Шорт-лист премии
Royal Society Science
за лучшую научную
книгу

СТИВЕН
СТРОГАЦ

Внимание:
эта книга опасна.
Она заставит вас полюбить
математику. Более того,
существует ненулевая
вероятность, что она сделает
из вас математика

Нассим Талеб

БЕСКОНЕЧНАЯ СИЛА

Как математический
анализ раскрывает
тайны Вселенной

Стивен Строгац

Бесконечная сила. Как математический анализ раскрывает тайны вселенной

Серия «МИФ Научпоп»

Текст предоставлен правообладателем
http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=65422477
Стивен Строгац. Бесконечная сила. Как математический анализ раскрывает тайны Вселенной: Манн, Иванов и Фербер; Москва; 2021
ISBN 978-5-00100-388-5

Аннотация

Популяризатор науки мирового уровня Стивен Строгац предлагает обзор основных понятий матанализа и подробно рассказывает о том, как они используются в современной жизни. Автор отказывается от формул, заменяя их простыми графиками и иллюстрациями. Эта книга – не сухое, скучное чтение, которое пугает сложными теоретическими рассуждениями и формулами. В ней много примеров из реальной жизни, которые показывают, почему нам всем нужна математика. Отличная альтернатива стандартным учебникам.

Книга будет полезна всем, кто интересуется историей науки и математики, а также тем, кто хочет понять, для чего им нужна (и нужна ли) математика.

На русском языке публикуется впервые.

Содержание

Стивен Строгац
Бесконечная сила. Как математический анализ раскрывает тайны вселенной

Научный редактор Игорь Красиков
Издано с разрешения Steven Strogatz, c/o Brockman, Inc

* * *

Введение

Без математического анализа[1] у нас не было бы ни мобильных телефонов, ни компьютеров, ни микроволновых печей. Ни радио, ни телевидения. Ни УЗИ для будущих мам, ни GPS для заблудившихся путешественников. Мы не расщепили бы атом, не раскрыли бы геном человека и не отправили бы астронавтов на Луну. Возможно, у нас даже не было бы Декларации прав человека.

Любопытно, что историю мира этот загадочный раздел математики изменил навсегда. Как же могло так случиться, что некая теория, изначально занимавшаяся малыми изменениями, в итоге изменила цивилизацию коренным образом?

Суть ответа кроется в замечании, которое физик Ричард Фейнман сделал во время обсуждения Манхэттенского проекта с писателем Германом Воуком. Воук собирал материал для крупного романа о Второй мировой войне, который пла-

---

[1] В оригинале используется слово calculus, у которого в русском языке нет однозначного соответствия. В английском языке это слово применяется как для математического анализа или для анализа бесконечно малых в целом, так и для наименования различных областей высшей математики, для которых мы используем слова «анализ» (например, vector calculus – векторный анализ) или «исчисление» (например, differential calculus – дифференциальное исчисление). В данной книге под термином «анализ» будет подразумеваться анализ бесконечно малых, который объединяет интегральное и дифференциальное исчисление. *Прим. пер.*

нировал написать, и отправился в Калтех[2], чтобы побеседовать с физиками, работавшими над созданием бомбы, а Фейнман был одним из них. Когда они прощались после интервью, Фейнман спросил Воука, знает ли тот матанализ. Воук признался, что нет. «Вам следовало бы ему поучиться, – сказал Фейнман. – Это язык, на котором говорит Бог»[3].

Действительно, Вселенная – глубоко математическая сущность[4], хотя причин этого явления никто не понимает. Возможно, так устроил Бог. А может, это единственный способ нашего в ней существования, ибо нематематические вселенные не могут создать жизнь, достаточно разумную для того, чтобы задать такой вопрос. В любом случае то, что наша Вселенная подчиняется законам природы, которые всегда выражены на языке анализа в виде предложений, называемых дифференциальными уравнениями, – весьма таинственный и изумительный факт. Такие уравнения описывают разницу между чем-то прямо сейчас и той же величиной мгновение спустя или между чем-то прямо здесь и беско-

---

[2] Калтех – Калифорнийский технологический институт. Частный университет в Калифорнии, один из лучших в США. *Прим. пер.*

[3] Wouk, The Language God Talks, 5.

[4] Альтернативное мнение можно найти в книгах: Barrow and Tipler, Anthropic Cosmological Principle; Rees, Just Six Numbers; Davies, The Goldilocks Enigma; Livio, Is God a Mathematician?; Tegmark, Our Mathematical Universe; и Carroll, The Big Picture. С философскими аспектами анализа можно познакомиться в Simon Friederich, Fine-Tuning, Stanford Encyclopedia of Philosophy, https://plato.stanford.edu/entries/fine-tuning/.

нечно близко. Детали отличаются в зависимости от конкретной области природы, но структура законов всегда одна и та же. Иначе говоря, все выглядит так, словно у Вселенной существует какой-то код, некая операционная система, которая оживляет все в конкретный момент в конкретном месте. Анализ подключается к этому порядку и выражает его.

Исаак Ньютон первым увидел эту тайну Вселенной. Он обнаружил, что орбиты планет, ритм приливов и отливов и траектории пушечных ядер можно описать, объяснить и предсказать с помощью небольшого набора дифференциальных уравнений. Сегодня мы называем их законами движения и гравитации Ньютона. Мы обнаружили, что эта закономерность сохраняется всякий раз, когда мы открываем какую-то новую часть Вселенной. От старых стихий – земли, воздуха, огня и воды, до новейших электронов, кварков, черных дыр и суперструн – все во Вселенной подчиняется правилам дифференциальных уравнений. Бьюсь об заклад, что именно это имел в виду Фейнман, когда говорил, что на этом языке разговаривает Бог. Если что-то и заслуживает называться тайной Вселенной, то это дифференциальное исчисление.

Случайно открыв этот странный язык, сначала в области геометрии, а потом в коде Вселенной, затем научившись бегло разговаривать на нем и расшифровывать его идиомы и тонкости и в конце концов используя его способность к прогнозированию, люди стали применять анализ, чтобы переделать мир.

Это центральный вопрос нашей книги.

А коль это так, то ответ на «главный вопрос жизни, Вселенной и всего такого»[5] – вовсе не 42, да простят меня фанаты Дугласа Адамса и его книги «Автостопом по галактике»[6]. Тем не менее «Думатель» был на верном пути: тайна Вселенной действительно «математична».

Анализ для всех

Замечание Фейнмана о языке Бога поднимает массу глубоких вопросов. Что такое анализ? Как люди поняли, что на этом языке говорит Бог (или, если вам так больше нравится, что на нем работает Вселенная)? Что такое дифференциальные уравнения и что они сделали для мира, причем не только во времена Ньютона, но и в наши дни? И наконец, как доходчиво рассказать эти истории и идеи, чтобы их с удовольствием восприняли такие доброжелательные читатели, как Герман Воук, – вдумчивые, любопытные, образованные, но имеющие смутное представление о высшей математике?

В эпилоге рассказа о встрече с Фейнманом Воук писал, что в течение четырнадцати лет даже не пытался заняться

---

[5] Adams, Hitchhiker's Guide, и Gill, Douglas Adams' Amazingly Accurate Answer.

[6] В юмористическом фантастическом романе Адамса «Автостопом по галактике» (издана на русском языке: Адамс Д. Автостопом по галактике. М.: АСТ, 2002) специальный суперкомпьютер «Думатель» находит «ответ на главный вопрос жизни, Вселенной и всего такого», и это оказывается 42. *Прим. пер.*

анализом. Его роман разросся до двух больших романов – «Ветры войны» и «Война и память», примерно по тысяче страниц каждый. После окончания работы над ними он попытался учиться по книгам с названиями типа «Анализ в легком изложении», но безуспешно. Он копался в нескольких учебниках в надежде, как он выразился, «найти то, что помогло бы математическому невежде вроде меня, который в колледже занимался гуманитарными науками, то есть литературой и философией, в подростковом поиске смысла существования; при этом я лишь знал, что анализ (о котором я слышал как о скучной и бесполезной вещи) – это язык, на котором говорит Бог»[7]. Однако учебники оказались неприступными, и тогда он нанял израильского преподавателя математики, чтобы подучиться анализу и подтянуть разговорный иврит, но обе надежды опять не оправдались. Вконец отчаявшись, он стал слушать курс анализа в старших классах школы, но почувствовал, что сильно отстал, и сдался через пару месяцев. Когда он уходил, дети хлопали. Он сказал, что это было похоже на сочувствующие аплодисменты после провального выступления на сцене.

Я написал «Бесконечные силы», пытаясь сделать величайшие идеи матанализа доступными каждому. Чтобы узнать об этих эпохальных событиях в истории, вам незачем повторять печальный опыт Германа Воука. Анализ – одно из самых вдохновляющих достижений человечества, и чтобы оценить

---

[7] Wouk, The Language God Talks, 6.

его, вовсе не обязательно им заниматься – как необязательно уметь готовить изысканные блюда, чтобы насладиться такой едой. Я постараюсь объяснить все, что нам надо, с помощью картинок, метафор и анекдотов, а также покажу вам некоторые самые красивые из когда-либо созданных уравнений и доказательств, ведь разве можно посетить галерею, не увидев ее шедевров? Что касается Германа Воука, то на момент написания книги ему было 103 года[8]. Я не знаю, выучил ли он анализ, но если еще нет, то она для вас, мистер Воук!

Мир согласно анализу

Как вам уже, должно быть, понятно, я собираюсь изложить историю и значение анализа с точки зрения прикладного математика. Историк математики рассказал бы все иначе[9], собственно, как и чистый математик. Что восхищает меня как прикладника – так это наличие связи между реальным миром вокруг нас и идеальным миром в наших головах. Внешние явления обусловливают вопросы, которые мы задаем, и наоборот, математика, которую мы воображаем, иногда предсказывает то, что произойдет в реальности. Когда такое

---

[8] Герман Воук скончался в мае 2019 года в возрасте 103 лет. *Прим. пер.*

[9] Исторические аспекты проблемы представлены в книгах: Boyer, The History of the Calculus, и Grattan-Guinness, From the Calculus. Dunham, The Calculus Gallery; Edwards, The Historical Development; и Simmons, Calculus Gems, которые рассказывают историю анализа на примере некоторых наиболее красивых задач и их решений.

случается, эффект просто поражает.

Заниматься прикладной математикой[10] – значит смотреть вовне и быть «интеллектуально неразборчивым». Для специалистов в этой области математика не чистый и герметичный мир теорем и доказательств[11], отражающих самих себя. Мы охватываем все виды предметов: философию, политику, историю, медицину и так далее. Именно такую историю я и собираюсь вам рассказать – мир, соответствующий анализу.

