Джордан Элленберг

Профессор математики,
автор бестселлера
«Как не ошибаться»

Форма реальности

Перевод
Евгения Поникарова

Под редакцией
профессора,
члена Academia Europaea
Михаила Гельфанда

Скрытая геометрия стратегии, информации, общества, биологии и всего остального

Эволюция

МИФ

Джордан Элленберг
Форма реальности
Серия «МИФ Научпоп»
Серия «МИФ. Научно-популярные книги»

Текст предоставлен правообладателем
http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=69494458
Джордан Элленберг. Форма реальности. Скрытая геометрия стратегии, информации, общества, биологии и всего остального: Манн, Иванов и Фербер; Москва; 2023
ISBN 9785001953159

Аннотация

Эта книга изменит ваше представление о мире. Джордан Элленберг, профессор математики и автор бестселлера МИФа «Как не ошибаться», показывает всю силу геометрии – науки, которая только кажется теоретической.

Математику называют царицей наук, а ее часть – геометрия – лежит в основе понимания мира. Профессор математики в Висконсинском университете в Мэдисоне, научный сотрудник Американского математического общества Джордан Элленберг больше 15 лет популяризирует свою любимую дисциплину.

В этой книге с присущими ему легкостью и юмором он рассказывает, что геометрия не просто измеряет мир – она объясняет его. Она не где-то там, вне пространства и времени, а здесь и сейчас, с нами. Она помогает видеть и понимать скрытые взаимосвязи и алгоритмы во всем: в обществе, политике и бизнесе. Геометрия скрывается за самыми важными научными, политическими и философскими проблемами.

Для кого книга

Для тех, кто хочет заново открыть для себя геометрию и узнать об этой увлекательной науке то, чего не рассказывали в школе.

Для всех, кому интересно посмотреть на мир с новой стороны.

На русском языке публикуется впервые.

Содержание

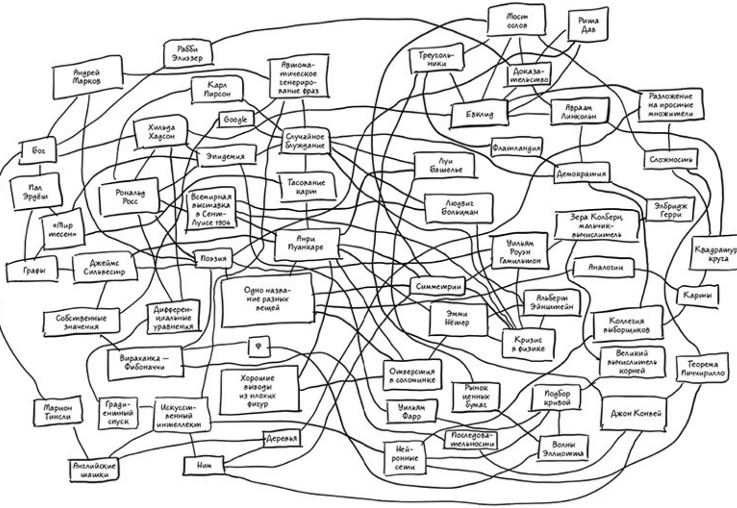
Джордан Элленберг
Форма реальности. Скрытая геометрия стратегии, информации, общества, биологии и всего остального

Научный редактор Михаил Гельфанд

В тексте неоднократно упоминаются названия социальных сетей, принадлежащих Meta Platforms Inc., признанной экстремистской организацией на территории РФ.

* * *

Обитателям пространства в целом и CJ и AB в частности



Введение. Каковы вещи на самом деле и как они выглядят

Я – математик, публично говорящий о математике. Это как будто снимает блокировку внутри людей, и они начинают делиться со мной историями, которые, я чувствую, уже давно (а может быть, и никогда) никому не рассказывали. И это истории о математике. Иногда они печальные: учитель математики втаптывает эго ребенка в грязь безо всякой причины – просто из низости. Иногда немного счастливее: переживание внезапного озарения в детской голове, к которому взрослые хотели бы вернуться, но так и не смогли. (На самом деле это тоже печально.)

