

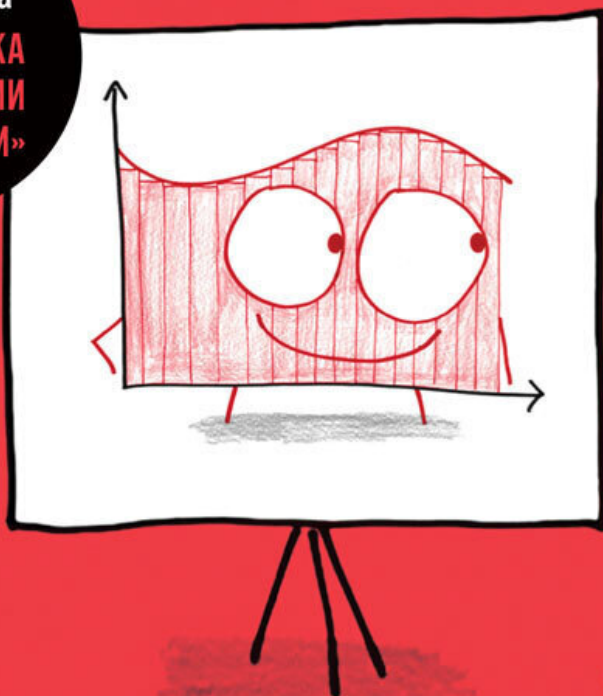
БЕН ОРЛИН

ВРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫХ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ в безумном мире

От автора
бестселлера

«МАТЕМАТИКА
С ДУРАЦКИМИ
РИСУНКАМИ»



МЯЕТСЯ $\frac{d \text{ МИР}}{dt}$
ТО И ТРЕБОВАЛОСЬ
ДОКАЗАТЬ



а = круче
всех Томов
АН = круче
всех Тимов
са = самое
и = крутое время

Бесконечно малые должны
охватывать суть интегрирования!



ТЕЛО ВРАЩЕНИЯ



$$f(x) = e^x$$

$$f^{-1}(x) =$$



$$\frac{\text{велоцирайтора}}{\delta t} = \text{Ускор}$$

ГОТФРИД СХОДИТ

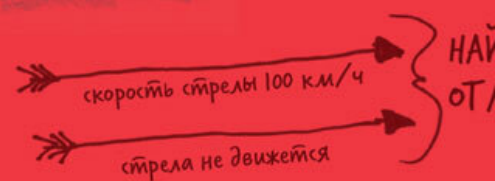
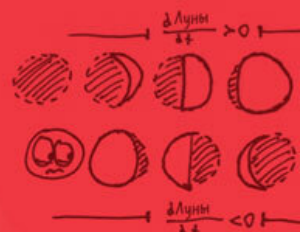


ОТ ЭТОГО С УМА

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} =$$

(Ряды Тейлора)

1. од
2. Бе
3. Го
4. Кр
5. 192
6. Рел



АНС АЛЬПИНА
НОН-ФИКШН

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Бен Орлин

**Время переменных.
Математический
анализ в безумном мире**

«Альпина Диджитал»

2019

УДК 517
ББК 22.161

Орлин Б.

Время переменных. Математический анализ в безумном мире /
Б. Орлин — «Альпина Диджитал», 2019

ISBN 978-5-00-139452-5

«Время переменных» – веселая книга о математике вокруг нас. Двадцать восемь увлекательных рассказов, посвященных разным аспектам математики, сопровождаются забавными авторскими рисунками. Математический анализ для Орлина – это универсальный язык, способный выразить все, с чем мы сталкиваемся каждый день, – любовь, риск, время и, самое главное, постоянные изменения. Тема движения времени находит отражение и в названиях частей книги – «Мгновения» и «Вечности», и в ее персонажах – от Шерлока Холмса до Марка Твена и Дэвида Фостера Уоллеса. С присущими ему юмором и изобретательностью Орлин выявляет связи между математикой, искусством, литературой и любимой собакой по имени Элвис. Автор нашумевшей «Математики с дурацкими рисунками» и в этой книге ставит своей целью не просто увлечь читателя любимым предметом, но сделать нас более мудрыми и вдумчивыми.

УДК 517
ББК 22.161

ISBN 978-5-00-139452-5

© Орлин Б., 2019
© Альпина Диджитал, 2019

Содержание

Введение	7
Мгновения	11
I	12
II	21
III	30
Конец ознакомительного фрагмента.	37

Бен Орлин

Время переменных. Математический анализ в безумном мире

Переводчик *Виктория Краснянская*
Научный редактор *Константин Кноп*
Редактор *Антон Никольский*
Издатель *П. Подкосов*
Руководитель проекта *А. Шувалова*
Арт-директор *Ю. Буга*
Корректоры *М. Миловидова, И. Панкова*
Компьютерная верстка *А. Фоминов*

© 2019 by Ben Orlin

© 2019 by Hachette Book Group, Inc.

© Издание на русском языке, перевод, оформление. ООО «Альпина нон-фикшн», 2021

Все права защищены. Данная электронная книга предназначена исключительно для частного использования в личных (некоммерческих) целях. Электронная книга, ее части, фрагменты и элементы, включая текст, изображения и иное, не подлежат копированию и любому другому использованию без разрешения правообладателя. В частности, запрещено такое использование, в результате которого электронная книга, ее часть, фрагмент или элемент станут доступными ограниченному или неопределенному кругу лиц, в том числе посредством сети интернет, независимо от того, будет предоставляться доступ за плату или безвозмездно.

Копирование, воспроизведение и иное использование электронной книги, ее частей, фрагментов и элементов, выходящее за пределы частного использования в личных (некоммерческих) целях, без согласия правообладателя является незаконным и влечет уголовную, административную и гражданскую ответственность.



ВСЕМ СТУДЕНТАМ И ПРЕПОДАВАТЕЛЯМ ТЕХ ШКОЛ, КОТОРЫЕ СТАЛИ МНЕ ДОМОМ



Последовало молчание. Через какое-то время он спросил:

– Как ты пришла к этим мыслям о Боге?

– Я искала Бога, – ответила я. – Мне не нужна была мифология, мистика или магия. Я не знала, существует ли Бог на самом деле, но хотела узнать. Бог должен быть силой, которую не может отрицать никто и ничто.

– Чтобы совершать изменения?

– Да, изменения.

– Но это не Бог. Это не человек, не интеллект и даже не вещь. Это просто... Я даже не знаю. Идея.

Я улыбнулась. Было ли это критическое замечание таким ужасным?

ОКТАВИЯ БАТЛЕР.

ПРИТЧА О СЕЯТЕЛЕ

Введение

Какой-то миллион дней назад философ Парменид спрашивал: «Что это – несозданное и неразрушимое, единственное, завершённое, неподвижное и бесконечное?» Это философия чистой воды. Парменид не признавал никакого разделения, никаких отличий, ни будущего, ни прошлого. «У Бытия нет ни прошлого, ни будущего, – объяснял он, – оно есть чистое настоящее, непрерывное и непрекращающееся». Для Парменида Вселенная была чем-то вроде транспортного потока в Лос-Анджелесе: вечной, единственной в своем роде и неизменной.



Миллион дней спустя эта идея продолжает выглядеть очень глупой.

Да ладно тебе, Парменид! Ты можешь убаюкивать нас стихами и засыпать прилагательным, но мы не так легковёрны. Миллион дней назад не было ни буддистов, ни христиан, ни мусульман, потому что ни Будда, ни Иисус, ни Магомет еще не родились. Миллион дней назад итальянцы не ели томатный соус, потому что современной Италии¹ не существовало, а ближайшее место, где росли помидоры, было в десяти тысячах километров. Миллион дней назад по Земле ходило 50 или 100 миллионов человек; сегодня такое количество людей каждый год посещает тематические парки Диснея.

На самом деле, Парменид, миллион дней назад теми же самыми, что и сегодня, были только две вещи: (1) вездесущность изменений и (2) глубокомысленная и безнадежная неправильность твоей философии.

Парменид в последний раз упоминается в этой книге (хотя его преданный ученик Зенон еще появится позже). «Счастливое избавление от одетых в тоги неудачников», – сказал бы я. А теперь мы перенесемся через время, минуя более мудрого современника Парменида, Гераклита («нельзя войти в одну реку дважды»), чтобы оказаться в конце XVII в., каких-то 120 000 или 130 000 дней назад. Именно тогда ученый по имени Исаак Ньютон и энциклопедист Гот-

¹ Имеется в виду, безусловно, государство в нынешних границах. Впрочем, названия «Италия» тогда еще тоже не существовало – оно появилось на пару столетий позднее. – *Прим. науч. ред.*

фрид Лейбниц дали жизнь главному действующему лицу этой книги. Это был новый математический язык, язык изменений, попытка количественно оценить те движения и процессы, которые постоянно происходят вокруг нас на Земле.

Сегодня мы называем такую математику «математическим анализом».

Первый инструмент математического анализа – **производная**. Это мгновенный показатель изменения, демонстрирующий нам, как что-то развивается в определенный момент времени. Возьмите, к примеру, точную скорость яблока в то мгновение, когда оно ударило Ньютона по макушке. За секунду до этого фрукт двигался чуть-чуть медленнее, а секундой позже он направился совершенно в другую сторону, как и история всей физики. Но производную не заботит, что было секундой раньше или секундой позже. Она указывает только на *этот момент*, на бесконечно малый отрезок времени.

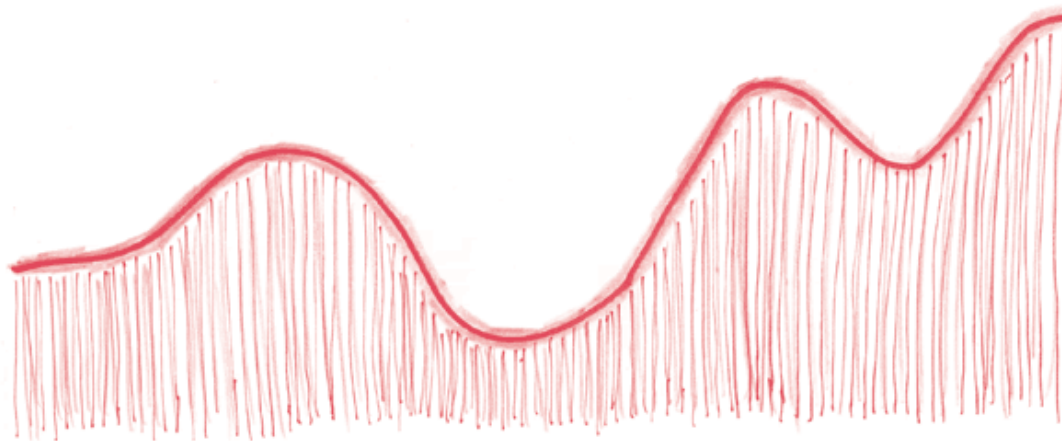


Второй инструмент математического анализа – **интеграл**. Это сумма бесконечных кусочков времени, каждый из которых чрезвычайно мал. Интеграл показывает, как можно объединить ряд дисков, каждый из которых по толщине напоминает самую тонкую пленку, так, чтобы создать твердое тело – сферу. Или как группа людей, крошечных и ничтожных, как атомы, может собраться вместе и создать целую цивилизацию. Или как ряд моментов, каждый из которых сам по себе продолжается ноль секунд, может составить час, столетие, вечность.