Это гораздо более широкий взгляд на анализ. Он включает множество родственных дисциплин, как смежных, так и в рамках математики. Поскольку такой широкий взгляд непривычен, я хочу убедиться, что он не вызывает никакой путаницы. Например, когда я говорил, что без анализа у нас не было бы компьютеров, мобильных телефонов и так далее, я вовсе не имел в виду, что именно математика сама по себе создала все эти чудеса. Отнюдь нет. Наука и технология были важными партнерами – возможно, главными звездами шоу. Я просто хочу сказать, что анализ также сыграл не последнюю роль (пусть часто и вспомогательную) в том, чтобы мир стал таким, каким мы его знаем.

Возьмем историю беспроводной связи. Все началось с от-

---

[10] Stewart, In Pursuit of the Unknown; Higham et al., The Princeton Companion; и Goriely, Applied Mathematics, передают дух, широту и практичность прикладной математики.

[11] Kline, Mathematics in Western Culture, и Newman, The World of Mathematics, соединяют математику с более широкой культурой. Я провел много времени в старших классах, читая эти два шедевра.

крытия законов электричества и магнетизма[12] такими учеными, как Майкл Фарадей и Андре-Мари Ампер. Без их наблюдений и размышлений важнейшие факты о магнитах, электрическом токе и их невидимых силовых полях остались бы неизвестными и никогда бы не появилась беспроводная связь. Очевидно, что в этой области знаний нельзя было обойтись без экспериментальной физики, но и анализ был совершенно необходим. В 1860-х годах шотландский математик Джеймс Максвелл выразил экспериментальные законы электричества и магнетизма в символьной форме, которую можно было изучать методами математического анализа. После некоторых манипуляций появилось уравнение, которое не имело смысла. Судя по всему, в физике чего-то не хватало. Максвелл подозревал, что виноват закон Ампера, и попытался внести исправления, добавив в уравнение новый член – гипотетический ток, который мог бы разрешить противоречие, а затем снова применил анализ. На этот раз получился разумный результат – простое и элегантное волновое уравнение[13], очень похожее на уравнение, описывающее распространение ряби в пруду. Разница была в том, что результат Максвелла давал новый вид волн, где электрические

[12] О математике и физике смотрите Maxwell, On Physical Lines of Force, и Purcell, Electricity and Magnetism. О понятиях и истории смотрите Kline, Mathematics in Western Culture, 304–21; Schaffer, The Laird of Physics; и Stewart, In Pursuit of the Unknown, глава 11. Биографию Максвелла и Фарадея смотрите в книге: Forbes and Mahon, Faraday, Maxwell.

[13] Stewart, In Pursuit of the Unknown, глава 8.

и магнитные поля вместе исполняли па-де-де. Изменяющееся электрическое поле порождает изменяющееся магнитное поле, которое, в свою очередь, снова порождает изменяющееся электрическое поле, и так далее – поля влияют друг на друга и распространяются вместе в виде энергетической волны. Вычислив скорость этой волны, Максвелл обнаружил – и это был один из величайших моментов в истории науки, – что она распространяется со скоростью света. Таким образом, с помощью анализа он не только предсказал существование электромагнитных волн, но и решил вековую загадку природы света. Он пришел к выводу, что свет – это электромагнитная волна.

Предсказания Максвелла об электромагнитных волнах побудили Генриха Герца провести в 1887 году эксперимент, который подтвердил их существование. Восемь лет спустя Александр Попов продемонстрировал первую в мире систему радиосвязи, а еще пару лет спустя это сделал и Никола Тесла. Еще через пять лет Гульельмо Маркони передал первые беспроводные сообщения через Атлантику. Вскоре появилось телевидение, мобильные телефоны и все остальное.

Ясно, что анализ не смог бы привести к этому в одиночку, но так же ясно, что *без* него ничего бы этого не произошло. Или, если точнее, могло бы произойти, но гораздо позже.

Анализ – больше, чем язык

История Максвелла иллюстрирует тему, с которой мы встретимся еще не раз. Часто говорят, что математика – это язык науки. В этом есть значительная доля правды. В случае электромагнитных волн первым ключевым шагом Максвелла стало преобразование экспериментально открытых законов в уравнения, написанные на языке анализа.

Однако аналогия с языком неполна. Анализ, как и другие области математики, – нечто гораздо большее, чем просто язык. Это невероятно мощная система мышления, позволяющая нам преобразовывать одно уравнение в другое, выполняя различные символьные операции, подчиняющиеся определенным правилам. Эти правила коренятся в логике, так что, даже если кажется, что мы просто перетасовываем символы, на самом деле мы выстраиваем длинные цепочки логических рассуждений. Перемещение символов – это полезные сокращения, удобный способ строить доказательства, слишком сложные, чтобы удерживать их в голове.

Если нам повезет и мы будем достаточно умелыми – то есть правильно преобразуем уравнения, – то можем получить скрытые доселе следствия. Математику этот процесс кажется почти осязаемым. Словно мы манипулируем уравнениями, массируем их, пытаясь расслабить до такой степени, чтобы они выдали свои секреты. Мы хотим, чтобы они открылись и поговорили с нами.

Здесь требуется творческий подход, потому что часто неясно, какие манипуляции выполнять. У Максвелла было бесчисленное количество способов преобразовать его уравнения; с логической точки зрения приемлемы были все, но новый интересный научный результат давали лишь некоторые. Учитывая то, что он даже не знал, что ищет, он мог легко получить от уравнений всего лишь бессвязное бормотание (или его символьный эквивалент). К счастью, уравнения раскрыли свои секреты.

В результате правильного подхода волновое уравнение не осталось абстракцией. В этот момент лингвистическая функция матанализа снова взяла верх. Когда Максвелл перевел абстрактные символы обратно в реальность, они предсказали, что электричество и магнетизм взаимодействуют, создавая электромагнитные волны, распространяющиеся со скоростью света. Через несколько десятилетий это открытие изменило мир.

Непостижимо эффективно

Тот факт, что анализ может так хорошо моделировать природу, даже несколько пугает, учитывая, насколько различны эти две сферы. Анализ – воображаемое царство символов и логики; природа – реальное царство сил и явлений. Но каким-то образом, если переводить реальность в символы достаточно искусно, с помощью логики анализа можно использовать одну истину реального мира для порождения другой. Истина на входе, истина на выходе[14]. Начните с чего-то эмпирически истинного и выраженого в символах (как Максвелл с законами электричества и магнетизма), примените верные логические действия, и получится другая эмпирическая истина, возможно, новая – какой-то ранее неизвестный факт о Вселенной (подобно существованию электромагнитных волн). Таким образом анализ позволяет нам заглядывать в будущее и предсказывать неизвестное. Именно это делает его столь мощным инструментом для науки и технологий.

Но почему же Вселенная должна уважать хоть какую-нибудь логику, не говоря уже о той, которую можем использовать мы, ничтожные люди? Именно этому удивлялся Эйнштейн, когда писал: «Вечная тайна мира заключается в его постижимости»[15]. Именно это имел в виду американский физик Юджин Вигнер в своем эссе «Непостижимая эффективность математики в естественных науках»[16], когда писал:

---

[14] В оригинале Truth in, truth out – каламбурная отсылка к фразе Wine in, truth out, что примерно соответствует нашей пословице «что у трезвого на уме, то у пьяного на языке». *Прим. пер.*

[15] Einstein, Physics and Reality, 51. Этот афоризм часто передают так: «Самая непостижимая вещь во Вселенной – то, что она постижима». Другие примеры цитат Эйнштейна, подлинных или приписываемых ему, смотрите в книгах: Calaprice, The Ultimate Quotable Einstein, и Robinson, Einstein Said That.

[16] Wigner, The Unreasonable Effectiveness; Hamming, The Unreasonable Effectiveness; и Livio, Is God a Mathematician? См. https://coollib.net/b/322251/

«Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов, это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем»[17].

Это чувство благоговения восходит к истории математики. По легенде, Пифагор[18] ощутил его примерно в 550 году до нашей эры, когда вместе с учениками обнаружил, что музыка регулируется отношениями целых чисел. Например, представьте, что вы защипнули гитарную струну. Когда струна вибрирует, она издает определенную ноту. Поставьте палец левой руки точно на половине длины струны и снова защипните ее. Теперь колеблющаяся часть струны вдвое короче (отношение 1 к 2), и струна звучит ровно на октаву выше, чем исходная нота (это расстояние от одной ноты «до» до следующей «до» в интервале до-ре-ми-фа-соль-ля-си-до). Если сократить струну на 2/3 исходной длины, то она будет звучать на квинту выше (интервал от «до» до «соль»; вспомните первые две ноты из темы «Звездных войн»). Если же вибрирующая часть составляет 3/4 исходной длины, то звук выше на кварту (интервал между первыми двумя нотами свадебного марша «Вот идет невеста»[19]). Древнегреческие му-

---

[17] Перевод Ю. А. Данилова. *Прим. пер.*

[18] Asimov, Asimov's Biographical Encyclopedia, 4–5; Burkert, Lore and Science; Guthrie, Pythagorean Sourcebook; и C. Huffman, Pythagoras, https://plato.stanford.edu/archives/sum2014/entries/pythagoras/. Martínez в книгах Cult of Pythagoras и Science Secrets развенчивает многие мифы о пифагорейцах с осторожностью и уничижительным юмором.

[19] Here Comes the Bride – популярный на Западе свадебный марш, звучащий во

зыканты знали о таких музыкальных интервалах, как октава, кварта и квинта, и считали их красивыми. Столь неожиданная связь между музыкой (гармонией реального мира) и числами (гармонией воображаемого мира) привела пифагорейцев[20] к мистической вере в то, что *всё* есть число. Считается, что они даже верили в то, что планеты на своих орбитах издают музыку – музыку сфер.

С тех пор многие из величайших математиков и других ученых заболели пифагорейской лихорадкой. Страдал ею астроном Иоганн Кеплер. И физик Поль Дирак. Это побуждало их мечтать, искать и стремиться к гармонии Вселенной и в конце концов привело к открытиям, которые изменили мир.

Принцип бесконечности

Чтобы помочь вам понять, куда мы движемся, позвольте мне сказать несколько слов о том, что такое анализ, чего он (образно говоря) хочет и чем отличается от других областей математики. К счастью, всю эту тему пронизывает одна значимая красивая идея. Как только мы ее осознаем, вся конструкция анализа сложится в единую картину, превратившись в вариации на одну общую тему.