Часто эти истории связаны с геометрией. Похоже, она выделяется в воспоминаниях о старшей школе, как странная высокая нота в припеве. Одни ненавидят ее, говоря, что именно после изучения геометрии математика утратила для них смысл. Другие утверждают, что геометрия – единственная часть математики, которая им понятна. Геометрия – это кинза математики. Мало кто к ней относится нейтрально.

Что же выделяет геометрию? Каким-то образом она первична и встроена в наши тела. С криком покинув материнскую утробу, мы тут же начинаем изучать окружающий мир, каков он на самом деле и как выглядит. Я не из тех людей, которые станут уверять, что все важное в вашей внутренней жизни восходит к потребностям живших в саванне косматых охотников-собирателей, однако вряд ли можно сомневаться в том, что эти люди должны были развить понимание форм, расстояний и мест, вероятно, еще до того, как у них появились слова для их названий. Когда южноамериканские шаманы[1] (и их неюжноамериканские подражатели) совершают свой ритуал, первое, что происходит (ну хорошо, первое, что происходит после неконтролируемой рвоты), – это восприятие чистых геометрических форм: повторяющиеся двумерные узоры вроде решеток в классической мечети или трехмерное изображение шестиугольных ячеек, собранных в колеблющиеся соты. Геометрия существует даже тогда, когда остальная часть нашего мыслящего разума отключена.

Скажу честно: сначала я был к геометрии равнодушен. Что, наверное, странно, если учесть, что сейчас я математик, а заниматься геометрией – моя непосредственная работа!

Все было иначе, когда я был членом школьной команды по математике. Команда называлась «Углы ада»[2], на турниры мы приходили в одинаковых черных футболках и обя-

---

[1] **Когда южноамериканские шаманы:** страница 10 в работе Benny Shanon's, "Ayahuasca Visualizations: A Structural Typology," Journal of Consciousness Studies 9, no. 2 (2002): 3–30, просто на случай, если вы подумали, что я говорю о собственном опыте.

[2] Игра слов: Hell's Angles звучит похоже на Hells Angels. «Ангелы ада» – один из крупнейших в мире клубов байкеров. *Прим. пер.*

зательно приносили магнитофон, который играл песню Hip to Be Square[3] группы Huey Lewis and the News. При этом мои товарищи прекрасно знали, что у меня проблемы с задачками типа «показать, что угол APQ равен углу CDF» или что-то в этом роде. Это не значит, что я их вообще не решал! Я их решал, но самым громоздким из возможных способов, то есть вводил координаты для точек, а затем исписывал целые страницы алгебраическими вычислениями, находя площади треугольников и длины отрезков. Все что угодно – лишь бы не так, как принято в геометрии. Иногда я решал задачу правильно, иногда – неправильно. Но каждый раз решение было уродливым.

Если и существует такая вещь, как «геометричность по природе», то я – ее полная противоположность. Можете попробовать пройти с ребенком[4] геометрический тест. Вы показываете ему последовательно пары картинок: преимущественно одинаковой формы, но примерно в каждой третьей паре правая фигура перевернута. Дети гораздо дольше рассматривают перевернутые формы. Они осознают: что-то происходит; и их исследующие мир умы тянутся к новому. Дошкольники, дольше разглядывающие перевернутые фигу-

---

[3] Название песни можно перевести примерно так: «Круто быть нормальным», то есть не бунтарем, а законопослушным, обычным, скучным человеком. *Прим. пер.*

[4] **Можете попробовать пройти с ребенком:** Jillian E. Lauer and Stella F. Lourenco, “Spatial Processing in Infancy Predicts Both Spatial and Mathematical Aptitude in Childhood,” Psychological Science 27, no. 10 (2016): 1291–98.