Каждый интеграл говорит о всей совокупности целиком, о галактических масштабах, которые каким-то образом могут попасть в панорамные объективы нашей математики.

Производная и интеграл имеют заслуженную репутацию как специализированные математические инструменты. Но я считаю, что они могут дать нам больше. Мы с вами словно крошечные суденышки, которые несет по волнам, захватывает в водовороты и бросает на скалы.

Производная и интеграл, как я утверждаю, – это карманные философские системы, раздвижные весла для того, чтобы проложить путь через выходящую из берегов мировую реку.



Таким образом, эта книга является попыткой извлечь мудрость из математики.

В первой части – «Мгновения» – мы узнаем истории о производных. Каждая из них выхватывает момент из журчащего потока времени. Мы рассмотрим миллиметр лунной орбиты, крошку намазанного маслом бутерброда, беспорядочное движение пылинки и молниеносные решения, которые принимает собака. Если сравнить производную с микроскопом, то каждая из этих историй – тщательно выбранное изображение на предметном стекле, явление в миниатюре.

Во второй части – «Вечности» – мы обратимся к интегралу и его способности объединять бесконечно малые частицы в единый поток. Мы будем иметь дело с кругом, состоящим из крошечных частичек, с армией из несметного количества солдат, линией горизонта, образованной неотличимыми друг от друга строениями, и космосом, наполненным миллиардами триллионов звезд. Если уподобить интеграл кинотеатру, то каждая из этих историй – широко-масштабная эпическая поэма, которую вы *должны* смотреть в кино. Телевизора здесь будет недостаточно.



Я хочу сразу разъяснить, что книга, которую вы держите в руках, не научит вас математическому анализу. Это не структурированный учебник, а многоликий и скромно иллюстрированный «сборник фольклора», написанный обычным, не специальным языком для широкого круга читателей. Возможно, вы совершенно не знакомы с математическим анализом, а, может быть, плотно им занимаетесь, но я надеюсь, что эти истории в любом случае позабавят вас и станут небольшим откровением.

Эту книгу никоим образом нельзя считать законченной: в ней нет историй об искривлении света Ферма, тайной анаграмме Ньютона, невозможных функциях Дирака и многом другом. Но в постоянно меняющемся мире никакое сочинение не может быть исчерпывающим, никакая мифология не заканчивается. Река всегда течет и меняется.

*БЕН ОРЛИН,
ДЕКАБРЬ 2018 Г.*

*Момент перемен – это единственная поэма.
АДРИЕННА РИЧ*

Мгновения



МГНОВЕНИЕ I

Время требует еще одной жертвы

I

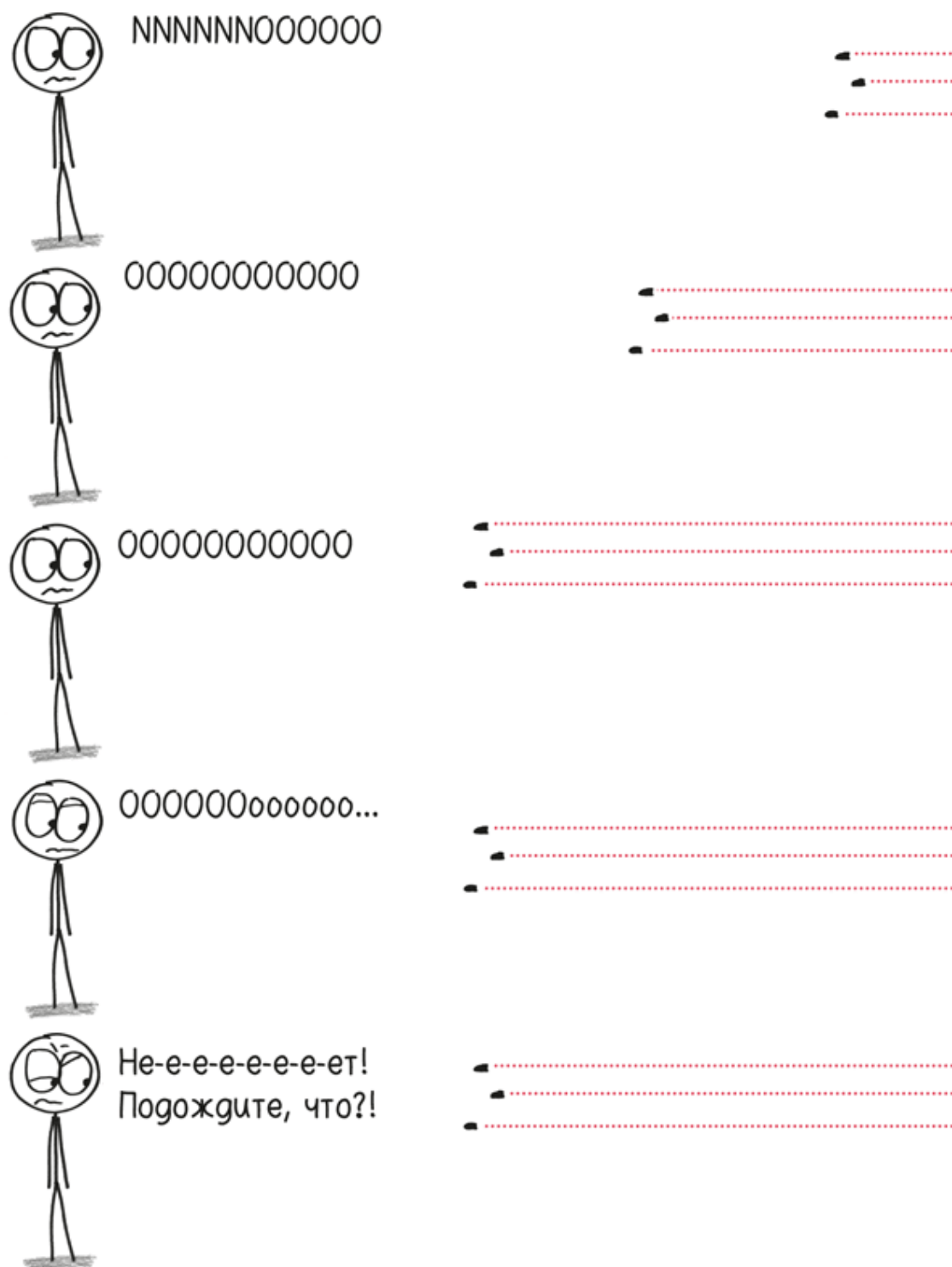
Мимолетное вещество времени

Яромир Хладик написал несколько книг, но они не принесли ему удовлетворения. В одной он видел «всего лишь прилежание»². Другую характеризовали «небрежность, вялость, неточность». Третья пыталась доказать несостоятельность ошибочной идеи, но делала это с помощью «не менее ложных доказательств». Я сам давал жизнь лишь книгам, безупречным и сверкающим не более, чем рекламные ролики зубной пасты, но все же могу глубоко ему посочувствовать, особенно небольшому лицемерию, которое помогало Хладиду в повседневной жизни. «Подобно всякому писателю, – говорит Хорхе Луис Борхес, – он судил о других по их произведениям, но хотел, чтобы о нем судили по замыслам».

А что же было в планах у Хладика? О, Хладик рад, что вы спросили! Он пишет драму в стихах «Враги», и ей предстоит стать никак не меньше, чем шедевром. Она войдет в его наследие, усмирит его шурина и даже вернет «фундаментальный смысл бытия». Но только если ему удастся преодолеть небольшое препятствие – ну знаете, написать ее.

Здесь я хочу извиниться перед читателями, потому что история принимает мрачный оборот. Хладика – еврея в захваченной фашистами Праге – арестовывает гестапо. За судом на скорую руку следует смертный приговор. Накануне казни герой обращается к Богу:

² Здесь и далее цит. по: Борхес Х. Л. Вымышленные истории / Пер. В. С. Кулагиной-Ярцевой. – М.: Амфора, 1999. – С. 178–188.



Если я не одна из Твоих ошибок и повторений, если я существую на самом деле, то существую лишь как автор «Врагов». Чтобы закончить драму, которая будет оправданием мне и Тебе, прошу еще год. Ты, кто владеет временем и вечностью, дай мне этот год!

Проходит бессонная ночь, наступает рассвет – время казни – и, когда сержант уже отдает последний приказ расстрельной команде, когда Хладик замирает в преддверии смерти, когда кажется, что все уже безвозвратно потеряно... Вселенная застывает.

Господь даровал Хладиду тайное чудо. Это единственное мгновение с каплей, скатывающейся по его щеке, и смертоносными пулями, повисшими в воздухе, увеличилось, растяну-

лось, расширилось. Мир остановился, но мысли героя нет. Теперь Хладик может закончить свою драму, составляя и доводя до совершенства строки в своем сознании. Этот момент будет длиться год.

Сейчас, на переломе судьбы, которой никто не мог бы позавидовать, Хладик получает подарок, способный стать предметом зависти любого.

«Цель каждого художника, – однажды написал Фолкнер, – художественными средствами остановить [на картине] течение самой жизни и закрепить его». (Разумеется, сам Хладик является плодом фантазии писателя Хорхе Луиса Борхеса.) «*Tempus fugit*», – писал Исаак Ньютон, что означает: время бежит. «*Tempus fugit*, – заявляли средневековые солнечные часы, – время бежит». Хотя наши цели различаются, все мы – художники, ученые и даже те болтливые невежды, которых мы зовем «философами», – охотимся за одним и тем же невероятным призом. Мы хотим поймать время, удержать в руках мгновение так, как это сделал Хладик.



стрела в один момент



стрела в другой момент



стрела еще в один момент

Так когда же стрела двинется?

Увы, время уклоняется и ускользает. Вспомните знаменитый «парадокс стрелы» от неистового греческого тролля Зенона Элейского.

Идея: представьте себе стрелу, летящую в воздухе. Теперь мысленно остановите ее, как это произошло при расстреле Хладика. Стрела по-прежнему движется? Нет, конечно, нет – стоп-кадр по определению является застывшим. В любой отдельно взятый момент стрела неподвижна. Но если время состоит из моментов, а ни в один момент стрела не движется... тогда как же она может двигаться?

