников вопрос: «Имеет ли значение, *что* я перемножу сначала: 11 и 13 или 7 и 13?» Ответ («Нет») менее интересен, чем подоплека вопроса: с точки зрения моих студентов, умножение – это *действие*, операция, которую вы *делаете*. Один из труднейших уроков, который я преподаю им, состоит в том, что иногда это *не так*.

Вы не должны воспринимать 7 × 11 × 13 как команду. Вы также можете назвать это число 1002 – 1, или 499 × 2 + 3, или 5005/5, или Джессика, или Число-которое-спасет-планету-Земля, или Старое доброе 1001[19]. Но если 1001 – имя, похожее на имена других друзей из мира чисел, то 7 × 11 × 13 – причудливое и произвольное прозвище. Точнее говоря, это официальное имя из свидетельства о рождении.

7 × 11 × 13 – это результат факторизации (то есть разложения на простые множители), задающий объемную точку зрения.

Некоторые ключевые фоновые знания: сложение скучно. А именно: записывать 1001 как сумму двух чисел – поистине тоскливое занятие. Вы можете представить это число в виде суммы 1000 + 1, или 999 + 2, или 998 + 3, или 997 + 4… и так далее, и так далее, пока вы

---

[19] Ср: «Он сказал мне, что в 1886 году придумал оригинальную систему нумерации и что в течение немногих дней перешел за двадцать четыре тысячи. Он ее не записывал, так как то, что он хоть раз подумал, уже не стиралось в памяти. Первым стимулом к этому послужила, если не ошибаюсь, досада, что для выражения “тридцать три песо” требуются две цифры или три слова вместо одного слова или одной цифры. Этот нелепый принцип он решил применить и к другим числам. Вместо “семь тысяч тринадцать” он, например, говорил “Максимо Перес”; вместо “семь тысяч четырнадцать” – “железная дорога”; другие числа обозначались как “Луис Мелиан Лафинур”, “Олимар”, “сера”, “трефи”, “кит”, “газ”, “котел”, “Наполеон”, “Агустин де Ведиа”. Вместо “пятьсот” он говорил “девять”. Каждое слово имело особый знак, вроде клейма, последние большие числа были очень сложны… Я попытался объяснить ему, что этот набор бессвязных слов как раз нечто совершенно противоположное системе нумерации. Я сказал, что, говоря “365”, мы называем три сотни, шесть десятков, пять единиц – делаем анализ, которого нет в его “числах”, вроде “негр Тимотео” или “взбучка”. Фунес меня не понимал или не хотел понять» (Хорхе Луис Борхес, «Фунес, чудо памяти». Пер. Е. М. Лысенко). – *Прим. науч. ред.*

не впадете в кому от скуки. Это разложение на слагаемые не говорит нам ничего особенного о числе 1001, потому что все числа можно разложить на слагаемые практически одинаковым способом (например, можно записать число 18 в виде суммы 17 + 1, или 16 + 2, или 15 + 3…). Визуально это похоже на деление одной кучи на две. Без обид, но копаться в кучах глупо.

Умножение – вот настоящее веселье. Чтобы не быть чужим на этом празднике жизни, вам стоит применить первое стратегическое правило чтения математических текстов: *формирование мысленных образов*.

Как показано на рисунке на предыдущей странице, умножение сводится к сеткам и массивам. Число 1001 можно рассматривать в качестве гигантской конструкции из кубиков: 7 в ширину, 11 в длину и 13 в высоту. Но это только начало. Вы можете представить это число как 11 слоев из 91 кубика каждый, а если вы наклоните голову, то увидите 7 слоев по 143 кубика в каждом. Все эти способы разложения числа 1001 становятся очевидны благодаря факторизации. Но почти невозможно разобрать это число без кропотливых вычислений, просто глядя на сочетание цифр.

Факторизация – это ДНК числа. Благодаря факторизации вы можете понять, на что делится данное число, а на что нет. Если математика – это мастер-класс по кулинарии, то произведение 7 × 11 × 13 – это не рецепт блинчика, а сам блинчик.

Для типичных фанатов число π – таинственная руна, символ математической магии. Они размышляют над его иррациональностью, запоминают цепочку из тысячи цифр и отмечают 14 марта День π, сочетая наиболее славное искусство человечества (приготовление сладких *пи*рогов) с наименее славным (*пи*жонство). Для широкой же публики число π – это объект одержимости и благоговейного трепета. Вокруг него сложилось нечто вроде религиозного культа.

А для математиков π – это приблизительно 3.

Что до бесконечной катушки знаков после запятой, которая так пленяет профанов, то математиков это не тревожит. Они знают, что математика – нечто большее, чем точные вычисления. Это быстрая прикидка и ловкое округление. Интуиция помогает оптимизировать и упрощать. *Разумное огрубление* – еще одно жизненно важное стратегическое правило чтения математических текстов.

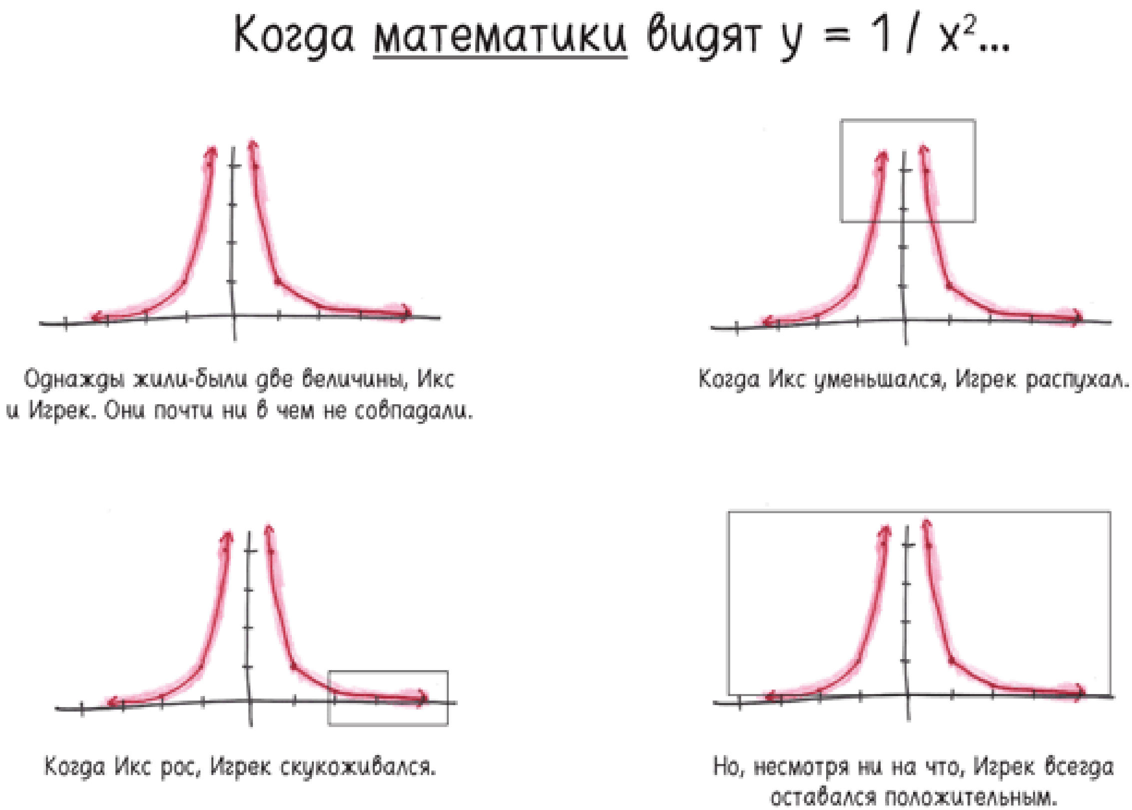
Возьмем формулу $S = \pi R^2$, которую многие школьники слышат так часто, что фраза «площадь круга» вызывает у них рефлекторное желание закричать: «Пи эр квадрат!» Они как агенты глубокого внедрения с промытыми мозгами. Но что значит эта формула? Почему это так?