Увы, большинство курсов анализа хоронят эту тему под

время выхода невесты. Тема взята из оперы «Лоэнгрин» Рихарда Вагнера. *Прим. пер.*

[20] Katz, History of Mathematics, 48–51, и Burton, History of Mathematics, раздел 3.2, обсуждают пифагорейскую математику и философию.

лавиной формул, процедур и вычислительных ухищрений. Если подумать, то я никогда не сталкивался с тем, чтобы кто-то ее подробно объяснял, хотя это часть культуры анализа и каждому специалисту она, естественно, известна. Давайте назовем это «принципом бесконечности». Он будет направлять нас в нашем путешествии точно так же, как направлял развитие самого анализа – и концептуально, и исторически. Я испытываю искушение сформулировать его прямо сейчас, хотя пока это будет звучать как тарабарщина. Вам будет проще это оценить, если мы станем продвигаться медленно, спрашивая, чего хочет анализ… и как он получает то, что хочет.

Если коротко, то анализ хочет сделать сложные задачи проще. Он буквально одержим простотой. Это может показаться вам абсурдным, учитывая, что у анализа репутация сложного метода и что некоторые лучшие учебники по нему превышают тысячу страниц и весят, как кирпич. Но давайте не будем выносить резких суждений. Анализ ничего не может поделать с тем, как выглядит, и громоздкости ему не избежать. Он кажется сложным, потому что старается решать сложные задачи. И он действительно решил ряд самых трудных и важных задач, с которыми когда-либо сталкивался наш вид.

Анализ добивается успеха, разделяя запутанные задачи на более мелкие составляющие. Конечно, такая стратегия не уникальна. Все хорошие специалисты вам подтвердят, что сложные задачи становятся проще при разбиении на части. Поистине радикальный и отличительный ход анализа состоит в том, что он доводит эту стратегию «разделяй и властвуй» до крайнего предела – *бесконечности*. Вместо того чтобы разрезать большую задачу на несколько маленьких, анализ без устали режет и режет ее, пока не измельчит буквально в порошок, до бесконечного множества крохотных частей. Затем анализ решает исходную задачу для всех этих мелких частей, что обычно гораздо проще, чем в случае изначальной гигантской задачи. На следующем этапе главное – свести все полученные крошечные ответы воедино. Как правило, это довольно трудно, но все же не так сложно, как в исходной задаче.

Таким образом, анализ действует в два шага: разбиение и восстановление. С математической точки зрения первый всегда включает бесконечно малое вычитание, используемое для оценивания разницы между частями. Соответственно, эта часть предмета называется *дифференциальным* исчислением[21]. Второй шаг – процесс сборки – всегда включает бесконечное сложение, объединяющее части обратно в единое целое. Эта часть предмета именуется *интегральным* исчислением[22].

---

[21] И английское слово *difference* («разница, различие»), и термин «дифференциальный» восходят к латинскому слову *differentia* («разность, различие»). *Прим. пер.*

[22] И английское слово *integrate* («объединять»), и термин «интегральный» восходят к латинскому слову *integer* («целое»). *Прим. пер.*

Такая стратегия подойдет для всего, что можно представить в виде бесконечного нарезания. Такие бесконечно делимые непрерывные объекты называют *континуумами,* от латинского глагола *continere*, образованного от приставки *con-* «с, вместе» и слова *tenere* «держать». Подумайте об окружности, стальной балке подвесного моста, миске супа, остывающего на кухонном столе, параболической траектории летящего копья или продолжительности вашей жизни. Форма, объект, жидкость, движение, временной интервал – все это льет воду на мельницу анализа и все это непрерывно или почти непрерывно.

Обратите внимание на определенный акт творческой фантазии. В действительности суп и сталь не непрерывны. В масштабах обычной жизни, возможно, они и кажутся таковыми, но на уровне атомов или суперструн – нет. Анализ игнорирует неудобства, создаваемые атомами и прочими неразделимыми объектами, не потому, что их не существует, а потому, что полезно представить, что их нет. Как мы увидим, анализу присуща склонность к полезным выдумкам.

Говоря в целом, те виды сущностей, которые анализ моделирует континуумами, включают практически все, что можно представить. Ученые использовали анализ для описания того, как мяч непрерывно катится по наклонной поверхности, как луч солнца проходит сквозь воду, как непрерывный поток воздуха вокруг крыла удерживает в полете колибри или самолет и как концентрация частиц вируса ВИЧ в крови пациента непрерывно снижается в течение нескольких дней после начала комбинированного лечения. Во всех случаях стратегия одна и та же: разделить сложную непрерывную задачу на бесконечное множество более простых частей, решить их по отдельности, а затем соединить опять.

Теперь мы наконец готовы изложить главную идею.

Принцип бесконечности

> Чтобы пролить свет на любые непрерывные формы, объекты, движения, процессы или явления – какими бы дикими или сложными они ни казались, – переосмыслите их как бесконечный набор более простых частей, проанализируйте, а затем сложите полученные результаты, чтобы понять исходное целое.

Голем бесконечности

Единственная неприятность во всем этом – необходимость справляться с бесконечностью. И это проще сказать, чем сделать. Хотя тщательно контролируемое применение бесконечности – секрет анализа и источник его колоссальной предсказательной силы, одновременно это и его самая большая головная боль. Подобно чудовищу Франкенштейна или голему из еврейской мифологии, бесконечность склонна ускользать из-под контроля хозяина. Как и в любой истории о гордыне, монстр неизбежно обращается против своего создателя.

Создатели анализа осознавали такую опасность, но все же считали, что без бесконечности не обойтись. Конечно, время от времени чудовище приходило в бешенство, оставляя за собой парадоксы, путаницу и философский хаос. Однако после каждого такого случая математикам всегда удавалось усмирить монстра, рационализировать его поведение и вернуть к работе. В итоге все всегда заканчивалось хорошо. Анализ давал правильные ответы, даже когда его создатели не могли объяснить, почему. Желание обуздать бесконечность и использовать ее силу – это та нить, которая проходит через всю 25-вековую историю матанализа.

Если учесть, что математика обычно изображается точной и безупречно рациональной, все эти разговоры о желаниях и заблуждениях могут показаться неуместными. Она рациональна, но не всегда изначально. Творение интуитивно, понимание приходит позже. В истории анализа логика всегда отставала от интуиции чаще, чем в других областях математики. И это заставляет чувствовать, что эта тема особенно человечна и дружелюбна, а ее гении больше похожи на нас.

Кривые, движение и изменение

Принцип бесконечности организует рассказ об анализе вокруг какой-то методологической темы. Но анализ – это не только методология, но и загадки. Его развитию особенно способствовали три: загадка кривых, загадка движения и загадка изменения. Плодотворность их изучения доказала ценность чистого любопытства.

Задачи о кривых, движении и изменении на первый взгляд могут показаться неважными, а может, даже безнадежно заумными. Но они затрагивают настолько глубокие концептуальные вопросы, а математика так глубоко вплетена в ткань Вселенной, что их решение имело далеко идущие последствия для хода цивилизации и нашей повседневной жизни. Как мы увидим в следующих главах, мы пожинаем плоды этих исследований всякий раз, когда слушаем музыку в своих телефонах, делаем покупки в магазинах с помощью лазерных сканеров или находим дорогу домой благодаря GPS-навигатору.

Все началось с загадки кривых. Здесь я использую слово «кривые» в самом широком смысле – для обозначения любой изогнутой линии, изогнутой поверхности или изогнутого твердого тела – представьте себе резиновую ленту, обручальное кольцо, плавающий пузырь, контуры вазы или палку салями. Чтобы упростить вещи, ранние геометры, как правило, сосредоточивались на абстрактных, идеализированных версиях кривых форм и игнорировали толщину, шероховатости и текстуру. Например, математическая сфера представлялась бесконечно тонкой, гладкой, идеально круглой мембраной без толщины, неровностей или волосатости, как у кокосового ореха. Но даже при таких идеализированных представлениях изогнутые формы вызывали принципиальные трудности, поскольку там не было прямых. С треугольниками и квадратами проблем не возникало. С кубами тоже. Они состоят из прямых линий и плоскостей, соединенных между собой в углах. Нетрудно вычислить их периметр, площадь или объем. Такие задачи умели решать геометры всего мира – в Древнем Вавилоне и Египте, Китае и Индии, Греции и Японии. Но с округлыми формами дело обстояло гораздо хуже. Никто не знал, какова поверхность сферы или какой у нее объем. В древности даже вычисление длины окружности или площади круга представлялось невыполнимой задачей. Не было стартовой точки и прямых линий, от которых можно оттолкнуться. Все изогнутое казалось непостижимым.

Так начинался анализ. Он рос из любопытства геометров и разочарования в округлости. Круги, сферы и прочие изогнутые формы были Гималаями той эпохи. И не потому, что они ставили важные практические задачи, по крайней мере поначалу. Дело было в жажде приключений, характерной для человеческого духа. Подобно покорителям Эвереста, геометры хотели разобраться с кривыми просто потому, потому что они есть[23].

Прорыв произошел благодаря идее, что кривые на самом деле *состоят* из прямых частей. Хотя это неправда, но можно сделать вид, что это так. Загвоздка была в том, что тогда эти части должны быть бесконечно малы и бесконечно

---

[23] Когда альпинисту Джорджу Мэллори задали вопрос, зачем он хочет подняться на Эверест, он ответил: «Потому что он существует». *Прим. пер.*

многочисленны. Благодаря такой фантастической концепции родилось интегральное исчисление. Это самое раннее применение «принципа бесконечности». История его развития растянется у нас на несколько глав, но его суть в зародышевой форме мы можем изложить уже сейчас: если очень сильно увеличить окружность (или другую гладкую кривую), то часть, которую мы увидим под микроскопом, будет выглядеть как прямая линия. Так что в принципе можно вычислить длину кривой, сложив длины всех маленьких прямых кусочков. Чтобы выяснить, как именно это делать – нелегкая задача, – понадобились многовековые усилия величайших математиков человечества. В итоге коллективно (а иногда и в результате ожесточенного соперничества) они продвинулись по пути к решению загадки кривых. Побочными результатами, как мы увидим в главе 2, стала математика, используемая для рисования реалистично выглядящих волос, одежды и лиц персонажей в компьютерной анимации и вычисления, необходимые пластическим хирургам для выполнения операций на лице виртуальных пациентов, прежде чем оперировать реальных.

Поиски решения загадки кривых достигли апогея, когда стало ясно, что кривые – это нечто большее, чем просто геометрические отклонения. Они были ключом к разгадке тайн природы. Они естественным образом возникали в параболической дуге летящего мяча, в эллиптической орбите Марса, движущегося вокруг Солнца, и в выпуклой форме линзы, которая могла преломлять и фокусировать свет в нужном месте, без чего было бы невозможно бурное развитие микроскопов и телескопов в Европе позднего Возрождения.