Философы в Древнем Китае играли в подобные игры разума. «То, что не поддается измерению, не может быть собрано в целое, – писал один из них. – Оно имеет размер в тысячу километров». В математическом смысле мгновение *не имеет измерений*. Оно не обладает ни длиной, ни протяженностью. Оно длится ноль секунд. Но, поскольку ноль, умноженный на ноль, равен нулю, два мгновения также составляют нулевое время. Это же относится и к десяти

мгновениям, и к тысяче, и к миллиону. Получается, что любое исчисляемое количество мгновений будет в целом продолжаться ноль секунд.

Однако если никакое количество мгновений никогда не складывается ни в какое время, то откуда взялись месяцы, годы и матчи по крикету? Как стремящиеся к нулю мгновения составляют бесконечную временную линию?

Вирджиния Вульф отмечала, что время «заставляет растения и животных расцветать и увядать с потрясающей пунктуальностью». Но «не оказывает такого простого эффекта на сознание человека. Более того, его разум работает с одинаковой странностью, независимо от того, в каком времени находится тело».



ПРОДОЛЖИ- ТЕЛЬНОСТЬ	СЕКУНДЫ	ЗНАЧЕНИЕ
1 минута	60	Самый длинный зарегистрированный промежуток между выходами фильмов о супергероях
1 секунда	A-a-a-апчхи... 1	Продолжительность чихания, или 0,1% килочиха
1 миллисекунда	$\frac{1}{1000}$	Средний промежуток времени, в течение которого человек может удерживать внимание
1 микросекунда	$\frac{1}{1\,000\,000}$	Продолжительность времени, после которого скачивание видео становится невыносимым
1 наносекунда	$\frac{1}{1\,000\,000\,000}$	Время, которое требуется собаке, чтобы решить: она мне не доверяет
1 планковское время	$\frac{1}{10^{43}}$	Время, за которое я теряю нить рассуждений, когда физики обсуждают квантовые эффекты, такие как планковское время
1 момент	Нуль	?!?!?!?!?!?!?!?!?!?

Мы охотимся за моментами истории, уродуя время. С помощью песочных часов и размеченных свечей мы поделили день на часы. С помощью маятников и передаточных механизмов разбили часы на минуты (слово «минута» означает «малая» [часть часа]) и после этого – на секунды (более мелкая единица второго порядка, мельчайшая часть минуты). Далее мы разложили время на миллисекунды (половина взмаха крыльев мухи), микросекунды (яркий проблеск стробоскопа) и наносекунды (за каждую из которых свет совершает путешествие на 30 сантиметров), не говоря уж о пико-, фемто-, атто-, зепто- и йоктосекундах. Затем поток названий истошился, предположительно потому, что у доктора Сьюза кончились идеи, но мы продолжаем «мельчить» время. В конце концов вечность распадается на единицы планковского времени, составляющие примерно одну миллиардную триллионной доли йоктосекунды, или

1

количество времени, необходимое для того, чтобы свет прошел 100 000 000 000 000 000 000 000 пути через протон. Ни один инструмент не может выйти за пределы этой максимальной краткости: физики настаивают, что это наименьшая значимая единица времени, насколько мы можем его понимать (или, как я, не понимать).

Где же, где же ты, мгновение? Где-то за планковским временем? Если мы не можем ни собрать моменты в интервалы, ни разбить интервалы на моменты, так чем же тогда являются эти невидимые, неделимые вещи? Пока я пишу книгу в обычном мире бегущего времени, в каком же искривляющемся немире создает свое произведение Хладик?

В XI в. математики впервые нащупали ответ на этот вопрос. В то время как европейские мудрецы рвали на себе волосы, пытаясь рассчитать дату Пасхи, индийские астрономы занимались предсказанием солнечных затмений. Им требовалась ювелирная точность. Астрономы начали членить единицы времени так давно, что прошло почти 1000 лет, прежде чем появились какие-то приборы, которые могли бы их измерить. Одна *трути* равна менее чем 1/30 000 секунды.

Эти бесконечно малые частицы времени проложили дорогу к понятию, которое называется *таткалика-гати* – мгновенное движение. Как быстро и в каком направлении движется Луна в данный конкретный момент?

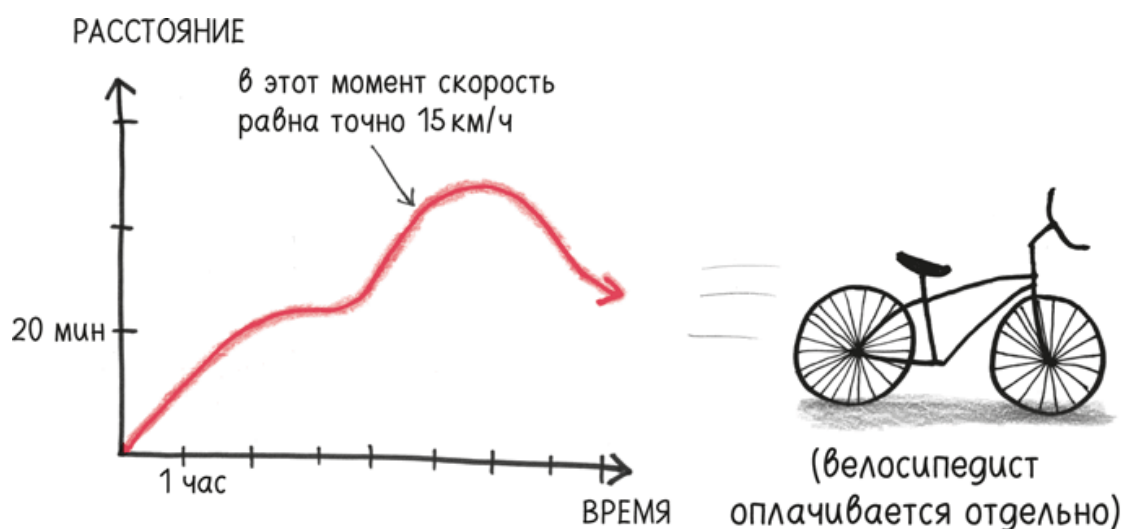
А что насчет *этого* момента?

А как *сейчас*?

А *сейчас*?

В наши дни *таткалика-гати* известна под более скучным названием – производная.

Возьмем движущийся велосипед. Производная измеряет, как быстро изменяется его положение, то есть скорость велосипеда в отдельно взятый момент. На графике внизу это отражается в кривизне линии. Более крутая кривая указывает на более быстрый велосипед и, таким образом, большую производную.



Конечно, в любой отдельно взятый момент велосипед, как и стрела Зенона, неподвижен. Таким образом, мы не можем рассчитать производную в застывшем кадре. Вместо этого мы работаем с помощью сокращения интервала. Во-первых, определим скорость велосипеда в десятисекундный интервал, затем попробуем интервал в одну секунду, затем – 0,1 секунды, 0,01 и 0,001...

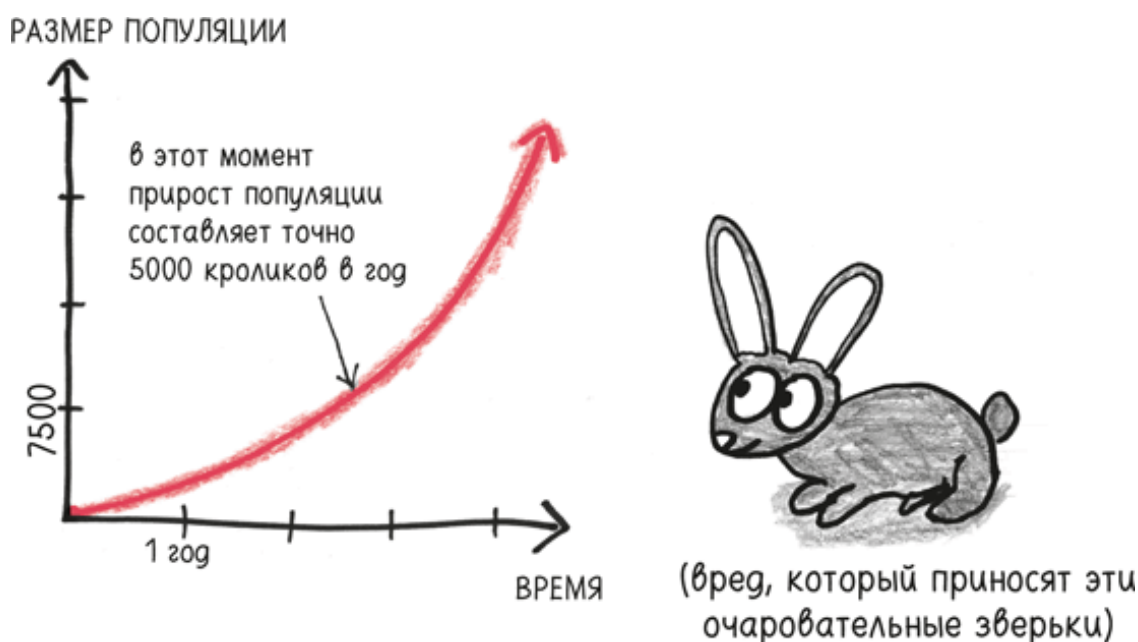
Таким хитрым способом мы незаметно подкрадываемся к мгновению, подступаем все ближе, ближе и ближе, пока рисунок не проступает совершенно явственно.

НАЧАЛО	КОНЕЦ	СКОРОСТЬ
12:00:00	12:00:10	39 км/ч
12:00:00	12:00:01	39,91 км/ч
12:00:00	12:00:00.1	39,98 км/ч
12:00:00	12:00:00.01	39,997 км/ч
И точно в полдень		40 км/ч

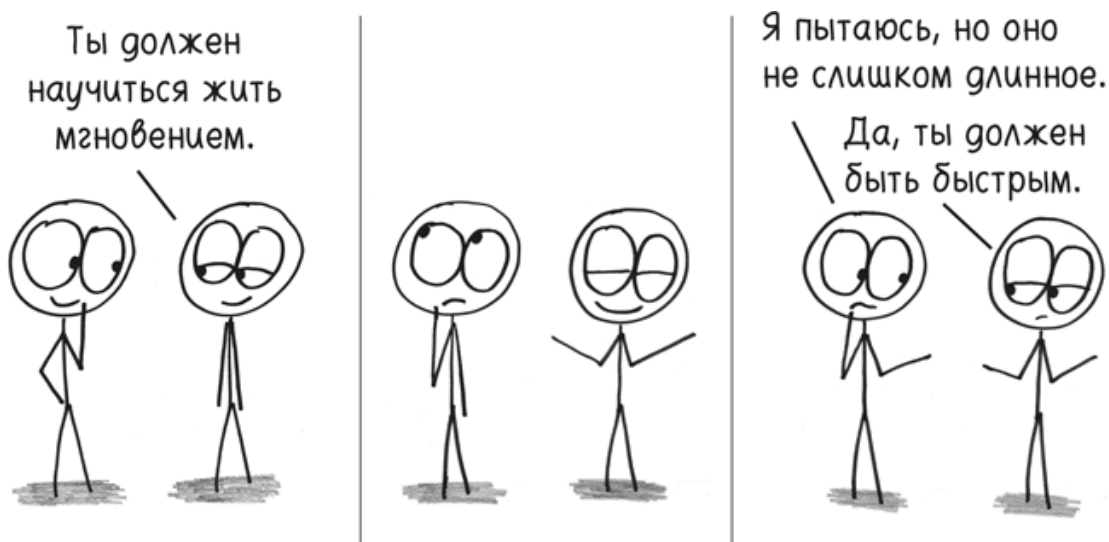
Для другого примера возьмем реакцию синтеза, когда два элемента соединяют свои молекулы, чтобы создать новый химический элемент. Производная измеряет, как быстро растет концентрация вещества, то есть скорость реакции в отдельно взятый момент.