ры, как правило, получают более высокие баллы и в тестах по математике на пространственное мышление. Они быстрее и точнее представляют себе формы и их внешний вид после поворотов или склеивания. Ну а я? У меня таких способностей практически нет. Знаете маленькую картинку на терминалах бензоколонок, которая показывает, как правильно ориентировать кредитную карту? Для меня она бесполезна. Перевести этот плоский рисунок в трехмерное действие – за пределами моих умственных способностей. Каждый раз мне приходится проверять все варианты – магнитная полоса вверху справа, магнитная полоса вверху слева, магнитная полоса внизу справа, магнитная полоса внизу слева, – пока терминал не согласится прочитать мою карту и продать мне немного бензина.

И все же в целом считается, что геометрия лежит в основе того, что требуется для реального понимания мира. Кэтрин Джонсон, математик из НАСА, ставшая широко известной после книги и фильма «Скрытые фигуры», описала свой успех в отделе летных исследований так: «Все парни имели степени[5] по математике, но забыли всю геометрию, которую знали… А я все еще ее помнила».

---

[5] **Все парни имели степени:** Margalit Fox, “Katherine Johnson Dies at 101; Mathematician Broke Barriers at NASA,” New York Times, Feb. 24, 2020, из интервью 2010 года в Fayetteville (NC) Observer.

Могучее очарование

Уильям Вордсворт в длинной, во многом автобиографической поэме «Прелюдия, или Становление сознания поэта» рассказывает несколько неправдоподобную историю о жертве кораблекрушения – выброшенном на берег человеке, у которого не было ничего, кроме экземпляра «Начал» Евклида (книги с аксиомами и теоремами, положившей начало геометрии как предмету около двух с половиной тысяч лет назад). Это было удачей для потерпевшего кораблекрушение: несмотря на подавленность и голод, он утешался, пробираясь через рассуждения Евклида и вычерчивая рисунки палкой на песке. «Вот что значит быть молодым, чувствительным, поэтичным!» – пишет Вордсворт в зрелом возрасте. Или, говоря словами самого поэта:

…Огромна абстракций чистых власть
над тем умом, что сам в себе не властен
и влеком толпою образов…[6], [7]

(У шаманов аналогичный подход: ритуал перезагружает мозг и поднимает разум над мучительным лабиринтом, где,

---

[6] Перевод Т. Стамовой. *Прим. ред.*

[7] **Покоя не давал:** цитируется, например, в работе Newton P. Stallknecht, “On Poetry and Geometric Truth.” The Kenyon Review 18, no. 1 (1956): 2.

как ему кажется, он застрял.)

Самое странное в рассказе Вордсворта о геометрии и кораблекрушении то, что в основном он правдив. Поэт позаимствовал его из мемуаров Джона Ньютона – молодого помощника работорговца, который в 1745 году оказался на острове Плантейн у берегов Сьерра-Леоне; правда, не в результате кораблекрушения: его бросил там хозяин. Островок не был необитаемым: с ним жили африканцы, и его главной мучительницей была африканская женщина, контролировавшая распределение еды. «Важная персона в некоей собственной стране, – описывает ее Ньютон, а затем жалуется, поистине поразительно не улавливая сути дела: – Эта женщина (не знаю, по какой причине) с самого начала была настроена против меня».

Через несколько лет Ньютон едва не умирает в море, ударяется в религию, становится англиканским священником, пишет книгу «Великая благодать» (в которой предлагает изучать совсем другую книгу, если вы в депрессии), наконец отказывается от работорговли и превращается в активного участника движения за отмену рабства в Британской империи. Но вернемся на остров Плантейн. Да, у Ньютона была с собой единственная книга – издание Евклида в переводе Исаака Барроу, и в мрачные моменты жизни он прятался в ее абстрактном комфорте. «Так я часто глушил свои горести[8], –

[8] **Так я часто:** John Newton, An Authentic Narrative of Some Remarkable and Interesting Particulars in the Life of John Newton, 4th ed. (Printed for J. Johnson,

пишет он, – и почти забывал о своих переживаниях».