Так началась вторая великая одержимость: увлечение тайнами движения на Земле и в Солнечной системе. С помощью наблюдений и замысловатых экспериментов ученые обнаружили интересные численные закономерности для простейших двигающихся объектов. Они измеряли колебания маятника, определяли ускорение шара, катящегося по наклонной плоскости, и наносили на карту движение небесных тел. Обнаруженные закономерности восхищали их: действительно, Иоганн Кеплер впал в состояние описанного им «священного помешательства», обнаружив законы движения планет, поскольку эти закономерности показались ему признаком работы Бога. С более светской точки зрения такие законы подкрепляли утверждение, что природа глубоко «математична», как и говорили пифагорейцы. Единственная загвоздка – никто не мог объяснить эти новые чудесные закономерности, по крайней мере с помощью существовавших в то время форм математики. Арифметика и геометрия не справлялись с этой задачей даже в руках великих математиков.

Проблема заключалась в том, что движение не было равномерным. Шар, катившийся по наклонной плоскости, непрерывно менял скорость, а планета, вращающаяся вокруг Солнца, все время меняла направление движения. Что еще хуже, планеты двигались быстрее, когда находились ближе к Солнцу, и медленнее, когда находились от него вдалеке. Не было никакого известного способа разобраться с непрерывно изменяющимся движением. У математиков имелась теория для самого тривиального вида движения – перемещения с *постоянной* скоростью, когда расстояние вычисляется путем произведения скорости на время. Но когда скорость меняется, причем непрерывно, дела обстоят совершенно иначе. Движение оказалось таким же Эверестом, как и кривые.

Как мы увидим в середине книги, очередные крупные достижения анализа выросли из стремления разгадать тайну движения. Как и в случае кривых, на помощь пришел принцип бесконечности. На этот раз пришлось притвориться, что движение с переменной скоростью состоит из бесконечно большого числа бесконечно коротких движений с постоянной скоростью. Чтобы представить, что это значит, вообразите, что вы едете в машине с нервным водителем, заставляющим автомобиль двигаться рывками. Вы с беспокойством смотрите на спидометр, стрелка которого дергается вверх и вниз при каждом рывке машины. Но даже самый резкий водитель не сможет сильно сдвинуть стрелку за миллисекунду, а уж за более короткий, то есть бесконечно малый интервал, – и подавно. Стрелка просто замрет на месте. Никто не способен так быстро нажать на педаль газа.

Эти идеи объединились в более молодой части анализа – дифференциальном исчислении. Это было именно то, что требовалось для работы с бесконечно малыми изменениями времени и расстояния, которые возникали при изучении постоянно меняющегося движения, равно как и для работы с бесконечно малыми прямыми кусочками кривых, появлявшимися в аналитической геометрии – новомодном исследовании кривых, определенных с помощью алгебраических уравнений, – популярной в первой половине 1600-х годов. Как мы увидим позже, одно время алгебра была настоящим поветрием. Ее популярность была благом для всех областей математики, включая геометрию, но она же создала буйные джунгли новых кривых, которые следовало изучить. Таким образом пересеклись загадки кривых и движения. В середине 1600-х они оказались в центре анализа, сталкиваясь друг с другом и создавая математический хаос и неразбериху. Расцвет анализа в этих суматошных условиях не обходился без бурных дискуссий. Некоторые математики критиковали анализ за чересчур свободное обращение с бесконечностью. Другие высмеивали алгебру как простой набор символов. Сопровождаемый всеми этими препирательствами прогресс анализа был медленным и нестабильным.

А потом в одно прекрасное Рождество родился ребенок[24]. Этот юный мессия анализа был невероятным героем. Рожденный недоношенным, без отца и брошенный матерью в возрасте трех лет, этот одинокий мальчик с темными мыс-

---

[24] Исаак Ньютон родился 25 декабря 1642 года по юлианскому календарю (4 января 1643 года – по григорианскому). *Прим. пер.*

лями превратился в скрытного подозрительного юношу. И тем не менее он (а это, как вы уже, наверное, догадались, был Исаак Ньютон) оставил в мире такой заметный след, как никто ни до, ни после него.

Сначала он нашел «святой Грааль» анализа, открыв, как снова сложить кусочки кривой, причем легко, быстро и систематически. Объединив символы алгебры с мощью бесконечности, он нашел способ представить любую кривую в виде суммы бесконечного множества более простых кривых, которые описываются различными степенями x, например x^2, x^3, x^4 и так далее. Имея такие ингредиенты, он мог приготовить любую желаемую кривую – положив щепотку x, чуточку x^2 и полную столовую ложку x^3. Это было похоже на рецепт и набор специй, мясную лавку и огород – и все в одном флаконе. С его помощью Ньютон мог решить любую задачу о формах и движениях.

Затем он взломал код Вселенной, обнаружив, что любое движение всегда происходит бесконечно малыми шагами и в любой момент описывается законами, изложенными на языке анализа. С помощью всего лишь горстки дифференциальных уравнений (законы движения и всемирного тяготения) Ньютон смог объяснить все, от траектории пушечного снаряда до орбит планет. Его потрясающая «система мира» объединила небеса и землю, положив начало просвещению и изменив западную культуру. Его влияние на философов и поэтов Европы было колоссальным. Как мы увидим, оно распространилось даже на Томаса Джефферсона и Декларацию независимости. В наше время идеи Ньютона положены в основу космических программ, предоставляя математику, необходимую для расчета траекторий, – работы, проделанной в NASA афроамериканским математиком Кэтрин Джонсон и ее коллегами (героини книги и фильма «Скрытые фигуры»).

После того как загадки кривых и движения были решены, анализ перешел к третьей великой одержимости: загадке изменений. Пусть это и клише, но от этого оно не менее истинно: нет ничего постоянного, все меняется. Сегодня дождливо, а завтра солнечно. Рынок акций растет и падает. Воодушевленные ньютоновскими взглядами, последующие поколения специалистов по анализу задались вопросом: есть ли законы изменений, аналогичные ньютоновским законам движения? Существуют ли законы роста населения, распространения эпидемий и кровотока в артериях? Можно ли использовать анализ для описания того, как электрические сигналы распространяются по нервам, или для предсказания транспортного потока на автостраде?

Следуя этой амбициозной программе, в постоянном сотрудничестве с другими областями науки и технологии, анализ помог создать современный мир. С помощью наблюдений и экспериментов ученые установили законы изменений, а затем использовали анализ для решений задач и составления прогнозов. Например, в 1917 году Альберт Эйнштейн применил анализ к простой модели атомных переходов и предсказал замечательный эффект под названием *вынужденное излучение*[25] (этот термин обозначают буквы *s* и *e* в слове *laser*, которое представляет собой аббревиатуру, образованную от слов *light amplification by stimulated emission of radiation*[26]). Эйнштейн предположил, что при определенных обстоятельствах фотоны, проходящие через вещество, могут индуцировать появление других фотонов с той же длиной волны, движущихся в том же направлении. Получается своего рода цепная реакция, которая может дать мощный когерентный луч. Спустя несколько десятилетий предсказание сбылось. Первые действующие лазеры были созданы в начале 1960-х. С тех пор они используются везде – от проигрывателей компакт-дисков и оружия с лазерным наведением до сканеров штрих-кодов в супермаркетах и медицинских лазеров.

Законы изменений в медицине не так понятны, как в физике. Тем не менее даже в случае элементарных моделей анализ может внести свой вклад в спасение жизней. Например, в главе 8 мы увидим, как модель, использующая дифференциальное уравнение, разработанная иммунологом и исследователем СПИДа, сыграла свою роль в создании комбинированной терапии из трех препаратов для лечения пациен-

---

[25] Ball, A Century Ago Einstein Sparked, и Pais, Subtle Is the Lord. Оригинальная статья: Einstein, Zur Quantentheorie der Strahlung.

[26] Усиление света посредством вынужденного излучения. *Прим. пер.*

тов с ВИЧ. Идеи, подсказанные моделью, опровергли распространенную точку зрения, что вирус в организме бездействует; на самом деле он ожесточенно сражается с иммунной системой каждую минуту каждого дня. Благодаря новому пониманию, предоставленному анализом, ВИЧ-инфекция превратилась из почти неизбежного смертного приговора в управляемое хроническое заболевание – по крайней мере для тех, кто имеет доступ к комбинированной лекарственной терапии.

Общепризнанно, что некоторые аспекты нашего вечно меняющегося мира лежат за пределами приближений и моделирования, характерных для принципа бесконечности. Например, в мире субатомных частиц физики не могут представлять электрон как классическую частицу, которая движется по какой-то линии подобно планете или пушечному ядру. Согласно квантовой механике, на таком микроскопическом уровне траектории становятся размытыми и плохо определяемыми, поэтому поведение электронов приходится описывать в терминах волн вероятности, а не ньютоновских траекторий. Но как только мы это сделаем, анализ с триумфом возвращается. Он управляет эволюцией волн вероятности с помощью так называемого уравнения Шрёдингера.

Удивительно, но факт: даже на субатомном уровне, где ньютоновская физика уже не действует, созданный им анализ по-прежнему работает. И работает очень хорошо. Как мы увидим далее в книге, он объединил усилия с квантовой механикой и предсказал замечательные эффекты, лежащие в основе методов медицинской визуализации – от магнитно-резонансной (МРТ) и компьютерной (КТ) томографии до более экзотической позитронно-эмиссионной томографии (ПЭТ).

Пришло время ближе познакомиться с языком Вселенной. И начнем, разумеется, с бесконечности.

Глава 1. Бесконечность

Начало математике[27] положили обычные повседневные задачи. Пастухам нужно было следить за стадами. Фермерам – взвешивать собранное зерно. Сборщикам налогов – решать, сколько коров или кур крестьянин должен отдать правителю. Из таких практических требований и возникли числа. Сначала их определяли по пальцам рук и ног. Затем стали выцарапывать на костях животных. По мере того как представление чисел эволюционировало от черточек к символам, они облегчили все задачи – от налогообложения и торговли до бухгалтерского учета и переписи населения. Доказательства тому мы находим на глиняных табличках Месопотамии, созданных более пяти тысяч лет назад, – сделанная на них клиновидными значками запись называется клинописью.