Или представим себе остров, переполненный кроликами. Производная измеряет, насколько быстро меняется размер популяции, то есть скорость ее роста в данный конкретный момент. (Для этого графика мы должны на непродолжительное время принять выдумку о «дробных кроликах», но если ваша вера в невероятное зашла столь далеко, то, я уверен, вы справитесь с любой задачей.)



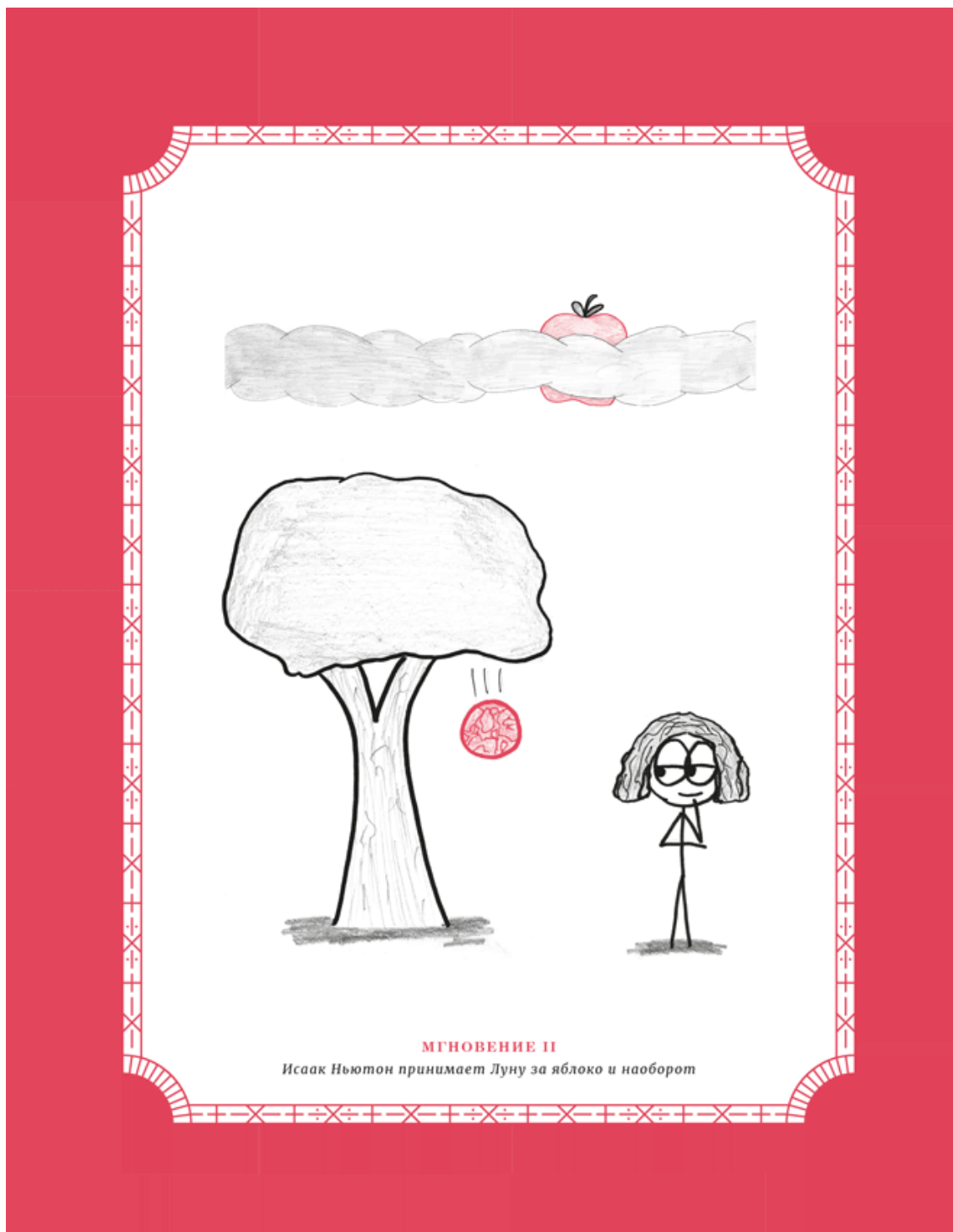
Этот «хлеб с маслом» всех математиков странным образом похож на поэтическую фантазию. Производная — «мгновенное изменение», она захватывает движение в отдельный момент, как будто ловит молнию в бутылку. Это отрицание Зенона, который сказал, что в отдельно взятое мгновение ничего случиться не может, и оправдание Хладика, который верил, что за один момент может произойти все что угодно.



Теперь, вероятно, вы можете себе представить, как закончилась история Хладика. 12 месяцев он сочинял свою пьесу. «Он трудился не для потомства, – говорит Борхес, – даже не для Бога, чьи литературные вкусы были ему неведомы». Он писал для себя. Он работал, чтобы удовлетворить то, что Томас Вулф считал вечной жаждой художника:

...Навечно закрепить в нерушимых структурах единственный момент человеческого бытия, единственный момент красоты жизни, страсти и неопишемого красноречия, который проходит, загорается и гаснет, всегда просачиваясь сквозь наши пальцы с течением песчинок времени, навсегда ускользающих от нашей отчаянной хватки, ибо река течет и удержать ничего нельзя.

Хладик удержал реку. Не имеет никакого значения, что «Врагов» никто никогда не прочтет или что пули через краткий промежуток времени возобновят свой путь. Важно только то, что он дописал книгу, которая теперь будет существовать всегда, в этот единственный момент, который сам по себе является вечностью.



II Вечно падающая Луна

Исаак Ньютон был любопытным ребенком. Здесь под «любопытным» я подразумеваю «жадным до знаний», а также «очень странным». В одной из историй говорится, что чтение так захватывало юного гения, что его домашняя кошка растолстела, подъедая нетронутые завтраки, обеды и ужины. Или вспомните о том, как он впервые провел исследование по оптике. Встречали ли вы когда-нибудь настолько любопытного ребенка, чтобы он рискнул своим зрением ради проблеска истины? В своем дневнике Ньютон писал: «Я брал шпильку [палочку с

тупым концом] и вдавливал ее между глазом и костью, как можно ближе к боковой части глаза. Нажатие... приводило к появлению нескольких светлых, темных и цветных кругов».

Ага! Небольшая боль от этого
фрукта подтолкнула меня
к великопному прозрению!



МИФ

ЗАЧЕМ ТЫ СУЕШЬ ЭТУ
ШТУКУ СЕБЕ В ГЛАЗ?



Да
не волнуйся,
мама, это же
наука!

РЕАЛЬНОСТЬ

Жаль, но сегодня мы редко вспоминаем Ньютона как калечащего самого себя владельца тучной домашней кошки. Вместо этого мы помним его как гения, которому на голову упало яблоко.

На самом деле сила воздействия фрукта на его мозг преувеличена. Как рассказывал сам сэр Исаак Ньютон, все, что потребовалось для того, чтобы часы его разума совершили историческое движение, – это быстро промелькнувшее перед глазами падающее яблоко. «Сидя в саду в одиночестве, – вспоминал Генри Пембертон, друг Ньютона, – он начал размышлять о силе тяготения». Падение яблока навело ученого на мысль о том, что, как бы высоко мы ни поднялись – на крышу, на вершину дерева или горы, – притяжение не исчезает. Оно, перефразируя слова Альберта Эйнштейна, является «жутким действием на расстоянии». Вещество Земли, кажется, притягивает вещество других тел, независимо от того, как далеко они находятся.

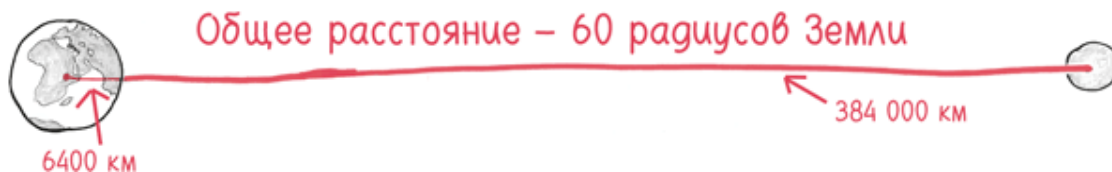
Любопытный молодой человек пошел дальше. (На этот раз никаких булавок, только размышления.) Что, если притяжение простирается дальше вершин гор? Что, если его сила действует гораздо дальше, чем мы можем предположить?

Что, если она достигает Луны?

Аристотель никогда не верил в это. Звезды выстраиваются в идеальный порядок, словно ноты в музыкальной симфонии или родственники моей жены, организующие торжественный обед. Жизнь на Земле – анархия, источник беспорядка, как я, когда устраиваю ужин для друзей. Как эти два королевства могут следовать одним и тем же законам? Какой сумасшедший, пытавшийся выколоть себе глаза, решится объединить земное и небесное?

Весной 1666 г. этот сумасшедший 23 лет от роду отдыхал в тенистом саду своей матери. Он увидел, как падает яблоко, а затем, в порыве вдохновения, представил еще одно падающее яблоко, на этот раз на том расстоянии, где находится Луна. Один маленький шаг для Apple, гигантский скачок для фрукта.

Ньютон приблизительно представлял, о каком расстоянии идет речь: если взять за единицу расстояние от поверхности Земли до ее центра, то Луна находится примерно в 60 таких единицах.



Как может вести себя притяжение при таком огромном удалении?

Даже самые высокие горы не предлагают никакой подсказки. В масштабах космоса, по сравнению с Луной, вершина Эвереста, считай, что вовсе не удалена от поверхности Земли – так, выступает над ней на толщину волоска... Но давайте предположим – с помощью грандиозного и слегка нарушающего ход истории «скачка», – что притяжение ослабевает на больших расстояниях. Чем больше вы удаляетесь, тем слабее его сила. Сейчас я ссылаюсь на знаменитый закон обратного квадрата Ньютона.