История о геометрии на песке не единственное заигрывание Вордсворта с этой темой. Томас де Квинси, современник Вордсворта, в своих воспоминаниях писал: «Вордсворт был большим поклонником[9] величавой математики, как минимум высшей геометрии. Секрет его преклонения перед геометрией лежал в антагонизме между этим миром бестелесной абстракции и миром страсти». В школе Вордсворт не преуспевал в математике[10], но завязал крепкую дружбу с молодым ирландским математиком Уильямом Роуэном Гамильтоном; именно он, по мнению некоторых[11], и вдохновил Вордсворта на добавление к «Прелюдии» знаменитого описания Ньютона (Исаака, а не Джона): «Память о разуме гения, что в одиночку бороздит необозримый мысли океан».

Гамильтон с ранней юности был очарован[12] всеми вида-

1775), 75–82.

[9] **Вордсворт был большим поклонником:** Thomas De Quincey, The Works of Thomas De Quincey, vol. 3–4 (Cambridge, MA: Houghton, Mifflin, and Co.; The Riverside Press, 1881), 325.

[10] **Вордсворт в математике не преуспевал:** смотрите письмо от 26 июня 1791 года от сестры поэта Дороти Вордсворт к Джейн Поллард (Letters of the Wordsworth Family From 1787 to 1855, ed. William Knight, vol. 1 (Cambridge: Ginn and Company, 1907), 28), в котором говорится, что Вордсворт не смог получить стипендию в Кембридже, поскольку не смог заставить себя изучать математику. «Он читает на итальянском, испанском, французском, греческом, латинском и английском, но никогда не открывал ни одной математической книги».

[11] **Именно он, по мнению некоторых:** Joan Baum, “On the Importance of Mathematics to Wordsworth,” Modern Language Quarterly 46, no. 4 (1985): 392.

[12] **Гамильтон с ранней юности был очарован:** письмо Гамильтона кузену

ми академических знаний – математикой, древними языками, поэзией, – но его интерес к математике сильно подстегнула встреча с Зерой Колберном, американским мальчиком-вычислителем. Однажды небогатый фермер из Вермонта Абья Колберн обнаружил, что его шестилетний сын повторяет таблицу умножения, которой его не учили. У мальчика оказались невероятные способности к счету в уме, ничего подобного в Новой Англии до сих пор не видели. (Как и у всех мужчин в семье, у него было по шесть пальцев на руках и ногах.) Отец Зеры показывал сына различным местным сановникам, включая губернатора Массачусетса Элбриджа Герри (мы еще вернемся к нему в совершенно ином контексте), которые посоветовали отвезти мальчика в Европу, поскольку только там есть люди, способные понять и развить его выдающиеся способности. Колберны пересекли Атлантику в 1812 году, и Зера попеременно то учился, то за деньги демонстрировал свой талант по всей Европе. В Дублине он выступал вместе с гигантом-альбиносом и мисс Ханиуэлл – американкой, показывавшей чудеса ловкости с помощью пальцев ног. В 1818 году, когда ему было четырнадцать, он соревновался в вычислениях с Гамильтоном, своим ирландским подростком-аналогом, и с честью вышел[13] из это-

---

Артуру от 4 сентября 1822 года воспроизводится в книге Robert Perceval Graves, Life of Sir William Rowan Hamilton, vol. 1 (Dublin: Hodges Figgis, 1882), 111.

[13] **Гамильтон с честью вышел:** по крайней мере, так утверждает Роберт Персеваль Грейвс в очерке о Гамильтоне в журнале Dublin University Magazine 19 (1842): 95, написанном еще при жизни Гамильтона, и то же самое он повторяет

го состязания, хотя противник был силен. Однако Колберн не стал заниматься математикой: его интересовали исключительно вычисления в уме. Изучая Евклида, он нашел его легким, но «сухим и лишенным интереса». Когда два года спустя Гамильтон встретил вычислителя («Он потерял все признаки шестого пальца», – вспоминал Гамильтон; лондонский хирург удалил его[14]) и стал расспрашивать его о применяемых методах, то обнаружил, что Колберн слабо понимает причины[15] эффективности его арифметических методов. Бросив образование, он попробовал себя на английской сцене, не преуспел, вернулся в Вермонт и прожил остаток жизни проповедником.