Ладно, забудьте о числе 3,14159. Раскрепостите сознание. Просто поглядите на геометрические фигуры: r – это радиус круга, длина отрезка; r^2 – это площадь квадрата (он изображен на чертеже). А теперь вопрос на π долларов: как площадь круга соотносится с площадью этого квадрата?

Очевидно, что площадь круга больше. Но не в четыре раза больше, потому что четыре квадрата покроют не только круг, но и дополнительную часть плоскости. Кроме того, присмотревшись, вы поймете, что площадь круга немного больше, чем площадь трех квадратов.

Это именно то, что утверждает наша формула: площадь круга чуть-чуть больше, чем $3 \times r^2$.

Если вы хотите установить точное значение числа π (почему 3,14, а не 3,19?), вам придется прибегнуть к доказательству. (Есть несколько великолепных наглядных доказательств, мое любимое заключается в том, чтобы снимать с круга слой за слоем, как будто кожицу с луковицы, и в итоге получить многоугольник[20].) Но математики, что бы они ни доказывали, не всегда исходят из первичных принципов. Как и представители других профессий, от плотников до смотрителей зоопарка, они с радостью используют какой-нибудь инструмент, даже не зная в точности, каким образом он сконструирован, до тех пор, пока у них есть ощущение, что он работает.



«Постройте график исходя из уравнения» – знакомое домашнее задание. Я и сам его задавал. Кроме того, это зародыш порочного мифа: якобы графики являются самоцелью. На самом деле их построение не похоже на решение уравнений или выполнение операций. График – это не конечный пункт, а всегда не более чем средство.

[20] Посмотрите милый мультфильм на эту тему: https://www.geogebra.org/m/WFbyhq9d.

График – это способ визуализировать данные, картинка, которая рассказывает историю. Он представляет собой еще одну могущественную стратегию чтения математических текстов: *превратить статику в динамику*.

Возьмем уравнение, приведенное выше: $y = 1/x^2$. Здесь x и y – пара взаимосвязанных чисел. Вот несколько примеров:

x	2	3	4	5
y	1/4	1/9	1/16	1/25

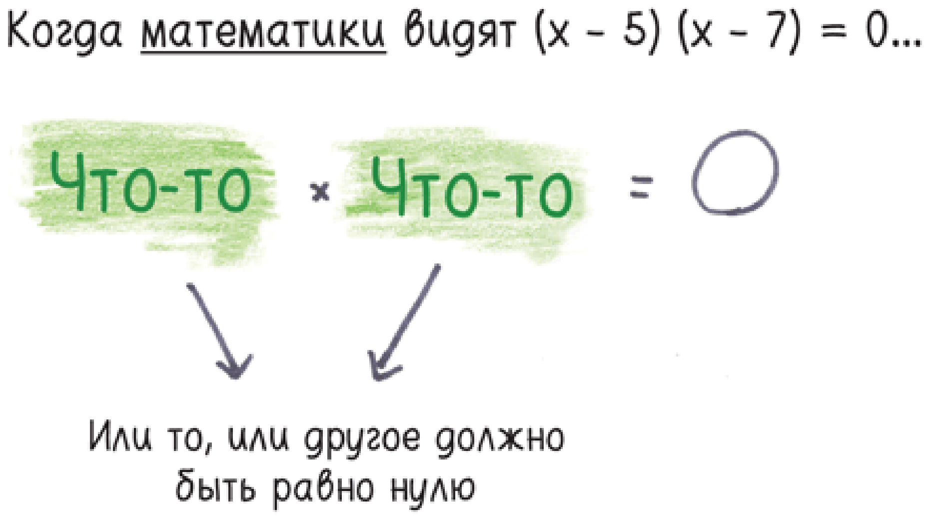
Уже просматривается несколько закономерностей. Но чем лучше наши технические приемы, тем больше мы видим, и таблицы – не модный инструмент. Из бесконечных пар $x - y$, которые подходят нашему уравнению, таблица, как бегущая строка биржевых индексов, может показать всего лишь несколько. Нам нужен инструмент визуализации получше: математический аналог телевизионного экрана.

На сцене появляется график.

Рассматривая x и y как своего рода широту и долготу, мы преобразуем каждую неосязаемую пару чисел в нечто геометрическое – точку. Бесконечное множество точек становится непрерывной кривой линией. И тогда возникает история, рассказ о движении и изменении.

- Когда x уменьшается, стремясь к нулю ($^1/_5, {}^1/_{60}, {}^1/_{1000}\ldots$), y раздувается до немыслимых величин (25, 3600, 1 000 000…).
- Если x увеличивается (20, 40, 500…), y скукоживается до микроскопических чисел ($^1/_{400}, {}^1/_{16\,000}, {}^1/_{250\,000}\ldots$).
- Когда x принимает отрицательные значения (–2, –5, –10), y остается положительным. Он никогда не спускается ниже нуля.
- Ни одна из величин не может быть равна нулю.