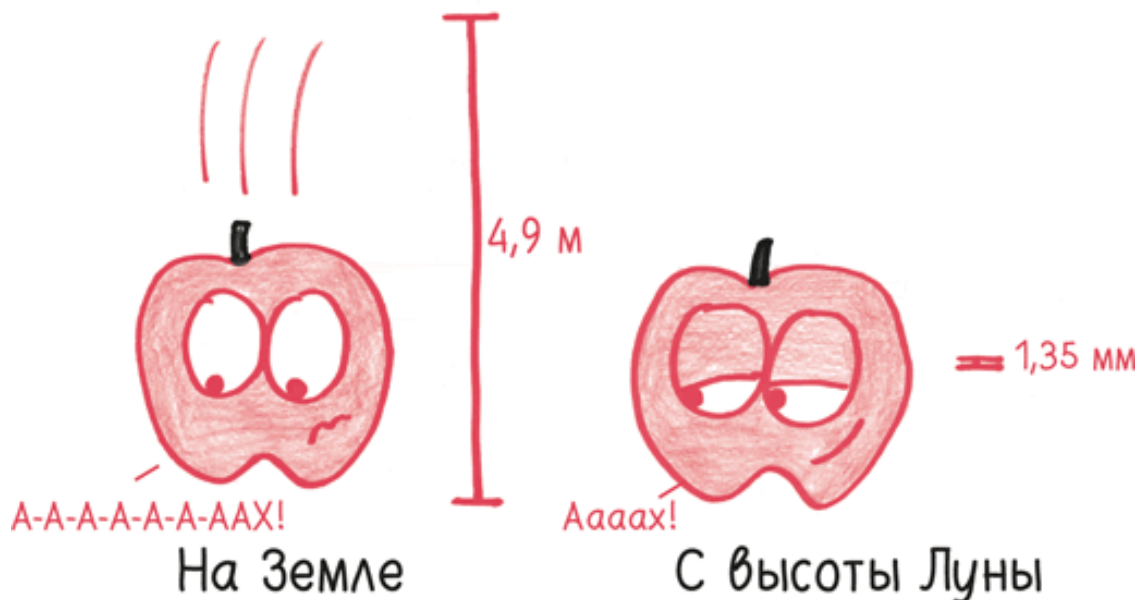
Если расстояние увеличивается вдвое, то сила притяжения составляет $1/4$.

Если возрастает втрое – $1/9$.

При десятикратном увеличении – всего $1/1000$.

Наше великолепное яблоко, путешествующее по космосу, оказавшись в 60 раз дальше от ядра Земли по сравнению со своими висящими на яблоне братьями и сестрами, подвергнется всего $1/3600$ силы притяжения. Если вы никогда не делили на 3600, позвольте мне сообщить: этот процесс делает вещи намного меньше.

Бросьте яблоко у поверхности Земли, и за первую секунду оно упадет на 4,9 м. Это примерно уровень второго этажа здания.



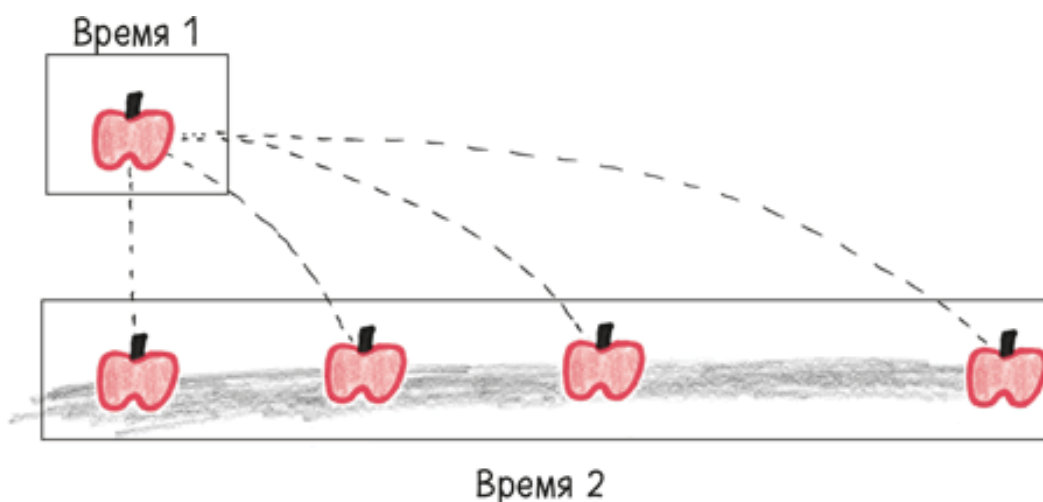
Бросьте «астрояблоко» с высоты, на которой находится Луна, и за первую секунду оно переместится чуть больше чем на один миллиметр. Это толщина прекрасной во всех отношениях кредитной карты.

В те времена движение Луны по орбите оставалось тайной. Считалось, что лучше всего его объясняет вихревая теория Рене Декарта, согласно которой все небесные объекты следуют своими маршрутами благодаря кружащимся, как в водовороте, потокам частиц, словно игрушки в ванне, устремляющиеся к сливу, когда из него вынимают пробку. Но наступило

время перемен – *annus mirabilis* Ньютона, его «чудесный год», который «чудесным» же образом растянулся на 18 месяцев. Переживая в Вултсорпе, у матери, эпидемию чумы, свирепствовавшей в Лондоне, Ньютон разработал идеи, которые легли в основу современной математики и физики. Он сформулировал законы движения, раскрыл оптические секреты призмы, не забывал обращать внимание на предметы быта и изобрел математический анализ.

А заодно, благодаря падению яблока, сверг с пьедестала вихри Декарта.

Как знал предшественник и брат Ньютона по духу Галилей, горизонтальное движение не влияет на вертикальное. Оставьте одно яблоко падать строго вертикально, а другое точно такое же яблоко киньте горизонтально в любую сторону, и они ударятся о землю в один и тот же момент. Разумеется, их горизонтальные траектории разойдутся, но вертикальное движение определяется одной и той же единовластной силой – притяжением.

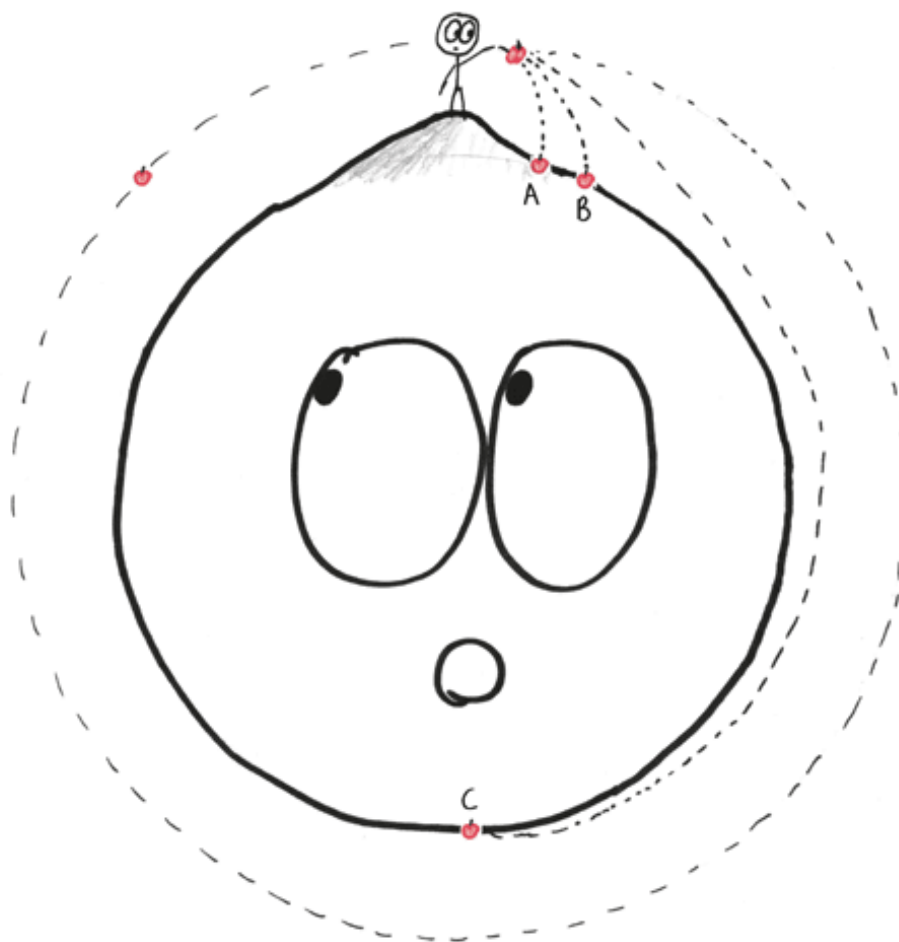


Теперь поднимите свои яблоки на вершину очень высокой горы и бросьте их с силой супермена. Поздравляю! Вы попали в знаменитую иллюстрацию из шедевра Ньютона «Математические начала натуральной философии», демонстрирующую диковинные физические процессы падения с большой скоростью.

Здесь благодаря искривлению земной поверхности наше аккуратное разделение вертикального и горизонтального движения исчезает. То, что в один момент является горизонтальным, в другой становится вертикальным. Чем сильнее бросок, тем дольше продолжается падение.

Бросьте яблоко с силой, как это делает питчер Высшей бейсбольной лиги, и оно пролетит небольшое расстояние, прежде чем упасть на землю. Оно может добраться из точки А в точку В.

Бросьте яблоко *по-настоящему* сильно, как питчер «Ред Сокс» в сторону наглого игрока «Янкиз», и горизонтальное движение уведет фрукт от поверхности Земли, продлив падение. Возможно, он проделает весь путь до точки С.



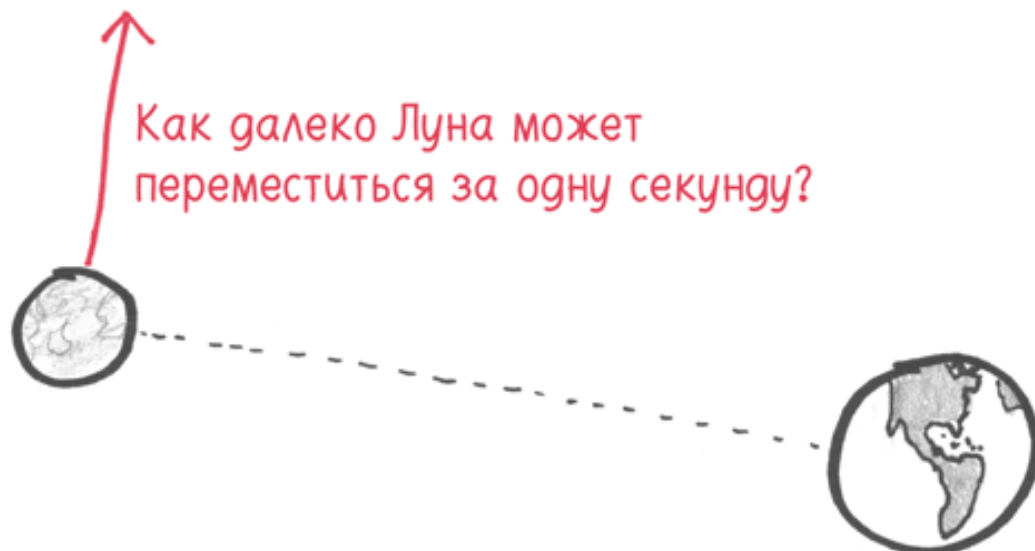
Бросьте яблоко *невообразимо* сильно, как Генри Ровенгартнер³ на стероидах, и оно полетит от Земли так быстро, что каждый момент падения будет просто возвращать яблоко на первоначальную высоту. Таким образом, яблоко сможет падать вечно.