Когда Гамильтон в 1827 году встретил Вордсворта, ему

на с. 78 своей книги Life of Sir William Rowan Hamilton (указанной выше). История появляется практически во всех более поздних биографиях Гамильтона, и все они, насколько я могу судить, опираются в качестве источника на Грейвса. В письмах Гамильтон описывает встречу с Колберном в 1820 году и тот факт, что он «видел», как тот производит вычисления, однако я не нашел никаких писем, которые касались бы соревнования; Колберн в своих мемуарах, указанных ниже, также не упоминает о таком состязании и даже вообще о встрече с Гамильтоном, хотя весьма гордо говорит о других вундеркиндах, с которыми встречался и которых превзошел. А имело ли место вообще это соревнование?

[14] **Лондонский хирург удалил его:** Zerah Colburn, A Memoir of Zerah Colburn: Written by Himself. Containing an Account of the First Discovery of His Remarkable Powers; His Travels in America and Residence in Europe; a History of the Various Plans Devised for His Patronage; His Return to this Country, and the Causes which Led Him to His Present Profession; with His Peculiar Methods of Calculation (Springfield, MA: G. and C. Merriam, 1833), 72.

[15] **Колберн слабо понимает причины того:** Graves, Life of Sir William Rowan Hamilton, 78–79.

было всего 22 года, а он уже был профессором Дублинского университета и королевским астрономом Ирландии. Вордсворту было 57 лет. Гамильтон в письме сестре описывал эту встречу так: молодой математик и старый поэт совершили «долгую-долгую полночную прогулку[16], где больше не было ничего, кроме звезд и наших собственных горячих мыслей и слов». Судя по стилю, Гамильтон не совсем отказался от поэтических амбиций. Он начал посылать Вордсворту свои стихи, и поэт отзывался о них тепло, но критически. Вскоре Гамильтон все же отказался от поэзии, фактически сделав это в стихах, прямо обращаясь к музе в произведении под названием «К поэзии», которое послал Вордсворту. Затем, в 1831 году, он передумал, написал еще одно стихотворение под названием «К поэзии» и тоже отправил его Вордсворту. Ответ поэта – один из классических случаев вежливого «опускания с небес на землю»: «Вы шлете мне потоки стихов, которые я получаю с большим удовольствием, как и все мы; однако мы опасаемся, что это занятие может сбить вас с пути Науки, который вам, похоже, суждено пройти с огромной честью для себя и пользой для других».

Не все окружение Вордсворта ценило сочетание страсти и холодного странного одинокого разума так же, как он и Гамильтон. На званом обеде[17] в доме художника Бенджа-

---

[16] **Полночную прогулку:** письмо Гамильтона Элизе Гамильтон от 16 сентября 1827 года цитируется по книге Graves, Life of Sir William Rowan Hamilton, 261.

[17] **На званом обеде:** Tom Taylor, The Life of Benjamin Robert Haydon, vol. 1

мина Роберта Хейдона в конце 1817 года друг Вордсворта Чарльз Лэм напился и начал дразнить Вордсворта, издеваясь над Ньютоном и называя ученого «человеком, который не верил ничему, если это не было настолько же ясно, как три стороны треугольника». Подключился к обвинениям и Джон Китс, заявив, что Ньютон лишил радугу романтики, показав, что призма дает тот же оптический эффект. Вордсворт смеялся, стиснув зубы и, вероятно, стараясь избежать ссоры.