Окей, возможно, это не самая сочная сюжетная линия, но такие умственные упражнения показывают разницу между математиком-новичком (он видит парализующий поток бессмысленных символов) и опытным математиком (он видит нечто слаженное и дружелюбное). Графики наполняют безжизненные уравнения ощущением движения.



Есть психологический феномен, известный под неприятным названием *чанкинг*. Это не просто способ очистить организм после чрезмерного количества пива[21], но и мощная ментальная техника, необходимая математикам. Очередная стратегия чтения математических текстов.

Чанкинг означает, что мы интерпретируем набор разрозненных, ускользающих деталей как единое целое. Приведенное выше уравнение – хороший пример. Умелый чанкер игнорирует мелочи слева. Там x или y, 5 или 6, плюс или минус? Не знаю, без разницы. Вместо этого вы видите просто два множителя, формирующих скелет уравнения: *чанк* умножить на *чанк* равно нулю.

Если вы знакомы с таблицей умножения, вы знаете, что ноль – это своеобразный результат.

6 × 5? Не ноль.

18 × 307? Не ноль.

19,91632 × 4 600 000 000 000? Нет смысла открывать калькулятор на вашем смартфоне: это тоже не ноль.

Ноль – единственное в своем роде число в мире умножения. В отличие от числа, скажем, 6, которое можно разложить на множители различными способами (3 × 2, 1,5 × 4, 1200 × 0,005…), ноль – особая, своенравная величина. На самом деле есть всего один способ получить ноль, перемножая два числа: если одно из них само по себе равно нулю.

Здесь окупается наша стратегия дробления: один из множителей равен нулю. Таким образом, x равен либо 5, либо 7.

Уравнение решено.

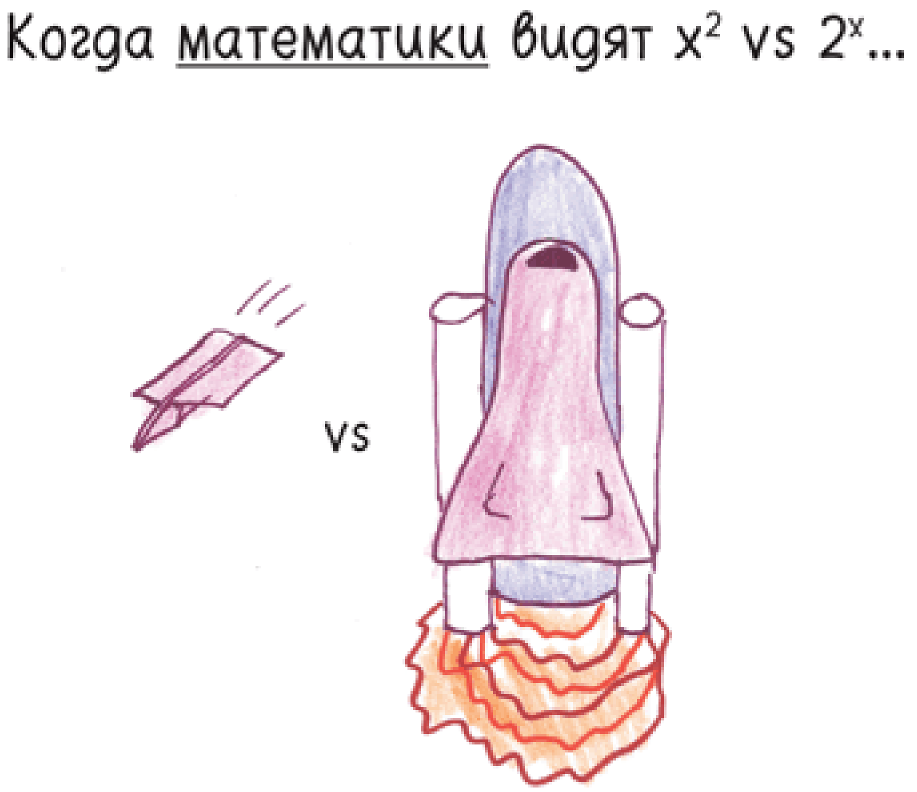
Чанкинг прочищает не только наши желудки, но и наши умы. Он делает мир удобоваримым. Чем больше вы узнаете, тем агрессивнее вы чанкаете. Старшеклассник может прочанкать целую строку алгебраических символов и понять, что это формула площади трапеции. Старшекурсник может прочанкать несколько дремучих строчек вычислений и увидеть, что это формула объема твердого тела вращения. Аспирант прочанкает полстраницы грозных греческих букв и сделает вывод, что речь идет о вычислении хаусдорфовой размерности множества. Чем выше ваш уровень, тем больше вы узнаете. Что такое трапеции? Как ведут себя интегралы? Что курил Хаусдорф[22] и где бы нам такое раздобыть?

---

[21] «To chunk» означает «разбивать на фрагменты», на жаргоне – «страдать рвотой». К сожалению, пришлось отказаться от игры слов, потому что этот термин уже вошел в русский язык. Простейший пример чанкинга – разделение телефонного номера на несколько частей. – *Прим. пер.*

[22] Феликс Хаусдорф (1868–1942) – один из основоположников современной топологии. – *Прим. пер.*

Но мы не изучаем детали ради деталей. Мы узнаем детали, чтобы позже их проигнорировать и сосредоточиться на более общей картине.



Поменяйте местами два символа. Что произойдет?

Ну, с точки зрения новичка, ничего. Вы поменяли две закорючки, две буквы тарабарского языка. Какая разница? Но, с точки зрения математика, это все равно что поменять местами море и небо, горы и облака, птицу и рыбу (к величайшему ужасу обеих). Поменять местами два символа означает поменять все на свете.

Например, возьмем два выражения и представим, что x равен 10.

А 10^2 – большое число. Это 10×10, то есть 100 – приемлемое количество школьников, которым я смогу преподавать в этом году, или расстояние (в милях) до парка с аттракционами, или стоимость (в долларах) для оплаты телевидения. (Но сомнительно, что вы сможете приютить такое количество далматинов.)

Но 2^{10} *гораздо* больше. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1024$. Стольких школьников можно выучить за десять лет, столько ехать до самого грандиозного парка с аттракционами на свете, столько долларов можно заплатить за самое навороченное телевидение. (Но *чрезвычайно* сомнительно, что вы сможете приютить такое количество далматинов; вот почему приняты законы о насилии над животными.)