Орбита – это всего лишь постоянное падение, и никакие картезианские⁴ вихри здесь не требуются.

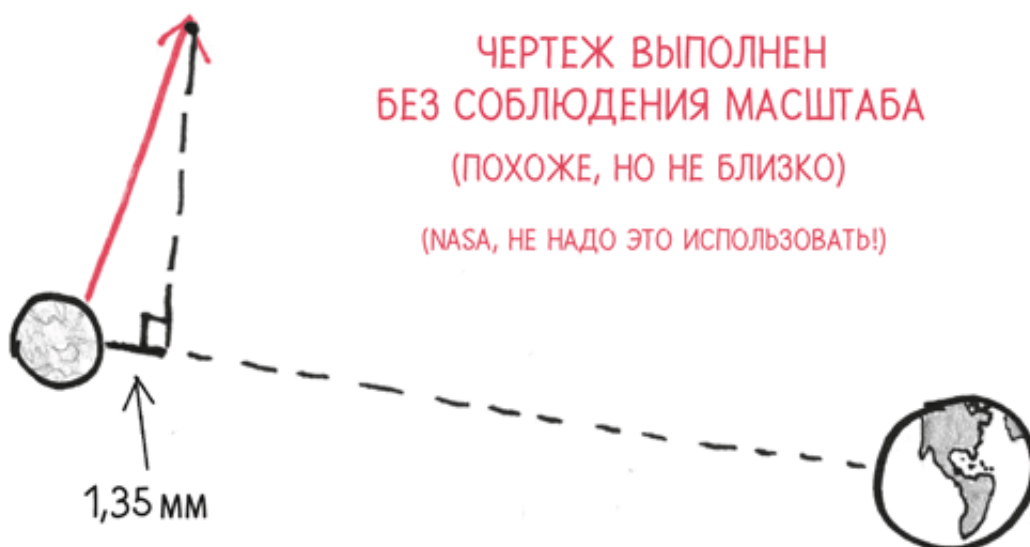
Как все это работает с нашим отважным лунным яблоком? Ну, это задача для математического анализа, так что возьмем бесконечно малый момент – одну-единственную секунду путешествия. На таком коротком отрезке изогнутую линию орбиты можно считать прямой линией.

³ Герой американского фильма «Новичок года» – бейсбольный игрок, который приобрел необычайную силу броска из-за травмы руки. – *Прим. пер.*

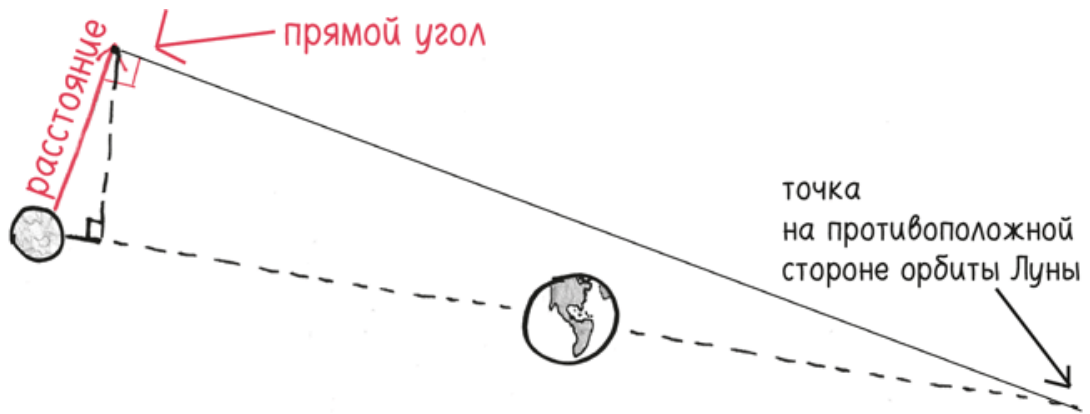
⁴ «Картезианскими вихри» названы по латинизированной форме фамилии Декарта – Cartesius. – *Прим. науч. ред.*



Здесь мы обозначим расстояние, которое пролетит яблоко, если будет подвергаться воздействию только силы притяжения.



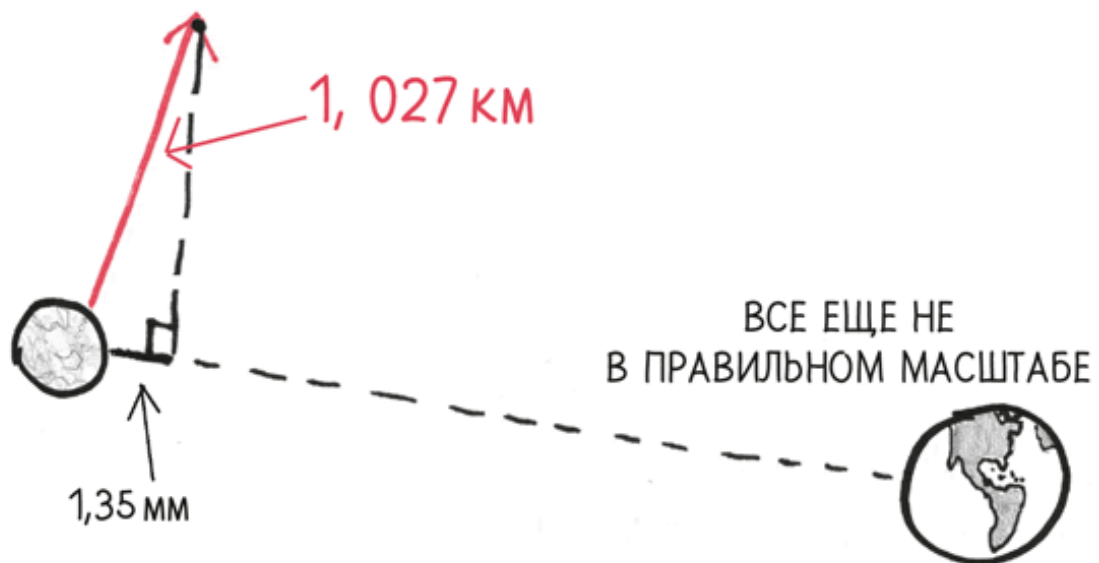
А что теперь? Следующим шагом Ньютона было изящное геометрическое доказательство. Построим прямоугольный треугольник. Нам нужно узнать длину гипотенузы (самой длинной стороны). Поэтому впишем его в более крупный треугольник, сохраняющий те же пропорции.



Поскольку треугольники являются подобными, их стороны соотносятся одинаково:

$$\frac{1,35 \text{ мм}}{\text{расстояние}} = \frac{\text{расстояние}}{781\,542 \text{ км}}$$

Решив уравнение, получаем следующий ответ



Как вы помните, наше яблоко опускается с малой скоростью 1 мм/с – около 3 % скорости ленивца на поверхности земли. И тем не менее, чтобы удержать фрукт на орбите, мы должны запустить его со скоростью 1 км/с, что примерно в три раза больше скорости звука.

Казалось бы, невероятно, невысказано! Луна падает как брошенное в сторону яблоко? Действительно, сэр Исаак? Можете ли вы подтвердить этот смешной мысленный эксперимент какими-либо – как это называется – доказательствами?

Ну, давайте прикинем время, за которое наше лунное яблоко сделает оборот по орбите вокруг Земли. На таком большом расстоянии ему придется пройти путь в 2,5 млн км по окруж-

ности. При движении со скоростью чуть больше 1 км/с сколько времени займет это путешествие?

2390737 секунд = 27,7 дня

Ха, вы только посмотрите на это! Наши расчеты совпали – с погрешностью менее 0,7 % – с периодом реальной лунной орбиты. Это удивительным образом подтверждает теорию Ньютона: Луна действительно падает, как огромное яблоко сорта «ред делишес» (и ее почти так же хочется съесть). Как заключил биограф Джеймс Глейк:

Яблоко само по себе ничего не значило. Оно представляло только половину пары – второй в ней была Луна... Яблоко и Луна сошлись при случайном стечении обстоятельств, создали обобщение, связали явления разного масштаба: близкое и далекое, обыкновенное и неизмеримое.

Теорию сэра Исаака трудно переоценить. Она определяет единственную универсальную силу, которая управляет земным и небесным королевствами, и порождает современный взгляд на реальность – механическая Вселенная, работающий как часы космос, подчиняющийся ясным, недвусмысленным и нерушимым законам, развиваясь от одного мгновения к другому.

Французский ученый Пьер-Симон Лаплас сказал об этом так: вообразите себе могучий ум, которому ведомы расположение всех предметов и мощность каждой силы. Подобный разум должен был бы знать все. «Ничего не было бы определенным, – сказал Лаплас, – а будущее, как и прошлое, стояли бы перед его глазами».

Весь мир – это дифференциальное уравнение, а все люди – всего лишь его переменные.

Не все приняли точку зрения Ньютона. Поэт Уильям Блейк не стал стесняться в выражениях и заявил: «Наука – это древо смерти». Писатель Алан Мур разъяснял: «Для Блейка границы мысли Ньютона были холодными каменными стенами внутреннего подземелья, куда заключено все человечество».

Сильно сказано!

Как бы то ни было, у Ньютона имелись полчища настоящих защитников. Перекрывая рекорды Александра Поупа («Был этот мир глубокой тьмой окутан. / Да будет свет! И вот явился Ньютон»⁵) и Уильяма Вордсворта («Тихое лицо / Как циферблат ума, что в одиночку / Плышет сквозь мысли странные моря»⁶), одним из самых яростных адвокатов Ньютона был философ и фанат науки Вольтер, который называл ученого «творческим духом», «нашим Христофором Колумбом» и (возможно, несколько перегибая палку) «божеством, которому я приношу жертвы». Именно Вольтеру мы обязаны одним из самых поэтических описаний математического анализа в истории: «искусство вычислять и измерять именно то, существование чего не может быть постигнуто», а также популярностью истории о яблоке, которое он поместил в центр интеллектуальных исканий ученого.