В портрете Вордсворта, рисуемом де Квинси, рекламируется еще одна, пока не опубликованная математическая сцена из «Прелюдии». Оказывается, в те времена у стихов были трейлеры! Де Квинси с волнением обещает, что эта сцена, по его мнению, «достигает непревзойденной величественности». В ней Вордсворт засыпает, читая «Дон Кихота», и ему снится встреча с бедуином, едущим на верблюде через пустыню. В руке араба две книги, но, что характерно для сновидений, одна не просто книга, а одновременно и тяжелый камень, а вторая – сияющая морская раковина. (Через несколько страниц оказывается, что бедуин – это Дон Кихот.) Книга-раковина выдает апокалиптические пророчества, если поднести ее к уху. А книга-камень? Это все те же «Начала» Евклида, которые здесь предстают не как скромный инструмент самопомощи, а как средство связи с бесчувственным и неизменным космосом: книга «связала души чистейшими узами разума, пред коими бессильны и про-

---

(London: Longman, Brown, Green, and Longmans, 1853), 385.

странство, и время». Логично, что де Квинси был хорош в этой психоделической среде: будучи некогда юным дарованием, он потом пристрастился к настойке опия и описал свои головокружительные видения в «Исповеди англичанина, употребляющего опиум» – сенсационном бестселлере начала XIX века.

Представление Вордсворта о геометрии – типичный взгляд стороннего наблюдателя. Да, восхищение, но так восхищаются гимнастом на олимпиаде, выполняющим такие сальто и кульбиты, которые обычному человеку кажутся невозможными. Именно это вы видите в самом знаменитом стихотворении о геометрии – сонете 45 Эдны Сент-Винсент Миллей: «Один Евклид узрел нагую Красоту, лишь он один. И пусть умолкнут те, кто мелет всякий вздор о красоте»[18]. У Миллей Евклид – необычная, неземная фигура, которую в один «святой ужасный день» пронзил луч просветления, в отличие от всех нас, кому, по словам Миллей (и то, если повезет), посчастливится лишь услышать раздающийся вдалеке стук сандалий Красоты по камню.

По большому счету эта книга вовсе не о геометрии.

---

[18] К 1922 году, когда Миллей это написала, Евклид фактически уже не был один: неевклидовы геометрии (по-своему столь же прекрасные без одежды) были уже не только известны, но и осознавались (благодаря Эйнштейну) как истинная геометрия пространства-времени, как мы увидим в главе 3. Меня заинтересовало, знала ли об этом Миллей и намеренно ли использовала анахроничный образ, однако мои друзья-литературоведы сказали, что она вряд ли была в курсе последних достижений в математической физике.

Не поймите меня неправильно. Как математик, я получаю немало пользы от престижа геометрии. Приятно, когда люди считают твою работу таинственной, вечной и возвышающейся над обыденностью. «Как прошел день?» – «Святой и ужасный, как всегда».

Но чем сильнее вы отстаиваете эту точку зрения, тем больше склоняете людей рассматривать изучение геометрии как некую обязанность. И она приобретает легкий затхлый запах чего-то, чем восхищаются, потому что так принято. Типа оперы. Однако такого рода восхищения недостаточно для поддержания антрепризы. Написано множество новых опер, но можете ли вы их назвать? Нет: услышав слово «опера», вы, скорее всего, представляете в черно-белом цвете меццо-сопрано в мехах, во все горло орущую Пуччини.

В геометрии также много нового, но, подобно новой опере, это не так широко освещается, как хотелось бы. Геометрия – это уже давно не Евклид. Это не культурный реликт со шлейфом запаха школьного класса, а живой предмет, развивающийся сейчас быстрее, чем когда-либо ранее. В следующих главах мы познакомимся с новой геометрией распространения пандемии, путаными политическими процессами в США, шашками на профессиональном уровне, искусственным интеллектом, английским языком, финансами, физикой и даже поэзией. (Многие геометры втайне мечтали, подобно Уильяму Гамильтону, стать поэтами.)

Мы живем в динамично развивающемся, глобальном городе геометрии. Геометрия не где-то там, вне пространства и времени, а прямо здесь, с нами, смешанная с рассуждениями повседневной жизни. Она красива? Да, но она не нагая. Геометры видят Красоту в рабочей одежде.

Глава 1. «Я голосую за Евклида»

В 1864 году преподобный Дж. П. Гулливер из Норвича (Коннектикут) вспомнил разговор с Авраамом Линкольном о том, как президент приобрел свое знаменитое умение убеждать. По словам Линкольна, в основе навыка лежала геометрия[19].