Чем больше мы увеличиваем x, тем больше разрыв между значениями двух функций. На самом деле слово «больше» слишком скромное, это как назвать Большой каньон «трещинкой». Когда x возрастает, разрыв между x^2 и 2^x приобретает катастрофический характер.

100^2 – довольно много. $100 \times 100 = 10\,000$.

Но 2^{100} – это невообразимо много.

2×2
$\times 2 \times 2$
$\times 2 \times 2$

× 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 1 267 650 600 228 229 401 496 703 205 376, примерно миллиард миллиардов триллионов.

Допустим, мы ведем измерения в фунтах. 10 000 фунтов[23] – это масса грузовика, груженного кирпичами. По правде говоря, это тяжело, но второе число принадлежит к другому классу величин.

Такова масса сотни тысяч планет Земля.

Функции x^2 и 2^x не слишком отличаются друг от друга для нетренированного глаза. Но, чем дольше вы изучаете математику и чем более бегло вы говорите на этом языке закорючек, тем более драматичной становится разница. Вскоре она становится нутряной, тактильной; она начинает **задевать ваши чувства**, и это последний жизненно важный пункт нашей стратегии. Мы должны читать строки математического текста, испытывая весь спектр эмоций – от радости и приязни до страха и трепета.

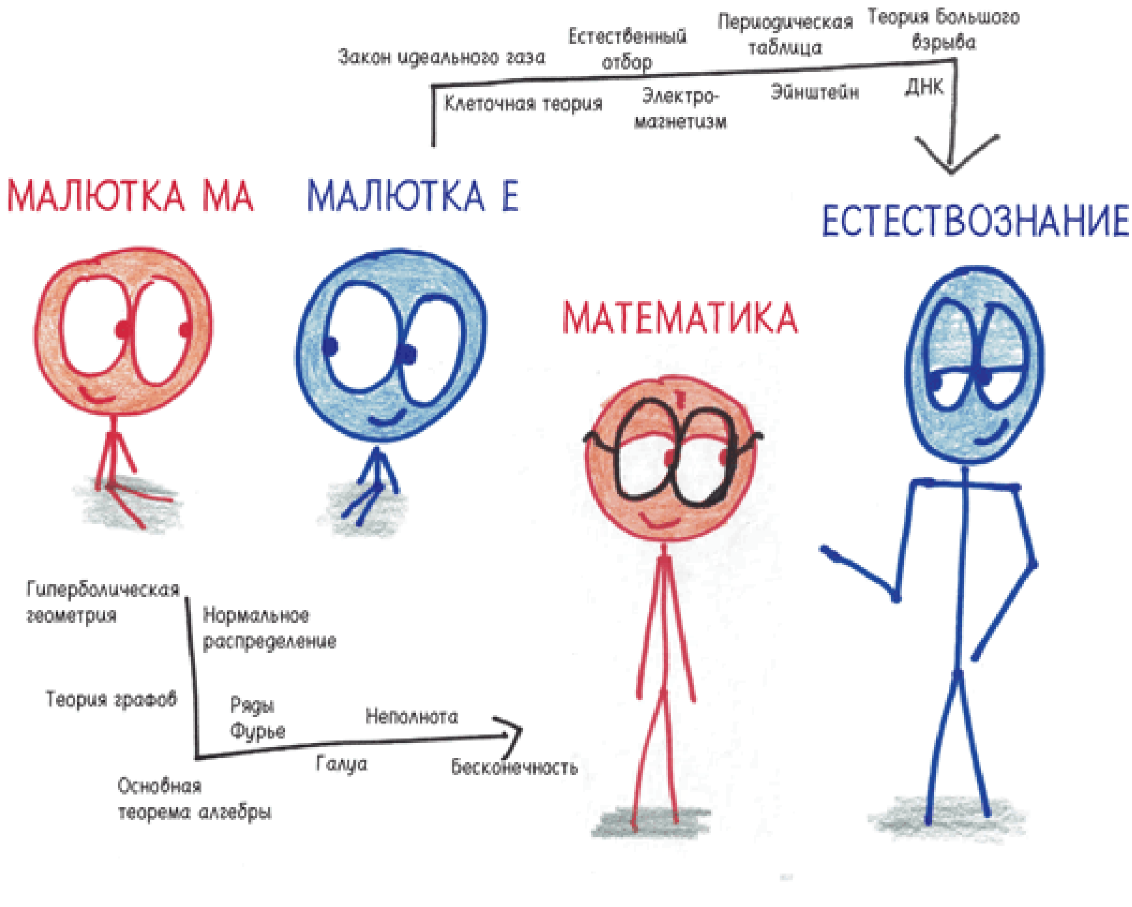
Рано или поздно неумение отличить функции x^2 и 2^x становится таким же абсурдным, как образ грузовика, который тащит за собой сто тысяч планет.

[23] Примерно 4536 кг. – *Прим. науч. ред.*

Глава 4
Как естествознание и математика видят друг друга?

1. Больше не близнецы

В девятом классе мы с моим другом Джоном были удивительно похожи: задумчивые, круглолицые, темноволосые мальчишки, молчаливые, как мебель. Учителя путали наши имена; старшеклассники думали, что мы один и тот же человек; в классном журнале мне выставляли его оценки, а ему – мои. Насколько я помню, мы стали друзьями только ради того, чтобы дурачить окружающих.



Со временем мы выросли. Джон сейчас – широкогрудый мужчина ростом 188 см, он выглядит как принц из диснеевского мультфильма. Мой рост 175 см; говорят, что я нечто среднее между Гарри Поттером и Дэниелом Рэдклиффом. Этап нашей дружбы, когда мы были почти что близнецами, давно миновал.

Нечто похожее произошло с математикой и естествознанием.

Раньше, когда естествознание и математика были еще пухлыми младенцами, они не просто напоминали друг друга – между ними нельзя было провести границы. Исаака Ньютона нисколько не тревожило, кем назовут его историки – естественником или математиком. Он был тем и другим одновременно. То же самое можно сказать о его умных старших братьях – Галилее, Кеплере, Копернике. Для них естествознание и математика были взаимосвязаны и неотделимы друг от друга. Их ключевая идея состояла в том, что физический космос следует математическим рецептам. Вещи повинуются уравнениям. Вы не можете изучать одно без другого, точно так же как вы не можете съесть по отдельности ингредиенты пирога, если он уже выпечен.