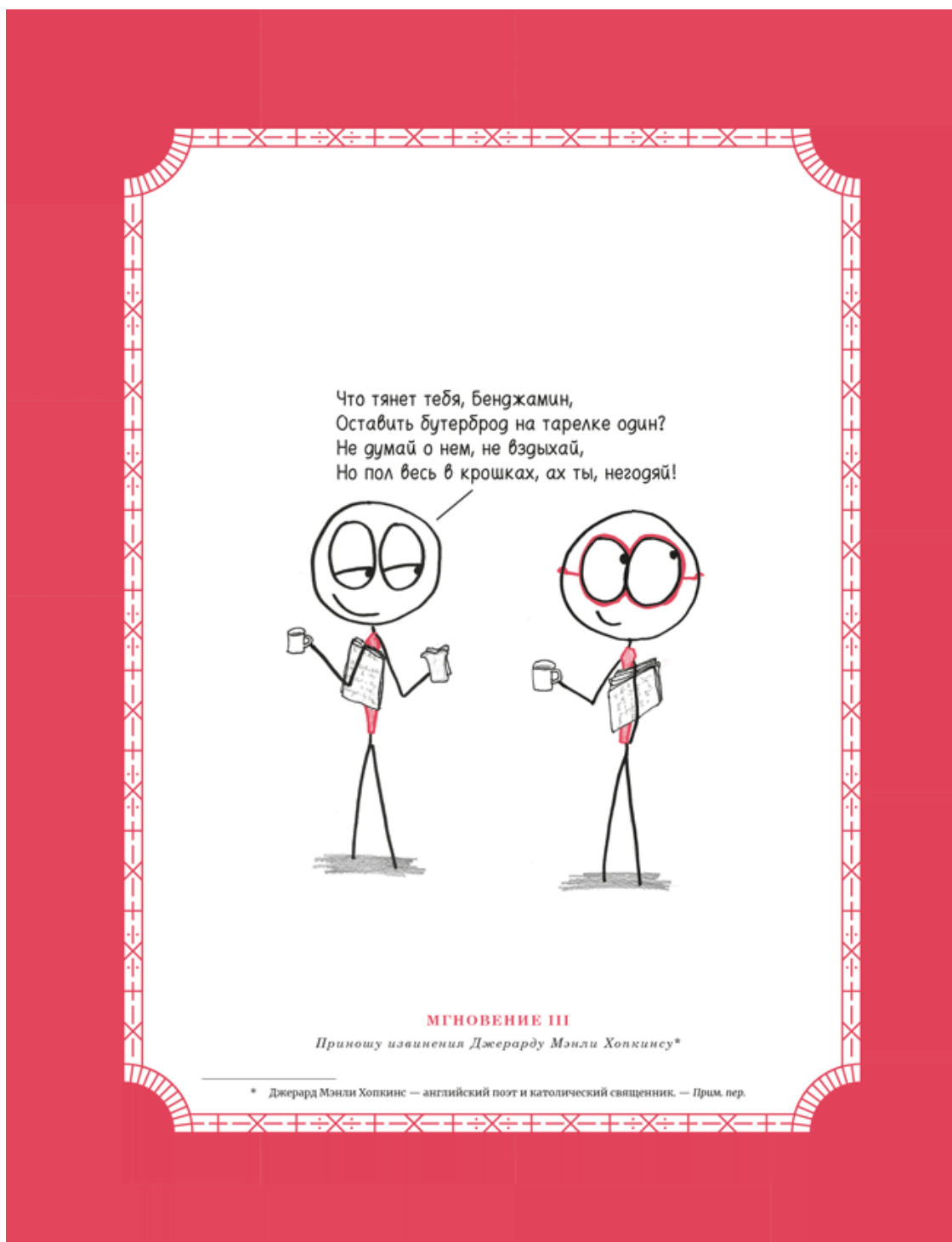
Если учесть, какой ореол мифов окутывает ее, насколько мы можем доверять сказке о яблоке?

⁵ Маршак С. Собр. соч. в 8 т. Т. 4. – М.: Художественная литература, 1969. – С. 94.

⁶ Шапиро А. Загадки старых мастеров / Пер. А. Шапиро.



«Эта история, разумеется, правда, – говорит Кейт Мур, глава архивов Королевского общества, – но, следует признать, ее можно было бы рассказать получше». Ньютон и сам подогревал интерес к этому случаю вместо того, чтобы честно рассказать о том, какими маленькими шажками и рывками наука постепенно движется к прогрессу. Не стоит забывать, что 15 лет он провел, совершенствуя свои теории, опираясь на работы Галилея, Евклида, Декарта, Валлиса, Гука, Гюйгенса и множества других ученых. Теории появляются на свет не просто так, у них есть корни. Они растут. В тот момент в нашем саду знаний еще не произросло полноценное понимание гравитации. Солнце только согрело своими лучами его первые ростки.

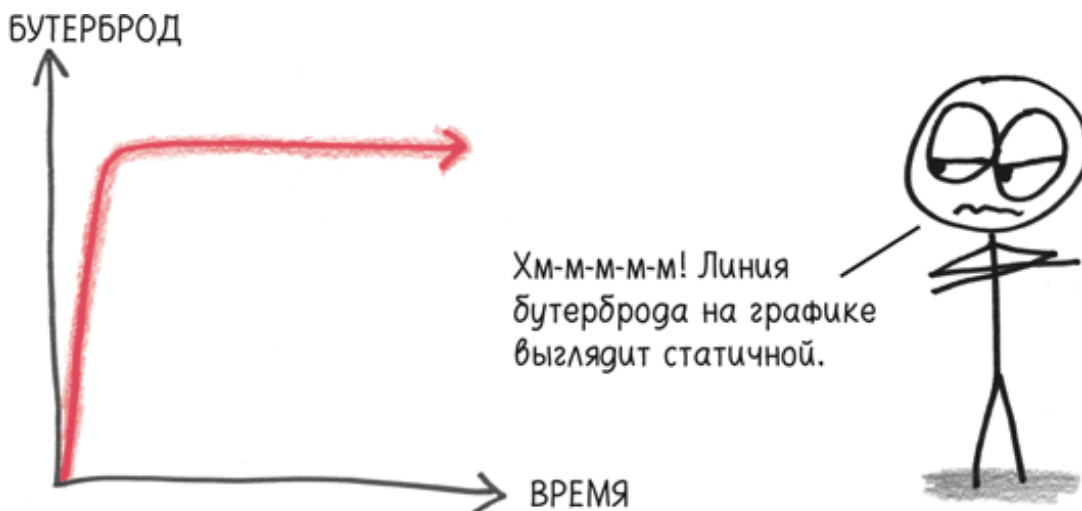


III

Радости полета бутерброда

Перебравшись в Англию и впервые переступив порог частной школы, насчитывающей 462 года истории, где я должен был стать преподавателем, я никак не мог поверить в свою удачу. Каждое утро учителя собирались в комнате отдыха и пили чай с бутербродами. Понятия «комната отдыха преподавателей» и «перерыв» уже были мне знакомы по прежнему месту работы. Но каждое утро бывать на пиру, словно в ожившей иллюстрации из жизни Хогвартса? «Я никогда к этому не привыкну», — говорил я своим новым коллегам.

Но я привык.



Ученые называют это ослаблением реакции на раздражитель. Это означает, что у меня было зрение, как у динозавра: хорошо натренированный замечать то, что движется, я не замечал всего, что неподвижно, даже если оно было намазано маслом. Возможно, это явление имеет объяснение с точки зрения эволюционной психологии, а может быть, я неблагодарная скотина, но в любом случае привыкание поддается систематизации с точки зрения математики. Мы растем, привыкая к функции, каких бы высот она ни достигала. С течением времени для того, чтобы привлечь наше внимание, требуется производная – ненулевая величина изменений. Только более новая новизна может захватить нас.



Однажды, налив чашку горячего чая и пережевывая кусок зернового хлеба (тьфу ты, а я думал, что взял белый!), я присел на диван рядом со своим другом Джеймсом, учителем английского.

– Как дела? – поприветствовал я его.

Джеймс воспринял этот дежурный вопрос так, как он принимал все: с полнейшей серьезностью.

– На этой неделе я счастлив, – ответил он. – С некоторыми вещами еще есть проблемы, но все становится лучше.

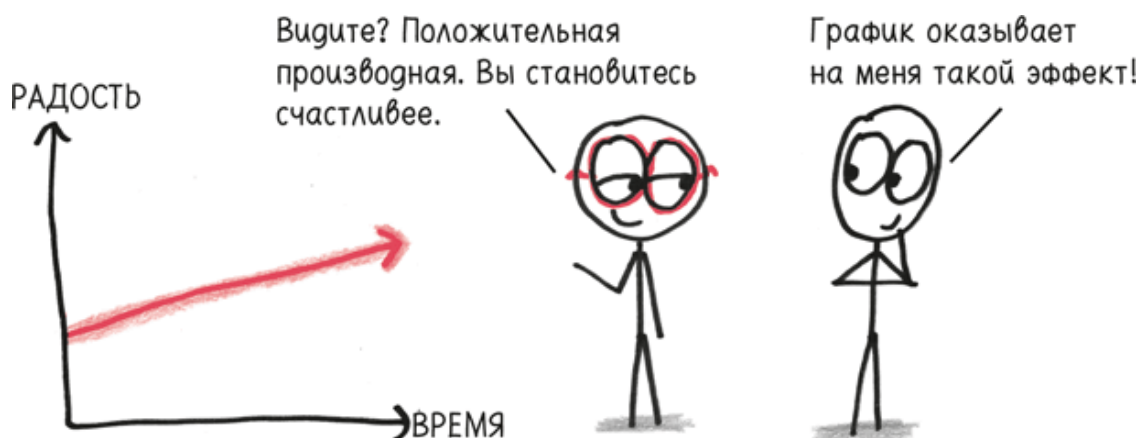
Очевидно, в первую очередь я являюсь учителем математики, а уже во вторую – человеческим существом, потому что на откровение своего друга я ответил следующим образом:

– То есть функция твоего счастья принимает средние значения, но первая производная является положительной.

Джеймс мог вырвать бутерброд из моей руки, выплеснуть свой чай мне в лицо и завопить:
– Наша дружба кончена!

Вместо этого он улыбнулся, наклонился и – клянусь вам, все так и было! – сказал:

– Звучит увлекательно. Объясни мне, что это значит.



– Ну, – начал я читать лекцию, – изобрази график изменения уровня своего счастья со временем. Линия проходит на средней высоте, но в данный момент поднимается – это и есть положительная производная.