> Читая законы, я постоянно натыкался на слово *доказать*[20]. Сначала мне казалось, что я понимаю его значение, но вскоре убедился, что это не так, и обратился к словарю Уэбстера. Там говорилось о «бесспорном доказательстве» и о «доказательстве вне возможности сомнения», но я не мог уловить, о какого рода доказательстве идет речь. Я думал, что многие вещи были доказаны вне возможности сомнения без обращения к такому экстраординарному процессу рассуждений, каким я считаю *доказательство*. Я сверился со всеми словарями и справочниками, какие удалось найти, но безрезультатно. С аналогичным успехом вы могли бы объяснять слепому, что такое синий цвет. Наконец

[19] **По словам Линкольна, в основе:** "Mr. Lincoln's Early Life: How He Educated Himself," New York Times, Sep. 4, 1864: 5. Конечно, цитата из Линкольна взята из воспоминаний Гулливера и не может считаться точным воспроизведением его слов.

[20] В оригинале demonstrate, demonstration – именно эти слова используются при описании действий Евклида в английских текстах. *Прим. пер.*

> я сказал себе: «Линкольн, ты никогда не станешь юристом, если не поймешь, что значит “доказать”» – и ушел со службы в Спрингфилде, отправившись в родительский дом, где и оставался до тех пор, пока не научился мгновенно выдавать любые теоремы из первых шести книг Евклида. Так я выяснил, что означает *доказать*, и вернулся к изучению права.

Гулливер был полностью согласен, ответив: «Никто не может хорошо выступать, если не способен прежде определить для себя, о чем он говорит. Хорошее знание Евклида освободило бы мир от половины его бедствий, изгнав половину бессмыслицы, которая вводит его в заблуждение и причиняет мучения. Я часто думал, что “Начала” были бы одной из лучших книг для включения в каталог “Общества трактатов”[21], если бы только они могли заставить людей прочитать ее. Изучение Евклида стало бы средством благодати». Линкольн, по словам Гулливера, засмеялся и согласился: «Я голосую за Евклида».

Как и потерпевший кораблекрушение Джон Ньютон, Линкольн использовал Евклида в качестве источника утешения в тяжелые периоды жизни. В 1850-х годах, после одного срока в Палате представителей, он отошел от политической деятельности и занялся разъездной юридической практикой. На одной из предыдущих работ в качестве землемера он изу-

---

21 «Американское общество трактатов» (American Tract Society) – некоммерческая организация, которая была основана в 1825 году и занимается публикацией и распространением христианской литературы. *Прим. пер.*

чил основы геометрии и теперь стремился восполнить пробелы. Его юридический партнер Уильям Херндон, которому часто приходилось делить комнату с Линкольном в маленьких сельских гостиницах, где они останавливались во время разъездов, вспоминал методы учебы Линкольна так: «…Я уже засыпал, а Линкольн, свесив длинные ноги с кровати, засиживался допоздна с зажженной свечой, погрузившись в Евклида».

Однажды утром Херндон застал в конторе Линкольна в состоянии какого-то душевного смятения.

> Он сидел за столом, разложив перед собой чистые листы бумаги, большие тяжелые листы, циркуль, линейку, многочисленные карандаши, несколько бутылочек с чернилами разных цветов и множество канцелярских и пишущих принадлежностей. Похоже, он сражался с вычислениями какой-то величины, поскольку вокруг валялись листы бумаги, исписанные кучей цифр. Он был так поглощен своим занятием, что даже не посмотрел на меня, когда я вошел.

Лишь позднее Линкольн наконец выбрался из-за стола и сказал Херндону, что пытался квадрировать круг. Иными словами, он пытался построить квадрат с той же площадью, что и у заданного круга, причем построить в надлежащем евклидовом стиле – с помощью всего двух инструментов: циркуля и линейки. По словам Херндона, Линкольн просидел над этой задачей два дня подряд «почти до изнеможения».