С тех пор пути естествознания и математики разошлись. Взглянем хотя бы на то, как их преподают: отдельные кабинеты, разные учителя, разные учебники (хотя те и другие одинаково сбивают с толку). Они постройнели, нарастили мускулы и утратили наивность девятиклассников с широко распахнутыми глазами.

Но их до сих пор путают друг с другом. Любой дуралей может видеть, что я не Джон, а Джон не я. Но прохожие на улице затруднятся с ответом, если вы спросите, в чем заключается разница между математикой и естествознанием, особенно с точки зрения дилетанта.

Возможно, простейший способ провести границу между ними – ответить на вопрос, чем различаются математика и естествознание не для дилетанта, а друг для друга.

2. Посмотрим друг на друга

С точки зрения естествознания ответ прост. Оно видит в математике набор инструментов. Если естествознание – гольфист, то математика – кедди, помощник, который подает подходящую клюшку.

Эта точка зрения ставит математику в подчиненное положение. Ох, я ей сочувствую (хоть это мне несвойственно). Естествознание пытается осмыслить реальность, и это чертовски сложно, как вы знаете сами, если когда-нибудь имели дело с реальностью. Вещи рождаются. Вещи умирают. Их ископаемые остатки безумно разрозненны. Вещи демонстрируют качественно различное поведение в квантовом и релятивистском масштабе. Реальность – это кавардак.

Естествознание пытается понять реальность. Оно ставит своей целью предсказывать, классифицировать и объяснять. И в этом стремлении оно воспринимает математику в качестве жизненно важного помощника: Кью, изобретающий полезные гаджеты для очередного приключения Джеймса Бонда.

А теперь развернем камеру на 180° и сменим ракурс. Как математика воспринимает естествознание?

Вы обнаружите, что мы не просто поменяли угол зрения. Мы полностью сменили жанр фильма. Естествознание представляет себя главным героем боевика, а математика видит в себе директора экспериментального арт-проекта.

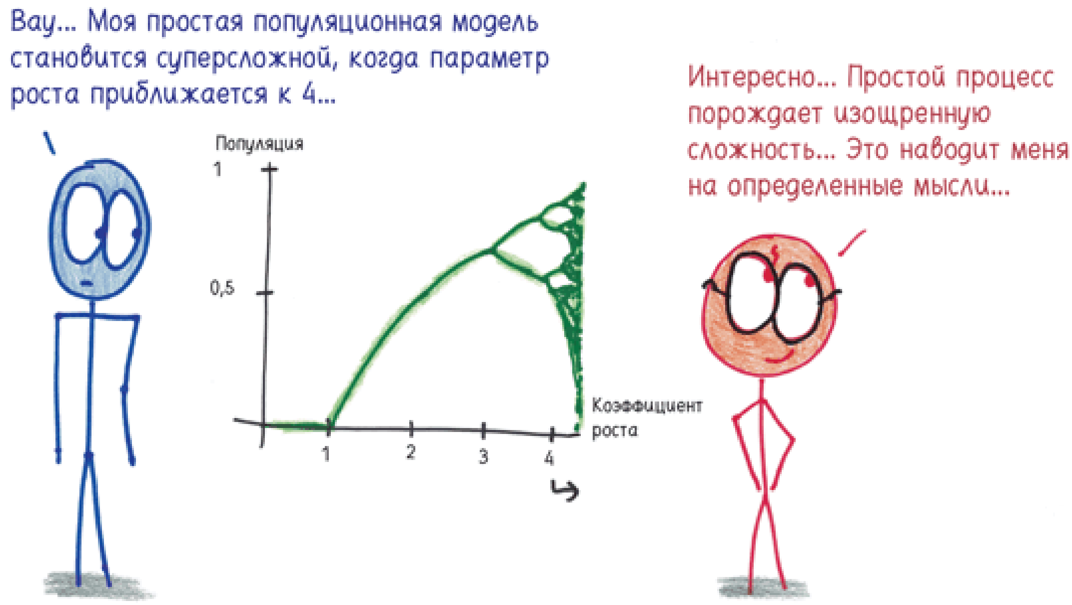
Причина в том, что на фундаментальном уровне математике нет дела до реальности.

Я не имею в виду странные привычки математиков: бормотать под нос, неделями носить одни и те же брюки, время от времени забывать, как зовут их супругу[24]. Я имею в виду их работу. Несмотря на агрессивную рекламную кампанию о практической пользе математики, она довольно безразлична к физической вселенной.

Математику волнуют не *вещи*, а *идеи*.

Математика устанавливает правила, а затем путем тщательных рассуждений прослеживает, что следует из этих правил. Кого волнует, что полученные выводы – о бесконечно длинных конусах и сардельках в 42 измерениях – не имеют отношения к реальности? Важна их абстрактная истинность. Математика живет не в материальной вселенной естествознания, а в концептуальной вселенной логики.

[24] Моя жена математик; мы в браке уже пять лет, но, кажется, она по-прежнему помнит, как меня зовут.



Математики называют такую работу творческой. Они сравнивают ее с искусством.

Естествознание становится их музой. Представьте себе композитора, который слушает щебет птиц и вплетает эту мелодию в свой новый опус. Или художника, которые созерцает кучевые облака, дрейфующие по полуденному небу, и на основе этого образа рисует свой новый пейзаж. Люди искусства не стремятся запечатлеть вещи с фотографической точностью. Реальность для них не более чем благодатный источник вдохновения.

Точно так же видит мир и математика. Реальность – прекрасная отправная точка, но самые поразительные цели лежат далеко за ее пределами.

3. Парадокс математики

Математика видит в себе мечтательную поэтессу. С точки зрения естествознания математика – это поставщик специальных технических инструментов. Здесь мы сталкиваемся с одним из величайших парадоксов человеческого познания: оба взгляда верны, но их с трудом можно примирить друг с другом. Если математика – это не более чем поставщик инструментов, почему эти инструменты настолько поэтичны? И если она поэтесса, почему ее поэзия так неожиданно полезна?

Чтобы понять, что я имею в виду, обратимся к запутанной истории теории узлов[25].

Эта отрасль математики, как и многие другие, была вдохновлена естественно-научной задачей. До открытия атомов некоторые ученые (включая лорда Кельвина) придерживались мнения, что вселенная наполнена субстанцией под названием «эфир», а материя создана из узлов и клубков эфира. Они стремились к тому, чтобы классифицировать все возможные узлы и создать периодическую таблицу клубков.