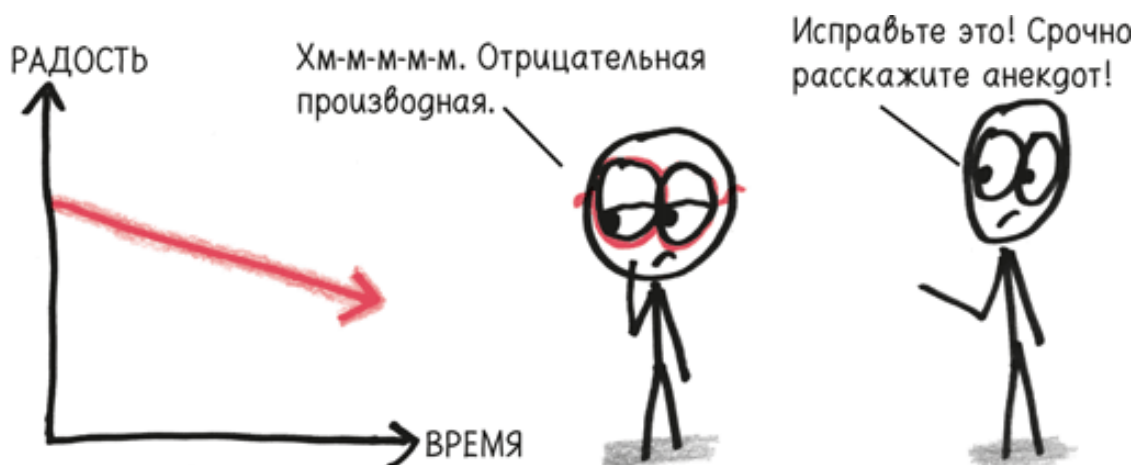
– Понятно, – ответил он. – Значит, отрицательная производная означает, что дела идут хуже?

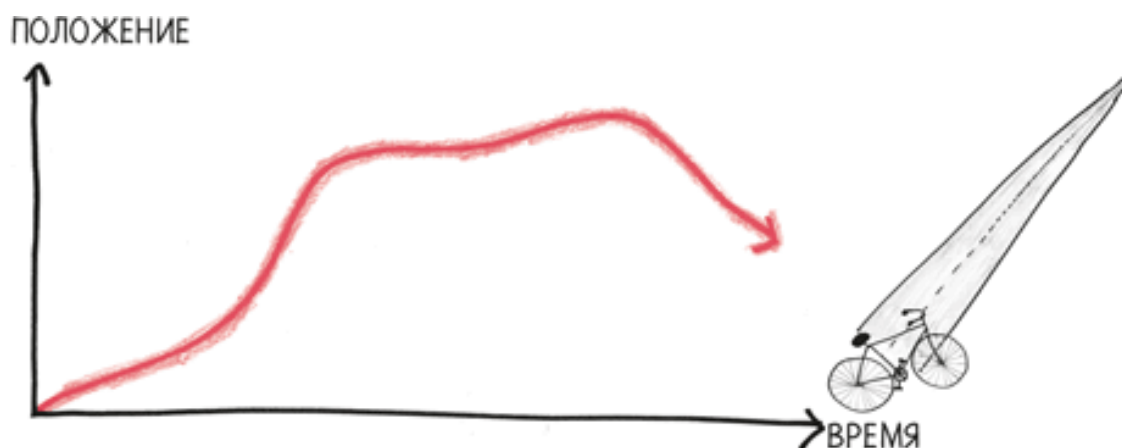
– Ну, – я увильнул от прямого ответа, – в каком-то роде.

Я демонстрировал педантичность, за которую математиков так любят. (Или правильно сказать «критикуют»?)

– Отрицательная производная означает, что значение уменьшается. Для некоторых функций – например, личного долга или физической боли – хотелось бы иметь отрицательную производную. Но в случае со счастьем – да, это не очень хорошо.

Это был довольно необычный первый урок по дифференциальному исчислению. Большинство студентов постигают эти идеи не с помощью зыбкой психологии функции «счастья», а через ясную и лаконичную физическую картину «положения». Например, обозначим положение велосипедиста на велодорожке как p . В начальной точке $p = 0$; через 800 м $p = 0,8$ км.



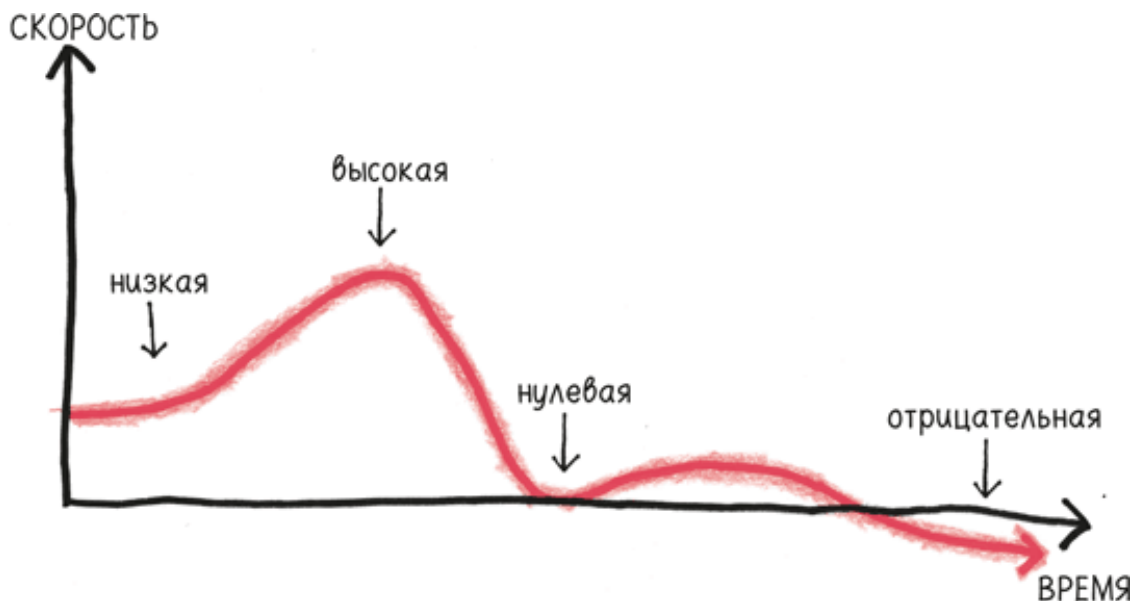


Что выражает здесь производная? То, как быстро p изменяется в определенный момент времени. Мы называем ее p' (произносится « p штрих») или (более наглядно) «скорость».

Большое значение p' – скажем, 14 м/с – означает, что положение изменяется быстро, скорость высока. Маленькое значение – к примеру, 0,6 м/с – говорит о низкой скорости. Если p' равно нулю, то положение не меняется вообще; велосипед стоит на месте. А если p' отрицательно, то мы движемся по дорожке назад: велосипедист сменил направление.

Из нашего первоначального графика (определяющего *положение* в каждый момент) мы можем вывести совершенно новый, определяющий *скорость* в каждый момент. Вот откуда взялось слово «производная» – она выводится, или производится.





Джеймс, умница, проникся математическим анализом так, будто это было неким видом инопланетной поэзии. Как учитель английского он был профессиональным исследователем языка и способности слов фиксировать человеческий опыт. В сухом языке производных он, кажется, нашел своеобразную «литературность».

– А есть еще и вторая производная, – сказал я.

Джеймс серьезно кивнул:

– Расскажи мне.

– Это производная производной, она говорит о том, как меняется величина изменений.

Джеймс нахмурился по вполне понятной причине: это была какая-то бессмыслица.

Я попытался снова.

– Производная – это величина улучшения твоего состояния. Вторая производная спрашивает: ты изменяешься все быстрее и быстрее? Или улучшение замедляется?

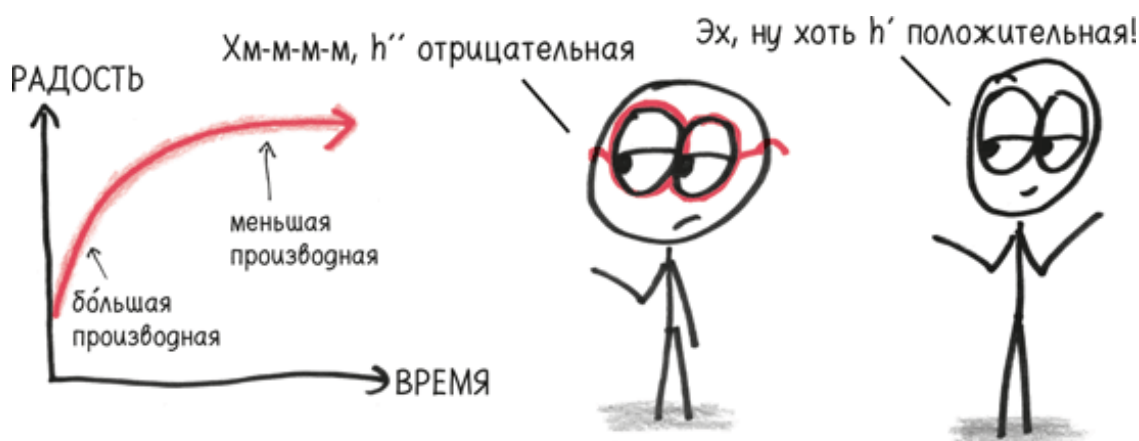


– Хм-м-м-м, – Джеймс прикусил губу. – Я бы сказал, что быстрее и быстрее. Значит, вторая производная... положительная, верно?

– Да!

– А если улучшение замедляется, – продолжил он, – тогда первая производная по-прежнему остается положительной, а вторая становится отрицательной.

– Да.



– Мне это нравится, – сказал Джеймс. – Я должен научить этому всех своих друзей. И когда они будут спрашивать, как мои дела, я смогу сообщать им о своем эмоциональном состоянии с помощью всего нескольких показателей.

– Что-то вроде: h положительная, h' отрицательная, h' два штриха положительная?

– О-о-о, дай подумать! – Джеймс воспринял мое заявление как лингвистическую загадку, краткую и безыскусную форму записи. – Это означает... Я счастлив... И я становлюсь менее счастлив... Но снижение моего уровня счастья замедляется?

– Все верно.



Для выражения тонких оттенков эмоций этот язык может показаться неестественным или топорным, как заявления «Человек счастлив!» или «Человек грустит!». Но, как и все производные, это что-то вроде физической метафоры – аналогия движения через пространство.

Как мы уже видели на примере велосипеда, производной положения является скорость. А производная скорости? Это *ускорение*. (Его также можно назвать p'' , или « p два штриха».)



Производные и вторые производные дают четкую информацию. Чтобы понять разницу, представьте себе ракету сразу после отрыва от земли, когда лица астронавтов расползаются, как желе. Скорость еще низкая, но изменения происходят быстро, поэтому ускорение высокое.



Может быть и обратная ситуация. Летящий на эшелоне самолет имеет высокую скорость, но она является постоянной и не меняется, поэтому ускорение равно нулю.

Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «ЛитРес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на ЛитРес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.