Дмитрий Кудрец

Занимательная комбинаторика

Дмитрий Кудрец

Занимательная комбинаторика

«Издательские решения»

Кудрец Д.

Занимательная комбинаторика / Д. Кудрец — «Издательские решения»,

ISBN 978-5-00-507620-5

В книге популярно и доступно изложены основные сведения комбинаторики. Приводятся примеры решения задач на подсчет количества перестановок, размещений и сочетаний.Рекомендуется для учащихся и учителей школ, гимназий, а также для широкого круга читателей.

ISBN 978-5-00-507620-5

Содержание

Занимательная комбинаторика

Дмитрий Кудрец

ISBN 978-5-0050-7620-5
Создано в интеллектуальной издательской системе Ridero

Предисловие

В повседневной жизни мы часто сталкиваемся с ситуациями, когда нам необходимо рассадить гостей за столом, составить букеты из имеющихся цветов, подсчитать количество выигрышных билетов в лотерее и т. д. Но задумывались ли вы, сколькими вариантами мы можем это сделать? На этот вопрос помогает ответить комбинаторика – раздел математики, изучающий задачи выбора и расположения элементов из некоторого множества в соответствии с заданными правилами.

Формулы и методы комбинаторики широко используются в теории вероятностей для подсчета вероятности случайных событий.

Комбинаторика как самостоятельная наука появилась в XVIII веке. Рождение комбинаторики связано с трудами Блеза Паскаля и Пьера Ферма по теории азартных игр. Большой вклад в развитие комбинаторики методов внесли Готфрид Вильгельм Лейбниц, Яков Бернулли, Леонард Эйлер и другие выдающиеся ученые.

Перестановки

Однажды в выходной день Маша решила навести порядок в своих игрушках и рассадить в ряд медвежонка, куклу и львёнка.

Вначале она рассадила их так:

Но ей не понравилось, что медвежонок сидит рядом со львёнком. Тогда Маша пересадила игрушки следующим образом:

Но и тут Маша не смогла определиться, кто должен сидеть справа от куклы – львёнок или медвежонок?

Так бы Маша и продолжала бы переставлять игрушки с места на место, если бы в комнату не вошел Машин папа.

– Ты чем это занимаешься? – поинтересовался он у Маши.

– Да вот, – грустно вздохнула Маша, – пытаюсь расставить игрушки, но у меня что-то не получается. Столько много разных вариантов, а мне ни один не нравится.

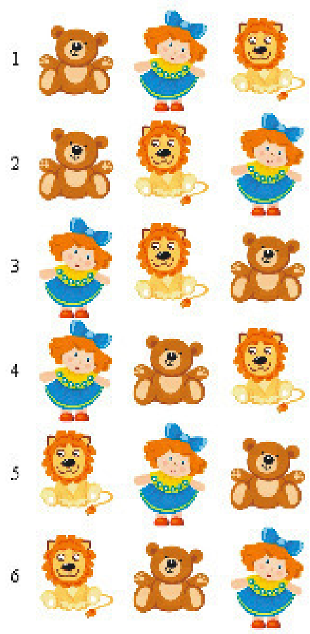
– Допустим, – не согласился папа, – что вариантов не так уж и много. У тебя три игрушки, значит, вариантов всего шесть.

– Как ты так быстро посчитал? – удивилась Маша.

– Есть такая наука, – пояснил папа, – комбинаторика. Она и занимается подсчетом различных вариантов перестановок. Допустим у тебя всего две игрушки – медвежонок и кукла. Их можно переставить только двумя способами:

или

Если у тебя три игрушки, то это можно сделать уже шестью способами:



– А если у меня четыре игрушки? – спросила Маша.

– Тогда существует 24 варианта различных способов их перестановки. В комбинаторике такие упорядочения множества, состоящего из определенного количества элементов, так и называют – ***перестановками***. Особенностью перестановок является то, что в них должны участвовать все элементы данного множества.

Количество всех возможных перестановок можно найти по формуле, где *n* – количество элементов данного множества.

$$P_n=n!$$

Символ *n*! называется ***факториалом*** и обозначает произведение всех целых чисел от 1 до *n*.

.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n$$

Например, 3!=1•2•3=6. 4!=1•2•3•4=24.

При вычислении факториала принято считать, что 0!=1, 1!=1.

– А если у меня пять игрушек? – не унималась Маша.

– В таком случае у тебя 1•2•3•4•5=120 вариантов перестановок.

– Так много? – удивилась Маша.

– А если множество состоит из 6 элементов, – продолжал папа, – то число перестановок будет равняться 720. Для 7 элементов число перестановок будет равно 5040, для 8 – 40320 и так далее. Чем больше число элементов, тем больше число перестановок.

– А если вместо пяти игрушек взять пять конфет? – спросила Маша. – Число перестановок изменится?

– Если конфеты все различные, то, как и в случае с игрушками число перестановок все равно будет 120.