Вскоре физики утратили интерес к этой идее, поглощенные новой блестящей теорией атомов[26] (ее несправедливое преимущество заключалось в том, что она была верна[27]). Но математики уже попались на крючок. Они обнаружили, что классификация узлов – сладостная и дьявольская задача. Две разновидности одного и того же узла могли выглядеть совершенно по-разному. Абсолютно отличающиеся друг от друга узлы поражали своим сходством. Это было отличной подпиткой для математиков, которые скоро разработали сложную и исчерпывающую теорию узлов, будучи уверены, что их интеллектуальная абстракция не имеет никакого практического применения.

Прошло около ста лет.

И вот из укрытия выползла настоящая змея. Как вы знаете, каждая биологическая клетка содержит информацию в молекуле ДНК, которая фантастически длинна. Если выпрямить ДНК одной клетки вашего организма, она растянется почти на два метра. В 100 000 раз длиннее самой клетки.

ДНК – это длинная струна, упакованная в миниатюрный контейнер. Если вы когда-нибудь клали наушники в карман или вынимали новогоднюю гирлянду из картонной коробки, вы знаете, что их необходимо свернуть в клубок. Как это удается бактерии? Можем ли мы выучиться у бактерии такому трюку? Можем ли обезвредить раковую клетку, расплетая ее ДНК?

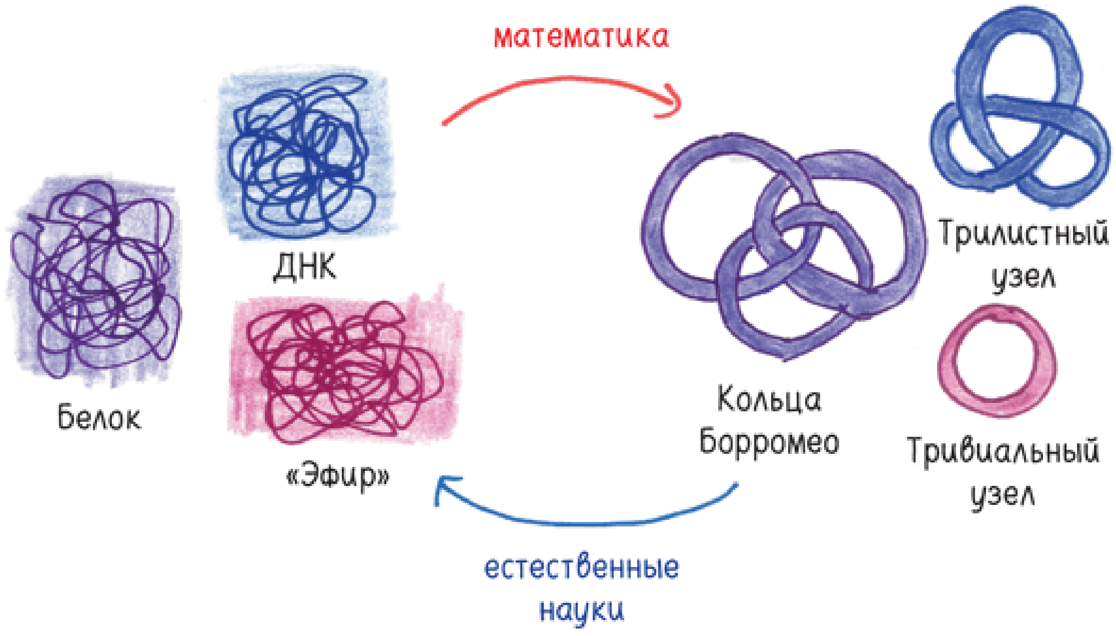
Биология была в недоумении. Ей требовалась помощь. «О! – воскликнула математика. – Я знаю одну штуку!»

---

[25] Подробнее: Matthey Parker, Things to Make and Do in the Fourth Dimension. – London: Penguin Random House, 2014. [Паркер М. Чем заняться в четвертом измерении? – М.: АСТ, 2020.]

[26] Планетарная модель атома, предложенная Эрнестом Резерфордом в 1911 году: электроны вращаются вокруг массивного ядра подобно тому, как планеты вращаются вокруг Солнца. – *Прим. пер.*

[27] Впрочем, вскорости оказалось, что и планетарная модель неверна, и она была заменена квантовой. – *Прим. науч. ред.*



Вот краткая биография теории узлов[28]. Она родилась из практических нужд. Вскоре она превратилась в нечто абсолютно оторванное от практики, логическую игру для поэтов и философов. А дальше каким-то образом это творение, которое на протяжении многих лет, казалось, не имело никакого отношения к реальной жизни, стало чрезвычайно полезным совершенно не в той области, ради которой оно родилось.

Это не единичный случай. Это обычная схема в истории математики.

Помните странную альтернативную геометрию, о которой шла речь в первой главе? На протяжении веков ученые рассматривали ее как фантазию, поэтическую прихоть. Они не видели соответствия с нашей реальностью, в которой, как предполагалось, действовал постулат Евклида о параллельных прямых.

Но в один прекрасный день на сцене появился молодой клерк из патентного бюро по фамилии Эйнштейн. Он понял, что безумная геометрия – не просто мысленный эксперимент; она определяет структуру космоса. С нашей ограниченной точки зрения, вселенная выглядит евклидовой, а шарообразная Земля – плоской. Но если изменить масштаб и отбросить предрассудки обитателя плоскости, откроется совершенно иная картина: переменчивый ландшафт поразительных изгибов[29].

«Бесполезная» геометрия становится чертовски полезной.

Мой любимый пример касается логики как таковой. Ранние философы вроде Аристотеля разработали логическую символику («если *p*, то *q*») как руководство научного мышления. Потом на нее покусились математические теоретики и превратили логику в нечто необычное и абстрактное. Реальность улетучилась. В XX веке люди вроде Бертрана Рассела сочиняли фоли-

---

[28] Подробности можно прочесть в книге: Сосинский А. Узлы. Хронология одной математической теории. – М.: МЦНМО, 2005 (http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/d63008f4-a780–11dc-945c-d34917fee0be/71_sosinskij_uzli.pdf). – *Прим. пер.*

[29] Я благодарен Мэтью Фрэнсису и Эндрю Стейси за помощь по этому вопросу. Я хотел написать, что Вселенная «гиперболическая» или «эллиптическая», а не «евклидова», но они сообщили мне, что в действительности она представляет собой труднопостигаемое лоскутное одеяло из этих более простых геометрий.Стейси написал: «Риманова геометрия обобщает евклидову во многих отношениях; она намного богаче евклидовой, но упускает из виду некоторые аспекты, в первую очередь то, как объекты соотносятся друг с другом в различных областях пространства». Это включает и понятие параллельных прямых.Фрэнсис добавил интересную историческую деталь: «В XIX веке Уильям Кингдон Клиффорд предложил использовать неевклидову геометрию, чтобы заменить физическое понятие силы, но он просто полагал, что “это было бы прикольно”. Меня не удивило бы, если другие тоже продумывали подобные идеи». Естественно, Эйнштейн тесно сотрудничал с математиками; ни один прорыв не происходит сам по себе.