Наряду с числами значение имели и формы. В Древнем Египте измерениям линий и углов придавали первостепенное значение. Каждый год землемерам приходилось заново проводить границы крестьянских хозяйств, поскольку раз-

---

[27] Burton, History of Mathematics, и Katz, History of Mathematics, дают полномасштабное (хотя и без подробностей) введение в историю математики от античных времен до XX столетия. На более серьезном математическом уровне тема представлена в Stillwell, Mathematics and Its History. В качестве масштабного гуманистического подхода подойдет книга Kline, Mathematics in Western Culture.

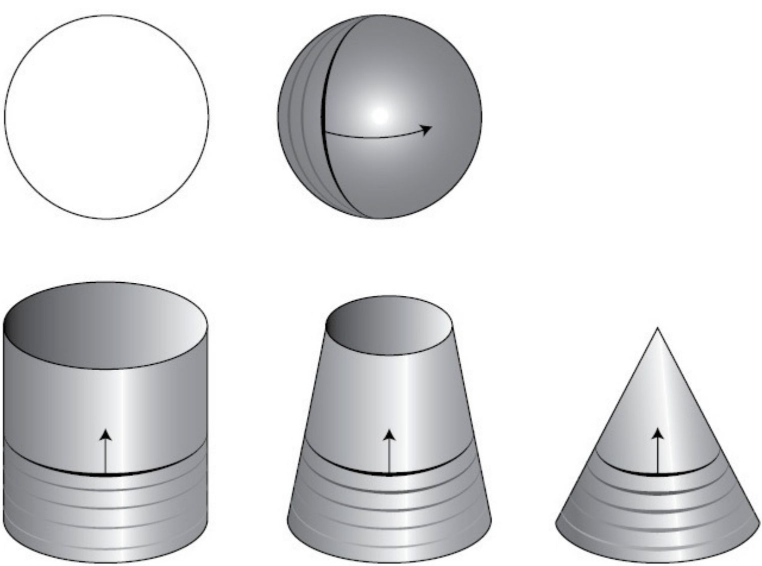
лив Нила стирал их. Эта деятельность позже дала название всей области математики, изучающей формы, – *геометрия,* от древнегреческого слова γεωμετρία, которое означало «землемерие»: γη – «земля» и μετρέω – «измеряю».

Поначалу геометрия работала с прямыми линиями и углами, что отражало ее утилитарное происхождение: треугольники были наклонными плоскостями, пирамиды – монументами и гробницами, а прямоугольники – столами, алтарями и земельными участками. Строители и плотники использовали прямые углы для построения вертикальных линий. Для моряков, архитекторов и священников знание геометрии прямых линий было необходимо для землемерных работ, навигации, ведения календаря, предсказания затмений и возведения храмов и святилищ.

Но всегда – даже когда геометрия была зациклена на прямых линиях – выделялась одна кривая, самая совершенная из всех: окружность. Мы видим ее в годичных кольцах деревьев, в волнах на пруду, в форме солнца и луны. В природе круги повсюду. Когда мы смотрим на них, они смотрят на нас – в буквальном смысле, ведь они в глазах наших близких, в зрачках и радужках. Круги и практичны, и эмоциональны, как колеса и обручальные кольца; в них есть нечто мистическое. Вечное возвращение предполагает цикл времен года, возрождения, вечной жизни и нескончаемой любви. Неудивительно, что круги привлекали внимание с тех пор, как люди стали изучать формы.

С математической точки зрения окружности воплощают изменения без изменений. Точка, двигающаяся по окружности, меняет направление движения, не меняя при этом своего расстояния от центра. Это минимальная форма изменений – самый простой способ двигаться по кривой. И, конечно же, окружность симметрична. Если вы повернете ее вокруг центра, она будет выглядеть точно так же. Такая поворотная симметрия может быть причиной распространенности этих фигур. Везде, где природу не беспокоит направление, обязательно появляются окружности. Посмотрите, что происходит, когда дождевая капля попадает в лужу: от точки удара расходятся мелкие волны. Они *обязаны* иметь круговую форму, потому что двигаются с одинаковой скоростью во всех направлениях и начинаются в одной точке. Этого требует симметрия.

Окружности могут также порождать другие искривленные формы. Если представить, что окружность проткнули по диаметру и стали вращать вокруг этой оси в трехмерном пространстве, то получится сфера – форма мяча или планеты. Если окружность двигать по прямой перпендикулярно ее плоскости, появляется цилиндр – форма банки или коробки для шляп. Если окружность одновременно с поступательным движением сжимается, образуется конус, если расширяется – то усеченный конус (форма абажура).



Окружности, сферы, цилиндры и конусы очаровывали первых геометров, но при этом они считали, что работать с ними гораздо труднее, чем с треугольниками, прямоугольниками, квадратами, кубами и прочими прямолинейными формами, составленными из кусков прямых линий и плоскостей. Ученых интересовали площади криволинейных поверхностей и объемы криволинейных тел, но они понятия не имели, как решать такие задачи. Криволинейность была сильнее.

Бесконечность как строитель моста

Анализ начинался как отрасль геометрии[28]. Примерно в 250 году до нашей эры в Древней Греции вплотную занялись разгадкой кривых. Амбициозный план состоял в использовании бесконечности для построения моста между кривыми и прямыми. Приверженцы плана надеялись, что как только такая связь будет установлена, методы и техники прямолинейной геометрии можно будет перетащить через этот мост и применить для решения загадки кривых. Бесконечность поможет решить все старые задачи. По крайней мере, таков был настрой.

Должно быть, в то время такой план выглядел довольно надуманным. У бесконечности была сомнительная репутация – будто бы это нечто пугающее, а не полезное. Что еще хуже, само понятие бесконечности было весьма туманно и сбивало с толку. Что это вообще такое? Число? Место? Идея?

Тем не менее, как мы вскоре увидим, бесконечность оказалась манной небесной. Если учесть все открытия и технологии, которые в итоге выросли из анализа, то идея использовать бесконечность для решения трудных геометрических

---

[28] Смотрите раздел 4.5 в книге Burton, History of Mathematics; главы 2 и 3 в книге: Katz, History of Mathematics; главу 4 в книге Stillwell, Mathematics and Its History.

задач была одной из лучших в истории.

Конечно, в 250 году до нашей эры предвидеть это было невозможно. Тем не менее бесконечность тут же дала несколько впечатляющих результатов. Одним из первых и лучших стало решение давней загадки: как найти площадь круга[29].

Доказательство с помощью пиццы

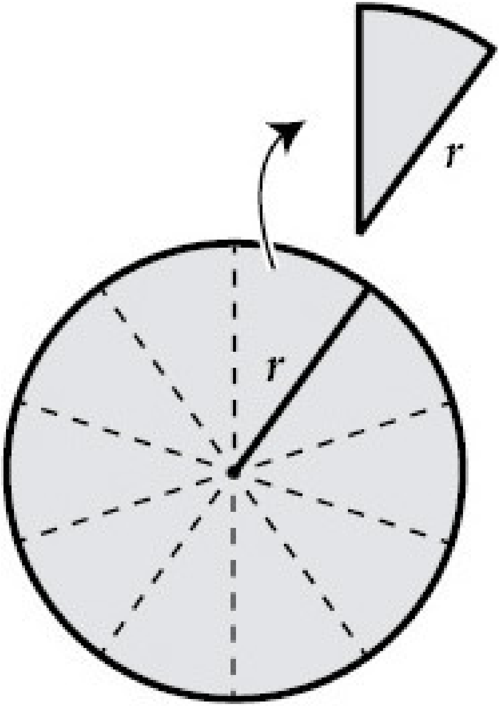
Перед тем как вдаваться в подробности, давайте набросаем ход рассуждений. Наша стратегия – представить круг в виде пиццы, а затем нарезать ее на бесконечное множество кусочков и волшебным образом переложить их так, чтобы получился прямоугольник. Это даст нам ответ, который мы ищем, поскольку перекладывание кусочков, очевидно, не меняет их площадь, а находить площадь прямоугольника мы умеем: нужно умножить его длину на ширину. Результатом будет формула для площади круга.

Для такого рассуждения пицца должна быть идеализированной математической пиццей – идеально плоской и круглой, с бесконечно тонкой корочкой. Обозначим буквой C ее периметр (или длину окружности) – расстояние вдоль границы. Длина окружности – вовсе не то, что обычно интересует любителей пиццы, однако при желании мы могли бы из-

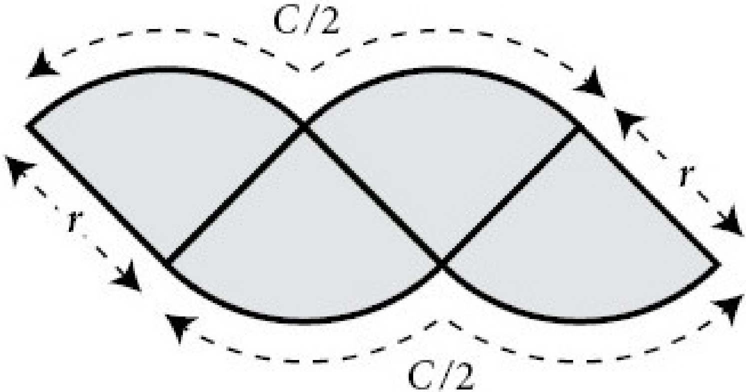
[29] Katz, History of Mathematics, раздел 1.5, представляет различные подходы к измерению площади круга, сделанные в различных мировых культурах. Первое доказательство было представлено Архимедом; смотрите Dunham, Journey Through Genius, глава 4, и Heath, The Works of Archimedes, 91–93.

мерить величину C с помощью рулетки.

Еще одна необходимая величина – радиус пиццы r, который определяется как расстояние от ее центра до любой точки корочки. В частности, если мы нарежем пиццу на ломтики, проводя разрезы от центра к краям, то длина прямого отрезка в таких ломтиках будет равна r.



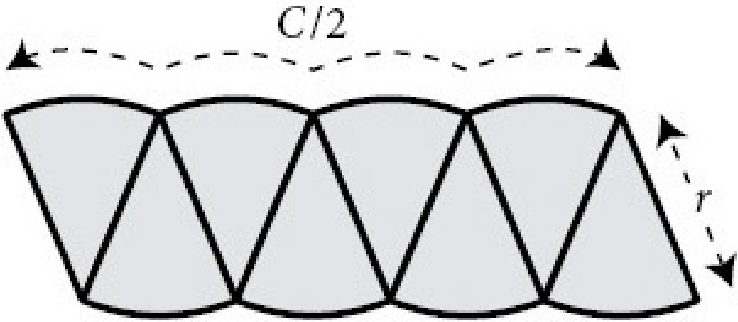
Предположим, что мы разделили пиццу на четыре части. Их можно переложить следующим способом, но он не выглядит слишком многообещающим.