– То есть, – заключила Маша, – число перестановок не зависит от того, что я переставляю – игрушки, конфеты или еще что-нибудь?

– Совершенно верно! – подтвердил папа. – Главное, чтобы в перестановках участвовали все элементы множества, и элементы должны быть различными.

– Посчитать число перестановок несложно, – согласилась Маша, – а вот переставить игрушки и не запутаться при этом гораздо сложнее.

– Для того чтобы не запутаться, – успокоил Машу папа, – можно использовать дерево возможных вариантов. Одолжим на время у мамы пуговицы.

В первый ряд положим 3 пуговицы разного цвета. Мы уже считали, что возможных перестановок для трех элементов равно шести.

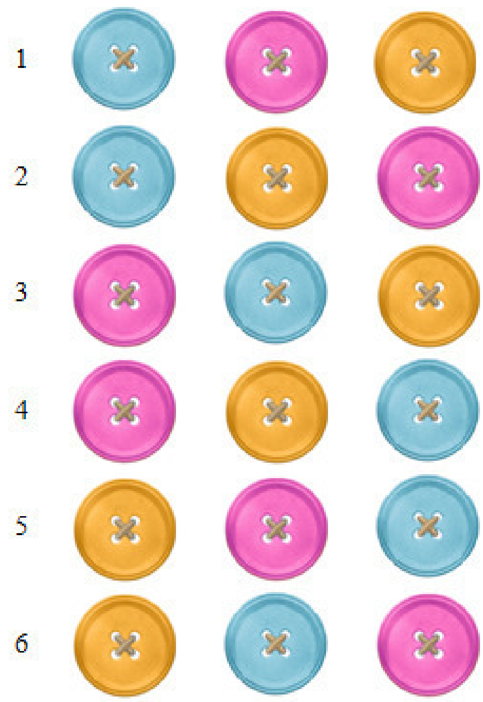
Второй ряд, он будет у нас вспомогательным, мы составим следующим образом:

– То есть мы добавили пуговицы других цветов? – предположила Маша.

– Совершенно верно. В третьем ряду мы просто поменяем пуговицы местами. Вот так:

– А что мы будем делать с четвёртым рядом? – поинтересовалась Маша.

– А четвертого ряда не будет, – ответил папа. У нас три пуговицы, то есть три элемента множества, значит и рядов будет три. Осталось только, следуя сверху вниз, перечислить все варианты перестановок:



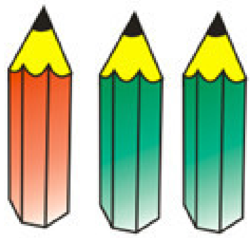
И совсем несложно. Главное быть внимательным.

– Как интересно! – воскликнула Маша. – А если у меня все-таки есть одинаковые игрушки, то количество перестановок считается точно также?

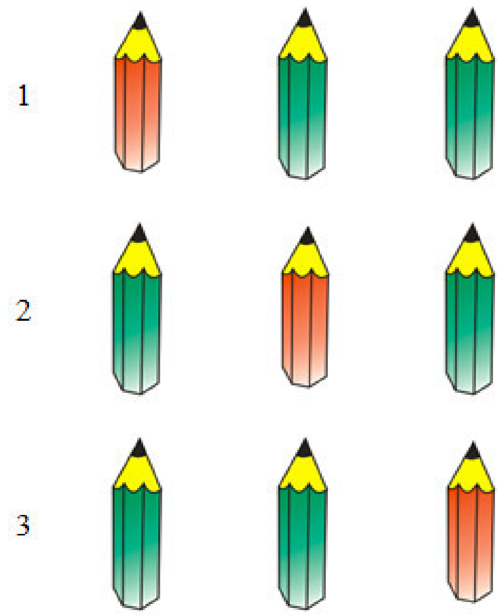
– Не совсем, – пояснил папа. – Если некоторые элементы множества повторяются, то такие перестановки называются ***перестановками с повторением***.

Перестановки с повторением

– Пусть у тебя есть два одинаковых медвежонка.
– Но у меня нет двух одинаковых медвежонка, – возразила Маша.
– Хорошо, – согласился папа. – Тогда возьмем два зеленых карандаша и один красный.



Карандашей всего 3, значит, число перестановок равно 6. Но нет разницы, если поменять зеленые карандаши местами. Мы получим тот же самый вариант. Поэтому число перестановок с повторением будет всего 3:



– То есть, – предположила Маша, – если есть одинаковые элементы, то перестановок будет меньше.