анты с латинскими заголовками[30] с целью «доказать», исходя из элементарных предпосылок, что 1 + 1 = 2. Что может быть более бесполезным, более безнадежным?[31]

Одна мама пилила сына-логика: «Солнышко, к чему тебе вся эта абстрактная математика? Почему бы не заняться чем-нибудь полезным?»[32]

Маму звали Этель Тьюринг. Вскоре выяснилось, что ее сын Алан все-таки на что-то годен: он изобрел логическую машину, которую мы теперь называем «компьютер».

Я не могу винить ее за скептицизм. Кто бы мог подумать, что исследование логических систем, которое вел ее сын, определит облик нового столетия? Сколько примеров я ни узнавал, этот исторический цикл перехода полезного в бесполезное и снова в полезное остается для меня чудом и тайной.

Мое любимое описание этого феномена – чеканная фраза физика Юджина Вигнера: «Непостижимая эффективность математики»[33]. В конце концов, бактерии не знают теорию узлов, так почему они следуют ее законам? Пространственно-временной континуум не изучал гиперболическую геометрию, почему тогда ее теоремы выполняются так безупречно?

Я читал философов, которые пытались ответить на эти вопросы, но, на мой взгляд, их тезисы умозрительны и противоречивы, и никто из них не смог умерить мое изумление.

Итак, как лучше понять взаимоотношения между поэтессой, которую мы называем Математика, и искателем приключений, известным как Естествознание? Возможно, мы должны рассматривать их связь как симбиоз двух весьма разных существ. Например, птица, поедающая насекомых, примостилась на спине носорога. У носорога не зудит кожа. Птица удовлетворяет аппетит. И они оба счастливы.

Если вы захотите изобразить математику, нарисуйте изящное существо, оседлавшее серую морщинистую тушу.

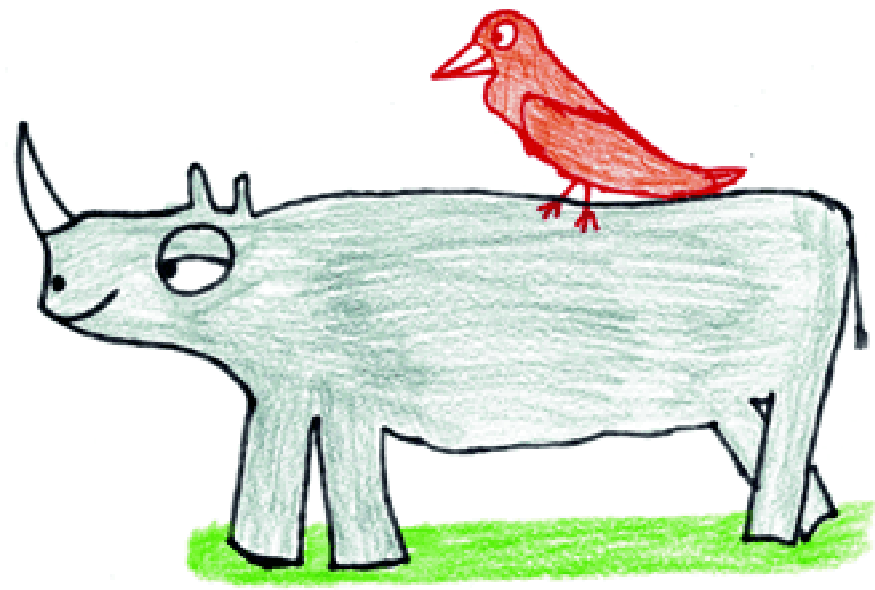
---

[30] Трехтомная монография *Principia Mathematica* выпущена в 1910–1913 годах издательством Кембриджского университета (Уайтхед А., Рассел Б. Основания математики: В 3 т. / Под ред. Г. П. Ярового, Ю. Н. Радаева. – Самара: Самарский университет, 2005–2006). – *Прим. пер.*

[31] Эта история изложена в графическом романе: Apostolos Doxiadis et al., *Logicomix: An Epic Search for Truth* (New York: Bloomsbury, 2009). [Доксиадис А., Пападимитриу Х. Логикомикс. Поиск истины. – М.: Карьера Пресс, 2019.]

[32] James Gleick, *The Information: A History, a Theory, a Flood* (New York: Knopf Doubleday, 2011). Блестящая книга. [Глейк Дж. Информация. История. Теория. Поток. – М.: Corpus, 2013.]

[33] Eugene Wigner, “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. Richard Courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University, May 11, 1959”, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13 (1960): 1–14. Сногсшибательное эссе. [Статья Юджина Вигнера «Непостижимая эффективность математики в естественных науках» в переводе В. А. Белоконя и В. А. Угарова была опубликована в журнале «Успехи физических наук» в 1968 году (Т. 94, С. 535–546; https://ufn.ru/ru/articleszf/). – *Прим. науч. ред.*]



Глава 5
Хороший математик против великого математика

Развенчивать мифы невероятно весело. Просто посмотрите на беззаботные взрывы смеха и улыбки до ушей ведущих телешоу «Разрушители легенд»[34], и вы увидите: это карьера с высокой степенью удовлетворенности от работы.

Гораздо сложнее вносить поправки в мифы. Многие преобладающие в культуре взгляды на математику не то чтобы ошибочны – они просто искажены, неполны или гиперболизированы. Важны ли вычисления? Конечно же, но ими дело не ограничивается. Уделяет ли математика внимание деталям? Да, равно как вязание и паркур. Был ли Карл Гаусс прирожденным гением? Ну да, но красивые доказательства в основном находят не депрессивные немецкие перфекционисты[35], а обычные люди вроде нас с вами.

Перед тем как завершить этот раздел, я дам еще одно, последнее объяснение того, как думают математики, – шанс провести ревизию и прокомментировать некоторые популярные мифы. Как большинство мифов, они опираются на правду. И, как большинство мифов, они пренебрегают сомнениями и пробуксовкой на пути к осмыслению, которое делает нас людьми – и математиками.