Получившаяся фигура с выступами вверху и внизу смотрится несколько странно. Это явно не прямоугольник, и определить ее площадь непросто. Похоже, нам придется отступить. Но, как и в любой драме, герою перед триумфом предстоит преодолеть трудности. Драматическое напряжение нарастает.

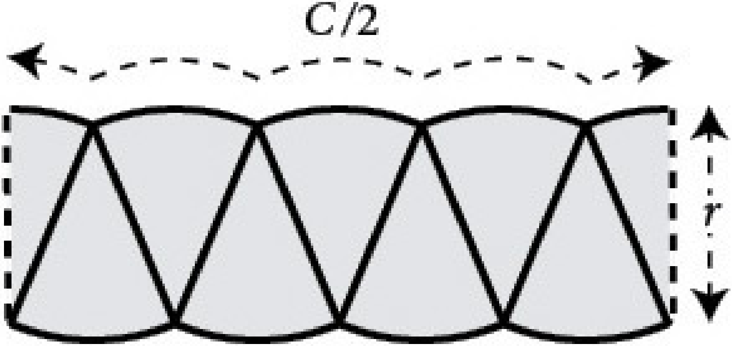
Однако раз уж мы тут застряли, то отметим две вещи, потому что они будут справедливы в ходе всего доказательства и в итоге дадут нам размеры искомого прямоугольника. *Первая* – одна половина корочки стала искривленной верхней границей новой фигуры, а вторая – нижней частью. Поэтому длина верхней границы равна $C/2$ и нижней границы – тоже $C/2$, как изображено на рисунке. Как мы увидим, в итоге эти границы превратятся в длинные стороны прямоугольника. *Вторая* – длина всех наклонных боковых сторон получившейся фигуры равна r, потому что это просто стороны исходных ломтиков пиццы. Эти боковые отрезки в итоге превратятся в короткие стороны прямоугольника.

Причина, по которой мы пока не видим никаких признаков искомого прямоугольника, – у нас еще недостаточно ломтиков. Если разрезать пиццу на восемь частей и переложить их таким же образом, то фигура окажется более прямоугольной.



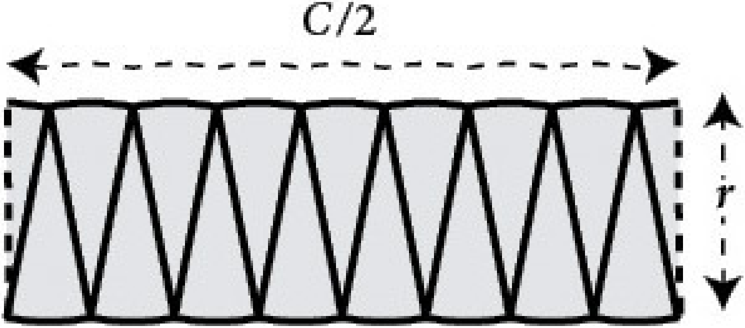
По сути, пицца начинает походить на параллелограмм. Неплохо – по крайней мере это почти прямоугольник. Выступы вверху и внизу уже не так выпирают, как на предыдущем рисунке, – из-за большего количества ломтиков. Как и ранее, длина верхней границы фигуры равна $C/2$, а боковой границы – r.

Чтобы картинка выглядела еще лучше, разрежем пополам один из боковых ломтиков и перенесем его на другую сторону.

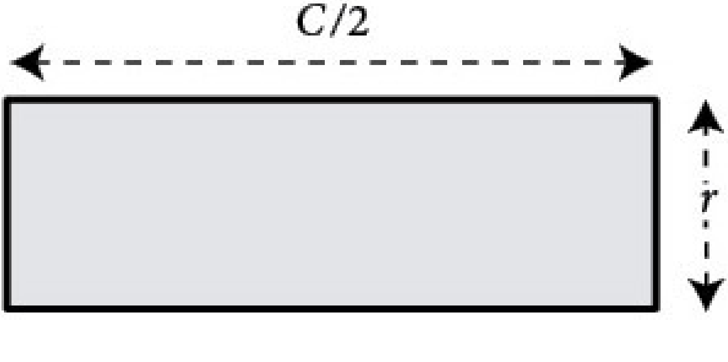


Теперь фигура очень похожа на прямоугольник. Да, вверху и внизу еще есть выступы из-за кривизны исходной корочки, но все же мы добились прогресса.

Похоже, увеличение числа кусков помогает, поэтому продолжим их нарезать. При шестнадцати ломтиках и таком же косметическом переносе половинки крайнего куска, как мы сделали только что, получается следующая фигура:



Чем больше кусков мы берем, тем сильнее сглаживаем выступы в верхней и нижней частях получающейся фигуры. Наши операции создают последовательность фигур, которые волшебным образом приближаются к определенному прямоугольнику. Поскольку фигуры к нему все ближе и ближе, назовем его *предельным* прямоугольником.



Смысл всей процедуры в том, что найти площадь предельного прямоугольника очень просто – достаточно перемножить его ширину и высоту. Все, что нам осталось, – выразить эти ширину и высоту через параметры исходного круга. Поскольку ломтики располагались вертикально, высота – это просто радиус r исходного круга, а ширина – половина длины его окружности, ведь его граница пошла на создание верхней и нижней границы прямоугольника – как это было для всех промежуточных фигур с выступающими краями. Следовательно, ширина равна $C/2$. Таким образом, площадь прямоугольника $A = r \times C / 2 = rC / 2$. Но учитывая, что перекладывание ломтиков не меняло площади исходного круга, то и его площадь должна быть точно такой же!

Этот результат для площади круга, $A = rC / 2$, впервые получил (используя аналогичные, но более строгие рассуждения) древнегреческий математик Архимед (287–212 до нашей эры) в трактате «Измерение круга».

Самым новаторским аспектом доказательства было привлечение на помощь бесконечности. Имея всего четыре, восемь или шестнадцать ломтиков, мы могли сложить только фигуру с выступами. После малообещающего старта мы продвинулись к успеху, начав брать больше ломтиков; при этом получающаяся фигура все сильнее приближалась к прямоугольнику. Однако только при *бесконечном множестве* кусков она становилась по-настоящему прямоугольной. Эта идея и легла в основу анализа. С бесконечностью все упрощается.

Пределы и загадка стены

Предел подобен недостижимой цели. Вы можете подбираться к нему все ближе и ближе, но никогда не пройдете весь путь до конца.

Например, в доказательстве, использующем пиццу, мы могли приближаться к прямоугольнику, нарезая все большее количество ломтиков и переставляя их. Но истинной «прямоугольности» нам никогда не добиться. Мы можем лишь приблизиться к этому идеалу. К счастью, в анализе недостижимость предела обычно не имеет значения. Нередко мы можем решить задачу, представив, что способны достичь предела, а затем посмотрев, что следует из такого представления. Фактически многие из пионеров в этой области сделали свои великие открытия именно таким образом. Логически – нет. С воображением – да. Успешно – весьма.

Предел – это тонкое понятие, и в анализе оно занимает центральное место. Его не просто уловить, потому что в повседневной жизни эта идея не встречается. Пожалуй, ближайшей аналогией будет загадка стены. Если вы проходите половину расстояния до стены, затем половину оставшегося расстояния, потом половину оставшегося и так далее, то достигнете ли в конце концов этапа, на котором доберетесь до стены?

Очевидно, что ответ отрицателен, потому что в загадке стены на каждом этапе вы проходите только половину пути, а не весь путь. Сделаете ли вы десять шагов, миллион или любое другое число, между вами и стеной всегда останется какой-то промежуток. Однако столь же очевидно, что вы можете подойти к стене сколь угодно близко. Это означает, что на каком-то этапе вы окажетесь от нее в сантиметре, миллиметре, нанометре или на любом ином ненулевом расстоянии, но никогда не закончите свой путь. Здесь стена играет роль предела. На то, чтобы строго определить это понятие, понадобилось две тысячи лет. До тех пор пионеры анализа прекрасно обходились интуицией. Так что не волнуйтесь, если пределы кажутся вам сейчас туманными. Мы познакомимся с ними лучше, наблюдая на практике. С современной точки зрения пределы – это фундамент, на котором построен весь анализ.

Если метафора со стеной кажется вам слишком мрачной и негуманной (кому захочется вечно приближаться к недосягаемой стене?), рассмотрите такую аналогию: все, что движется к какому-то пределу, подобно герою, занятому бесконечным поиском. Это не бесполезное занятие, как бессмысленная задача Сизифа, обреченного вечно вкатывать камень на гору только для того, чтобы увидеть, как он снова скатывается вниз. Когда в математике происходит приближение к пределу (как наши фигуры с выступами приближались к предельному прямоугольнику), это подобно тому, как главный герой стремится к чему-то, что, как он знает, невозможно, но все же надеется на успех, воодушевляясь прогрессом в своих попытках достичь недостижимой звезды.

Притча о 0,333…

Чтобы подкрепить важные идеи, что в бесконечности все упрощается и что пределы подобны недостижимым целям, возьмем пример из арифметики. Это задача преобразования обыкновенной дроби – например, 1/3 – в десятичную (в нашем случае $1/3 = 0{,}333\ldots$). Я хорошо помню, как моя школьная учительница математики мисс Стэнтон учила нас это делать. Запомнилось это потому, что она внезапно заговорила о бесконечности.

До этого момента я никогда не слышал, чтобы взрослые говорили о бесконечности. Мои родители определенно этого не делали. Это казалось секретом, о котором знали только дети. На детской площадке о нем постоянно упоминали в насмешках и издевках:

– Ну ты и дурак!

– А ты дурак вдвойне!

– А ты дурак бесконечность раз!

– А ты дурак бесконечность раз плюс один!

– Это то же самое, что бесконечность, идиот!

Такие поучительные разговоры убедили меня в том, что бесконечность ведет себя не так, как обычное число. Она не становится больше, если к ней прибавить 1. Даже добавление бесконечности не поможет. Несокрушимые свойства делали ее окончательным аргументом в дворовых разборках. Побеждает тот, кто применит бесконечность первым.

Однако никто из учителей до мисс Стэнтон не упоминал о бесконечности. Все в нашем классе уже знали о конечных десятичных дробях, используемых для представления денежных сумм, например 10,28 доллара, где есть две цифры после запятой. Напротив, бесконечные десятичные дроби, где после запятой было бесконечно много чисел, казались странными на первый взгляд, но становились естественными, как только мы начали изучать обыкновенные дроби.