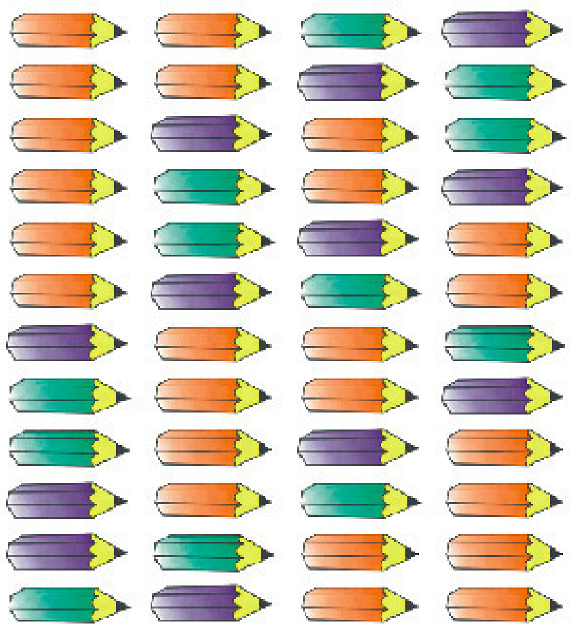
– Да. Пусть множество состоит из n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т. д. Всего элементов $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. Тогда число перестановок с повторением равно.

$$\widetilde{P}_{n_1, n_2, \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \ldots n_k!}$$

– Какая сложная формула! – воскликнула Маша.

– Нисколько, – возразил папа. – И ты сама сейчас в этом убедишься. Пусть у нас есть карандаши. Два красных, один зеленый и один синий. То есть $n_1=2$, $n_2=1$, $n_3=1$. Всего карандашей $n_1+n_2+n_3=2+1+1=4$. Следовательно, число перестановок с повторением равно.

$$\widetilde{P}_{n_1, n_2, n_3} = \frac{4!}{1!\,1!\,2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} = 12$$



– Хорошо, – согласилась Маша. – А если у меня есть карточки с буквами из которых составляют слова? Буквы же в словах могут повторяться.

– И сколько ты хочешь взять карточек?

– Сейчас, – Маша открыла ящик стола и вытащила наружу карточки с буками. – Вот. Это у меня ещё с первого класса осталось.

– Давай посмотрим, – папа разложил на столе карточки. – У нас есть три буквы А, две буквы У и две буквы М.

– Всего семь, – подсказала Маша.

– Воспользуемся формулой для перестановок с повторением.. Значит, существует 210 вариантов перестановок.

$$\widetilde{P}_{n_1, n_2, n_3} = \frac{7!}{2!2!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$$

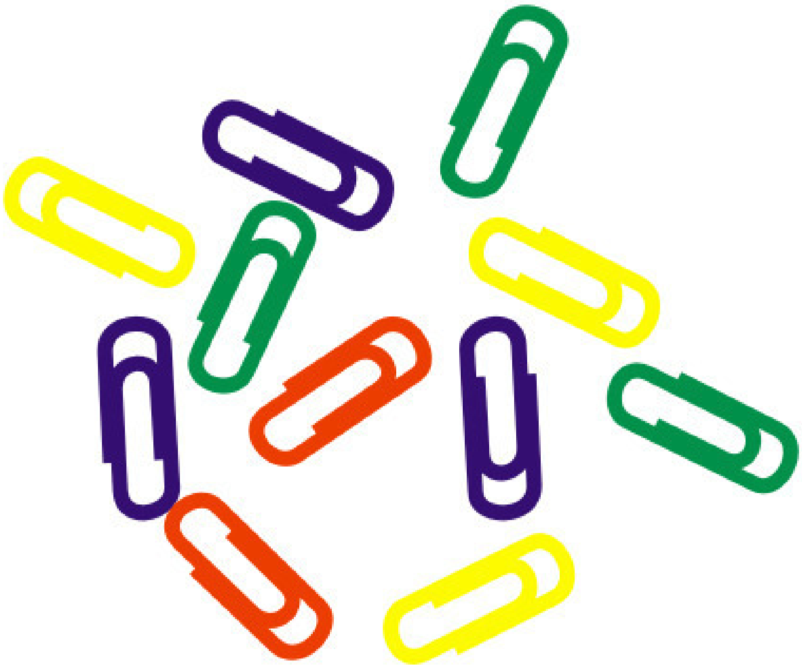
– Так много? – удивилась Маша.

– Так много, – подтвердил папа. – А если у нас есть имеются другие наборы элементов, то и число перестановок будет другим.

– А можно я теперь попробую сама?

– Конечно. А что мы будем считать?

– У меня есть цветные скрепки.



Три зеленых, три синих, три желтых и две красных. Всего 11 скрепок. Значит, число перестановок будет равно.

$$\widetilde{P}=\frac{11!}{3!3!3!2!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}=3\cdot5\cdot7\cdot8\cdot10\cdot11=92400$$

Вот так число! Это сколько же времени уйдет на то, чтобы переложить все скрепки?

– Перекладывать скрепки мы не будем, – возразил папа. – А ты мы на это дело потратим все выходные. А тебе еще уроки учить нужно. Да и у меня есть дела.

– Ну, папа! – заныла Маша. – Давай еще что-нибудь посчитаем!

– В другой раз, – ответил папа. – Тем более что в комбинаторике изучаются не только перестановки. А это тебе задачки для самостоятельного решения:

Конец ознакомительного фрагмента.