Пару лет назад, когда я жил в Англии, у меня был ученик по имени Кори. Он напоминал мне нежноголосого 12-летнего Бенджамина Франклина: молчаливый, проницательный, длинные рыжие волосы, круглые очки. Я легко мог представить, как он изобретает бифокальные линзы.

Кори вкладывал душу в каждое домашнее задание, находил ясные связи между темами и собирал свои тетрадки с такой тщательностью и терпением, что я всегда опасался, как бы он не опоздал на следующий урок. Неудивительно, что на первой большой контрольной в ноябре Кори расщелкал все задачи.

---

[34] MythBusters – научно-популярная телепередача на канале Discovery (2003–2016). – *Прим. пер.*

[35] Карл Фридрих Гаусс (1777–1855), которого называли королем математиков, погрузился в тяжелую депрессию, когда не смог довести до конца вычисления по теории возмущений орбиты астероида Паллада в начале XIX века. Это состояние усугубила смерть его жены и новорожденного сына. См.: Гиндикин С. Рассказы о физиках и математиках. – М.: МЦНМО, 2001 (https://www.mccme.ru/free-books/gindikin/contes.pdf). – *Прим. пер.*

Вернее, все задачи, на которые у него хватило времени.

Прозвенел звонок, но последняя четверть бланка ответов все еще была пуста. Он набрал чуть больше 70 баллов из 100 и явился ко мне на следующий день с нахмуренным лбом.

– Сэр, – сказал он (поскольку Англия – поразительная страна, где даже к нескладным 29-летним учителям обращаются с большим почтением), – почему время на решение контрольных ограничено?

Я полагаю, что честность – наилучшая политическая линия.

– Не потому, что скорость очень важна. Мы просто хотим удостовериться, что школьники могут справиться с контрольной сами, без посторонней помощи.

– Так почему нельзя работать после звонка?

– Ну, если бы я держал весь класс в заложниках весь день, другие учителя могли бы взбелениться. Они хотят, чтобы вы знали физику и географию, потому что ностальгически привязаны к реальности.

Я осознал, что никогда не видел Кори в таком состоянии: зубы сжаты, глаза потускнели. Всем своим видом он излучал разочарование.

– Я мог решить больше задачек, – сказал он. – У меня просто кончилось время.

– Я знаю, – кивнул я.

Больше нечего было сказать.

Намеренно или нет, школьная математика посылает громкий, четкий сигнал: «*Скорость – это всё*». Контрольные нужно решать быстро. Чем раньше сдашь контрольную, тем быстрее приступишь к домашней работе. Вы только посмотрите, как заканчиваются уроки – по звонку, как раунд извращенной принудительной викторины по логарифмам. Математика превращается в гонку, успех становится синонимом скорости.

Все это в высшей степени глупо.

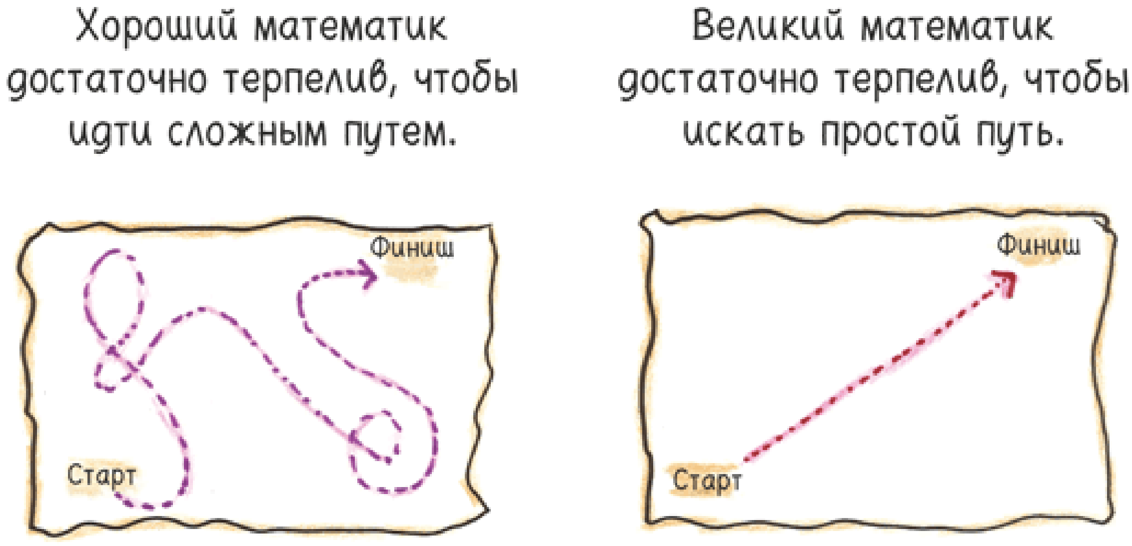
Скорость имеет одно баснословное преимущество: она экономит время. Но математика требует глубокого проникновения в суть поставленной задачи, подлинного понимания, элегантного подхода. Вы не достигнете ничего из вышеперечисленного, перемещаясь со скоростью 1000 км/ч. Вы лучше разберетесь в математике, если будете думать тщательно, а не на скорую руку, и вы лучше изучите ботанику, рассматривая каждую травинку, а не скача как одержимый через пшеничное поле.

Кори понимал это. Я уповаю только на то, что учителя наподобие меня[36] не пытались, вопреки нашим лучшим намерениям, переубедить его.

Моя жена, математик-исследователь, однажды указала мне на курьезный паттерн математической жизни.

- Шаг 1. В воздухе повис сложный и захватывающий вопрос, важная гипотеза нуждается в доказательстве. Многие пытаются приручить зверя, но безуспешно.
- Шаг 2. В конце концов кто-нибудь находит длинное и запутанное доказательство, оно чрезвычайно глубокое, но за мыслью сложно уследить.
- Шаг 3. Со временем публикуются новые доказательства, они становятся все короче и проще, пока в конце концов самое первое доказательство не приобретает статус артефакта: неэффективная лампочка Эдисона выходит из употребления, уступая место более современным и изящным инженерным решениям.

[36] Моим учителем в этой главе был Дэвид Кламп, чьи замечания сочетали эрудицию кого-то вроде Карла Сагана с мягкой человечностью кого-то вроде Карла Сагана (похоже, Дэвид и есть Карл Саган).



Почему эта траектория настолько распространена?

Конец ознакомительного фрагмента.