Мы узнали, что дробь 1/3 можно записать как 0,333…, где многоточие означало, что тройки повторяются до бесконечности. Это имело для меня смысл, потому что, пытаясь поделить 1 на 3 в столбик, я застрял в бесконечном цикле: 1 меньше 3, поэтому получаем в частном ноль целых, дописываем к единице 0, делим 10 на 3, получаем 3 и остаток 1;

в итоге нужно снова делить 1 на 3, то есть мы возвращаемся к тому, с чего начали. Выхода из цикла не было, а значит, тройки при делении будут повторяться: 0,333…

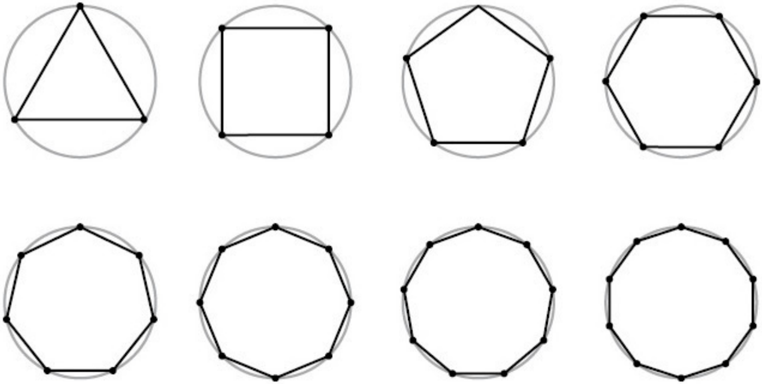
Многоточие после 0,333 истолковывается двумя способами. Наивное толкование состоит в том, что существует буквально бесконечное количество троек, находящихся справа от десятичной запятой вплотную друг к другу. Конечно, мы не можем записать их все, раз их бесконечно много, но с помощью многоточия показываем, что они там есть, по крайней мере в нашей голове. Я назову такую интерпретацию *актуальной бесконечностью* Преимущество ее в том, что она выглядит простой и здравой, пока мы не желаем особо задумываться о том, что означает бесконечность.

Более изящное толкование состоит в том, что 0,333… представляет собой некоторый предел – в точности такой же, как предельный прямоугольник для наших фигур в доказательстве с пиццей или стена для незадачливого путешественника. Только здесь 0,333… отображает предел последовательных десятичных чисел, которые мы генерируем при делении 1 на 3. Чем больше этапов в процессе деления, тем больше троек в десятичном разложении 1/3. Мы можем получить сколь угодно хорошее приближение к 1/3. Если нам не нравится $1/3 \approx 0,3$, мы можем сделать еще шаг и получить $1/3 \approx 0,33$ и так далее. Я назову это толкование *потенциальной бесконечностью* Она «потенциальна» в том смысле, что приближения можно получать сколь угодно долго. Ничто не мешает сделать миллион, миллиард или любое иное количество шагов. Преимущество этого толкования в том, что нам незачем прибегать к такому туманному понятию, как бесконечность. Мы всегда можем оставаться в области конечного.

Для работы с равенством вида $1/3 = 0{,}333\ldots$ не имеет значения, какой точки зрения мы придерживаемся. Они одинаково состоятельны и дают одни и те же математические результаты в любых нужных нам вычислениях. Однако в математике существуют ситуации, когда понятие актуальной бесконечности может вызвать логический хаос. Именно это я подразумевал, когда писал во введении о големе бесконечности. Иногда действительно важно, как мы думаем о результатах процесса, приближающегося к какому-то пределу. Делая вид, что процесс в реальности заканчивается и каким-то образом достигает нирваны бесконечности, подчас можно попасть в неприятную ситуацию.

Притча о многоугольнике с бесконечным числом углов

В качестве примера возьмем круг, расставим на его границе (окружности) через равные промежутки определенное количество точек и соединим их отрезками. При трех точках получим равносторонний треугольник, при четырех – квадрат, при пяти – правильный пятиугольник и так далее, последовательно получая все новые правильные многоугольники.



Обратите внимание, что чем больше точек мы используем, тем ближе наш многоугольник к кругу. При этом стороны многоугольников становятся все короче и многочисленнее. Наш круг – предел для построенных многоугольников.

Таким образом, бесконечность снова соединяет два мира. На этот раз она ведет нас от прямолинейности к криволинейности, от угловатых фигур к гладкому кругу, тогда как в случае с пиццей бесконечность, наоборот, преобразовала круг в прямоугольник.

Конечно же, на любом шаге многоугольник по-прежнему остается многоугольником. Это еще не круг и никогда им не станет. Фигуры приближаются к кругу, но никогда не совпадут с ним. Здесь мы имеем дело с потенциальной бесконечностью, а не с актуальной. Так что с логической точки зрения все безукоризненно.

Но что, если бы мы могли пройти весь путь до актуальной бесконечности? Был бы итоговый многоугольник с бесконечным количеством углов и бесконечно короткими сторонами кругом? Заманчиво так думать, ведь тогда многоугольник окажется гладким. Все углы будут сошлифованы. Все станет идеальным и красивым.

Очарование и опасность бесконечности

Здесь заложен общий принцип: пределы часто проще, чем приближения, ведущие к ним. Круг проще и изящнее, чем любой из угловатых многоугольников, к нему приближающих. То же самое относится и к доказательству с помощью пиццы, где предельный прямоугольник проще и элегантнее, нежели бугристые фигуры с некрасивыми выступами, и к дроби 1/3. Это проще и приятнее, нежели любое из неуклюжих приближений с большими числителями и знаменателями вроде 3/10, 33/100 или 333/1000. Во всех этих случаях предельная фигура или число проще и симметричнее, чем конечные приближения.

В этом и состоит очарование бесконечности. Здесь все становится лучше.

Помня об этом, давайте вернемся к притче о многоугольнике с бесконечно большим количеством углов. Нужно ли сделать решительный шаг и сказать, что круг – это действительно многоугольник с бесконечно большим количеством бесконечно малых сторон? Нет. Мы не должны поддаваться искушению и так поступать, поскольку это означает впасть в грех актуальной бесконечности. Это обрекло бы нас на логический ад.

Чтобы понять, почему, предположим, что мы на миг подумали, будто круг – на самом деле многоугольник с бесконечным числом углов и бесконечно малыми сторонами. Какова длина этих сторон? Если она равна 0, то общая длина всех сторон – бесконечность, умноженная на 0, – должна давать длину окружности. Но представьте окружность вдвое большего размера. Точно так же ее длина должна равняться бесконечности, умноженной на 0. Получается, бесконечность, умноженная на 0, должна равняться и длине нашей окружности, и вдвое большему числу. Что за ерунда? Не существует разумного способа определить результат умножения бесконечности на ноль, а потому нет разумного способа рассматривать круг как правильный многоугольник с бесконечным числом сторон.

Тем не менее в таком интуитивном представлении есть нечто искушающее. Подобно библейскому первородному греху, по той же причине трудно сопротивляться и первородному греху анализа – соблазну считать, что круг – это правильный многоугольник с бесконечным числом сторон. Он соблазняет нас запретным знанием, идеями, недоступными для обычных средств. На протяжении тысячелетий геометры пытались вычислить длину окружности. Если бы круг можно было заменить многоугольником со множеством крохотных прямых сторон, задача была бы гораздо проще.

Прислушиваясь к шипению этого змея-искусителя – но все же сдерживаясь, используя потенциальную бесконечность вместо более заманчивой актуальной, – математики научились решать задачу о длине окружности и другие загадки кривых. В следующих главах мы узнаем, как им это удалось, а пока попробуем еще глубже понять, насколько опасной может быть актуальная бесконечность. Этот грех ведет ко многим другим, включая тот, о котором учителя предупреждали нас в первую очередь.

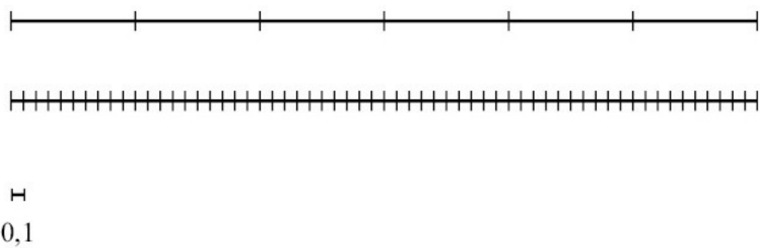
Грех деления на ноль

Во всем мире школьников учат, что делить на ноль нельзя. Должно быть, они шокированы существованием такого табу. Предполагается, что числа дисциплинированны и хорошо себя ведут. Урок математики – место для логики и рассуждений. И все же можно задавать о числах простые вопросы, на которые нет ответов, или пытаться сделать с ними простые вещи, которые не работают или не имеют смысла. Деление на ноль – одна из них.

Корень проблемы – в бесконечности. Деление на ноль вызывает бесконечность примерно так же, как доска для спиритических сеансов – духов из другого мира. Это рискованно. Не ходите туда.

Тем, кто не в силах сопротивляться искушению и желает понять, почему в тенях скрывается бесконечность, советуем поделить 6 на какое-нибудь маленькое число, близкое к нулю, но не равное ему, например 0,1. В этом ничего запретного нет. Если разделить 6 на 0,1, получится 60, довольно прилично. Поделим 6 на еще меньшее число, скажем 0,01; ответ будет больше – 600. Если мы отважимся разделить 6 на число, которое гораздо ближе к 0, допустим, на 0,0000001, то ответ будет еще больше и составит 60 000 000. Тенденция ясна. Чем меньше знаменатель, тем больше частное. В пределе, когда знаменатель приближается к нулю, частное стремится к бесконечности. Вот настоящая причина, почему нельзя делить на 0. Малодушные говорят, что ответ неопределенный, но на самом деле он бесконечный.

Все это можно представить себе следующим образом. Вообразите, что вы делите 6-сантиметровую линию на части длиной 0,1 сантиметра. Получается 60 кусков, уложенных вплотную друг к другу.



Точно так же (но я не буду пробовать это нарисовать) эту линию можно поделить на 600 частей по 0,01 сантиметра или на 60 000 000 частей по 0,0000001 сантиметра.

Если мы продолжим и доведем это безумное деление до предела, то придем к заключению, что наша 6-сантиметровая линия состоит из *бесконечного* числа частей *нулевой* длины. Возможно, это звучит правдоподобно. В конце концов, линия состоит из бесконечного количества точек, и каждая точка имеет нулевую длину.

Но с философской точки зрения нервирует то, что аналогичное рассуждение можно применить к линии *любой* длины. В самом деле, в числе 6 нет ничего особенного. Мы могли бы с равным успехом утверждать, что линия длиной 3 сантиметра, или 49,57, или 2 000 000 000 состоит из бесконечного числа точек нулевой длины. Очевидно, что умножение 0 на бесконечность может дать нам любой мыслимый результат – 6, 3, 49,57 или 2 000 000 000. С математической точки зрения это ужасно.

Грех актуальной бесконечности

Прегрешение, которое втянуло нас в эту путаницу, заключалось в том, что мы вообразили, будто действительно можем *достичь* предела и трактовать бесконечность как достижимое число. Еще в IV веке до нашей эры греческий философ Аристотель[30] предупреждал, что такое обращение с бес-

---

[30] Henry Mendell, Aristotle and Mathematics, Stanford Encyclopedia of Philosophy,

конечностью способно привести к различным логическим неприятностям. Он выступал против актуальной бесконечности[31], уверяя, что смысл имеет только потенциальная бесконечность.

В контексте разрезания линии на части потенциальная бесконечность означает, что линию можно разрезать на сколь угодно большое количество частей, но оно всегда конечно, а длина частей не равна 0. Это вполне допустимо и не вызывает никаких логических затруднений.

Что запрещено – так это идея, что можно пройти весь путь до актуальной бесконечности и получить бесконечное число частей нулевой длины. Аристотель считал, что это ведет к бессмыслице – как в нашем случае, когда произведение бесконечности и 0 может дать любое число. Поэтому он запретил пользоваться актуальной бесконечностью в математике и философии. Математики поддерживали его мнение в течение следующих двадцати двух столетий.

Когда-то в далекие доисторические времена кто-то понял, что числа никогда не заканчиваются. Вместе с этой мыслью родилась бесконечность. Это числовой аналог глубин, скрытых в нашей психике, в наших ночных кошмарах о бездонных ямах и в наших надеждах на вечную жизнь. Именно бесконечность лежит в основе множества наших мечтаний,

---

https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/aristotle-mathematics/.

[31] Katz, History of Mathematics, 56, и Stillwell, Mathematics and Its History, 54, обсуждают аристотелевскую разницу между актуальной бесконечностью и потенциальной бесконечностью.

страхов и безответных вопросов. Насколько велика Вселенная? Сколько длится вечность? Насколько могуществен Бог? Тысячи лет бесконечность сбивает с толку лучшие умы человечества во всех областях мысли – от религии и философии до науки и математики. Ее запрещали, объявляли вне закона и отвергали. Во времена инквизиции монах Джордано Бруно[32] был сожжен заживо на костре за предположение, что Бог в своей бесконечной силе создал бесчисленные миры.

Парадоксы Зенона

Примерно за два тысячелетия до казни Джордано Бруно бесконечность осмелился созерцать другой отважный философ. Зенон Элейский (около 490–430 до нашей эры) изложил ряд апорий (парадоксов), связанных с пространством, временем и движением, и бесконечность играла в них главную роль. Эти апории предвосхитили идеи, положенные в основу анализа, и обсуждаются до сих пор. Бертран Рассел называл их неизмеримо тонкими и глубокими[33].

Мы не знаем, что именно пытался показать своими рас-

---

[32] Опираясь на новые свидетельства, Martínez, Burned Alive, утверждает, что Бруно был сожжен за свою космологию, а не за теологию. Смотрите также A. A. Martínez, Was Giordano Bruno Burned at the Stake for Believing in Exoplanets? Scientific American (2018), https://blogs.scientificamerican.com/observations/was-giordano-bruno-burned-at-the-stake-for-believing-in-exoplanets/. Также смотрите D. Knox, Giordano Bruno, Stanford Encyclopedia of Philosophy, https://plato.stanford.edu/entries/bruno/.

[33] Эссе Рассела о Зеноне и бесконечности Mathematics and the Metaphysicians, воспроизведено в книге Newman, The World of Mathematics, vol. 3, 1576–90.

суждениями Зенон, поскольку ни одно из его сочинений не сохранилось, если они вообще существовали. Его рассуждения дошли до нас в передаче Платона и Аристотеля, которые в основном пытались их опровергнуть. В их пересказе Зенон пытался доказать, что изменения невозможны. Наши чувства говорят нам иное, но они нас обманывают. Изменение, согласно Зенону, – это иллюзия.

Особенно известны три парадокса Зенона[34],[35]. Первый, «Дихотомия», аналогичен загадке стены, но гораздо печальнее. Он гласит, что вам не удастся даже сдвинуться с места, поскольку для того, чтобы сделать первый шаг, нужно сделать полшага, а перед этим – четверть шага и так далее. Так что вы не только не сможете добраться до стены, но даже не сможете начать движение.

Это блестящий парадокс. Кто бы мог подумать, что для шага требуется выполнить бесконечно много подзадач? Хуже того, нет самой *первой* задачи, которую надо выполнить. Она не может состоять в том, что нужно сделать полшага, потому что до этого пришлось бы сделать четверть шага, а

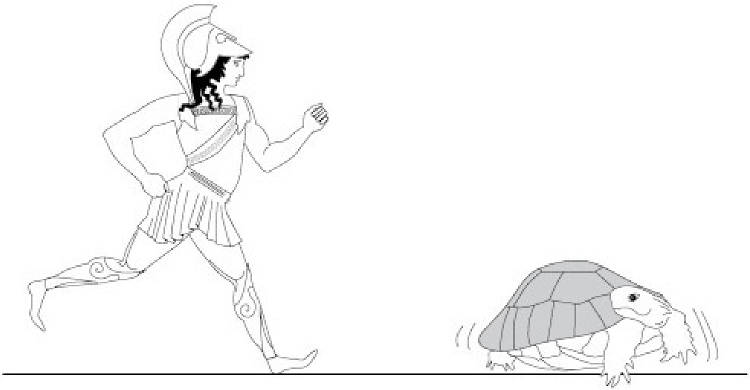
---

[34] Всего в античных трудах упоминается 40 апорий Зенона, но до наших дней дошло 9. *Прим. пер.*

[35] Mazur, Zeno's Paradox. Смотрите также Burton, History of Mathematics, 101–2; Katz, History of Mathematics, раздел 2.3.3; Stillwell, Mathematics and Its History, 54; John Palmer, Zeno of Elea, Stanford Encyclopedia of Philosophy, https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/zeno-elea/; и Nick Huggett, Zeno's Paradoxes, Stanford Encyclopedia of Philosophy, https://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno/.

до того – восьмую часть шага и так далее. Если вы думаете, что у вас много дел перед завтраком, представьте, что вам нужно закончить бесконечное количество дел, прежде чем добраться до кухни.

Другой парадокс, названный «Ахиллес и черепаха», утверждает, что быстрый бегун (Ахиллес) никогда не догонит медленного бегуна (черепаху), если у того будет фора.



К тому времени, когда Ахиллес достигнет места, откуда отправилась в путь черепаха, она успеет немного продвинуться вперед. К тому моменту, когда Ахиллес достигнет этого нового места, черепаха снова продвинется, и так далее. Поскольку все мы считаем, что быстрый бегун *может* обогнать медленного, то либо наши чувства нас обманывают, либо что-то не так с нашими рассуждениями о движении, пространстве и времени.

В этих первых двух парадоксах Зенон, похоже, возражал против принципиальной непрерывности пространства и времени, то есть против того, что их можно делить до бесконечности. Его умной стратегией было применение доказательства от противного (некоторые утверждают, что он его и изобрел), известное среди юристов и логиков как *reductio ad absurdum* (доведение до абсурда). В обоих парадоксах Зенон предположил непрерывность пространства и времени, а затем вывел из этого допущения противоречие, поэтому предположение о непрерывности должно быть ложным. Анализ основан именно на этом предположении, а потому ставки тут весьма высоки. Он опровергает Зенона, демонстрируя ошибки в его рассуждениях.

Например, вот как анализ справляется с Ахиллесом и черепахой. Допустим, что черепаха стартует в 10 метрах перед Ахиллесом, а Ахиллес бежит вдесятеро быстрее своей соперницы – скажем, 10 метров в секунду против 1 метра в секунду. Таким образом, за 1 секунду Ахиллес отыгрывает 10-метровую фору черепахи. За это время черепаха продвинется на 1 метр. Чтобы покрыть это расстояние, Ахиллесу понадобится еще 0,1 секунды. За это время черепаха преодолеет еще 0,1 метра. Продолжая рассуждать в том же духе, мы видим, что последовательные отрезки времени, которые нужны Ахиллесу, чтобы покрыть разделяющее расстояние, складываются в бесконечный ряд:

$$1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots = 1{,}111\ldots \text{ секунд.}$$

Если записать это число в виде обыкновенной дроби, получим 10/9 секунды. Именно столько времени понадобится быстроногому герою мифа, чтобы догнать черепаху. И хотя Зенон был прав в том, что Ахиллесу требуется выполнить бесконечное количество задач, в этом нет ничего парадоксального. Как показывает математика, он может справиться с ними за конечный промежуток времени.

Такое рассуждение использует анализ. Мы просто суммируем бесконечный ряд и вычисляем предельное значение, как делали при обсуждении, почему 0,333… = 1/3. Всякий раз, когда мы работаем с бесконечной записью десятичных чисел, мы применяем анализ (хотя большинство людей отнеслись бы к этому как к школьной арифметике).

Кстати, анализ – не единственный способ справиться с такой задачей. Мы могли бы использовать алгебру. Для этого нам нужно выяснить, где в произвольный момент времени t находится на трассе каждый из соперников. Пусть Ахиллес начинает в нулевой точке. Поскольку он бежит со скоростью 10 метров в секунду, а расстояние равно произведению скорости на время, то в момент t он пробежит $10 \times t$. Что касается черепахи, то она начинает двигаться в точке 10 и перемещается со скоростью 1 метр в секунду, поэтому в момент t она находится в точке $10 + 1 \times t$. Чтобы определить время, когда герой настигнет соперницу, нужно приравнять эти два выражения, поскольку с алгебраической точки зрения это означает, что Ахиллес и черепаха находятся в одной точке в один момент времени. Получаем уравнение

$$10t = 10 + t.$$

Чтобы решить его, вычитаем t из обеих частей и получаем $9t = 10$. Делим обе части на 9 и получаем $t = 10 / 9$ секунды, то есть ровно тот же ответ, что нам дал анализ. Таким образом, с точки зрения анализа в ситуации с Ахиллесом и черепахой нет никакого парадокса. Если пространство и время непрерывны, все прекрасно работает.

Зенон в цифровом мире

В третьей апории под названием «Стрела» Зенон выступает против альтернативной идеи, что пространство и время дискретны[36]

---

[36] От лат. discretus «отделенный, раздельный». *Прим. пер.*

Конец ознакомительного фрагмента.