> Мне говорили, что[22] так называемая квадратура круга практически невозможна, но тогда я об этом не знал. И сомневаюсь, что это знал Линкольн. Его попытка решить задачу закончилась неудачей; и мы в конторе, заподозрив, что он довольно чувствителен к этому, старались быть осмотрительными и о ней не упоминать.

Квадратура круга – это очень старая проблема, и я подозреваю, что Линкольн мог знать об ее устрашающей репутации; долгое время квадратура круга была метафорой для трудной или невыполнимой задачи. Данте упоминает о ней в «Раю»:

Как геометр, напрягший все старанья[23],
Чтобы измерить круг, схватить умом
Искомого не может основанья,
Таков был я…[24]

---

[22] **Мне говорили, что:** воспоминания Херндона цитируются по работе Jesse William Weik, The Real Lincoln; a Portrait (Boston: Houghton Mifflin, 1922), 240. Я узнал эту историю из замечательной книги Дэйва Ричесона: Tales of Impossibility (Princeton: Princeton University Press, 2019), в которой есть все, что вы хотите знать о квадратуре круга, трисекции угла и так далее.

[23] **Как геометр:** перевод мой. Перевод misurar lo cerchio как квадрировать круг убедительно оправдан в работе R. B. Herzman and G. W. Towsley, “Squaring the Circle: Paradiso 33 and the Poetics of Geometry,” Traditio 49 (1994): 95–125.

[24] «Божественная комедия», «Рай», песнь тридцать третья. Перевод М. Лозинского. *Прим. пер.*

В Греции, где все это начиналось, для случая, когда кто-то пытается решить задачу сложнее, чем требуется, есть типичный раздраженный комментарий: «Я не просил вас квадрировать круг!»

Квадрировать круг незачем, единственная мотивация – сложность и известность проблемы. Люди с менталитетом победителя пытались справиться с нею с Античности до 1882 года, когда Фердинанд фон Линдеманн доказал, что решения не существует (но даже тогда некоторые твердолобые упрямцы продолжали упорствовать… впрочем, найдутся такие и *сейчас*). Политический философ XVII века Томас Гоббс, чью уверенность в собственных умственных способностях нельзя полностью отразить приставкой «сверх», считал, что справился с задачей. По словам его биографа Джона Обри, Гоббс наткнулся на геометрию в зрелом возрасте и совершенно случайно.

> Оказавшись в библиотеке некоего джентльмена[25], он наткнулся на «Начала» Евклида, которые были открыты на теореме 47 книги I[26]. Он прочитал формулировку. «Черт побери! – воскликнул он (время от времени Гоббс сквернословил для выразительности). – *Это невозможно!*» Тогда он прочел доказательство, оно

[25] **Оказавшись в библиотеке некоего джентльмена:** John Aubrey, 'Brief Lives,' Chiefly of Contemporaries, Set down by John Aubrey, between the Years 1669 & 1696, ed. Andrew Clark, vol. 1 (Oxford: Oxford University Press, 2016), 332; https://www.gutenberg.org/files/47787/47787-h/47787-h.htm.

[26] Это теорема Пифагора. *Прим. пер.*

> отсылало его к какой-то другой теореме; ее он тоже прочитал. И так постепенно убедился в истинности утверждения. Это заставило его полюбить геометрию.

Гоббс постоянно публиковал очередные способы доказательства и враждовал с крупнейшими британскими математиками того времени. Однажды какой-то корреспондент указал ему на то, что одно из его построений не совсем верно, поскольку точки P и Q, которые он считал совпадающими, на самом деле находились на немного разном расстоянии от третьей точки R: 41 и 41,012 соответственно. Гоббс возразил[27], что его точки достаточно велики, чтобы покрыть столь ничтожную разницу. Так он и отошел в мир иной в глубокой уверенности, что квадрировал круг[28].

Один анонимный комментатор, рецензировавший учебник по геометрии в 1833 году, дал настолько точное описание типичного «квадратурщика», что под него подойдет как Гоббс, живший двумя веками ранее, так и нынешние интеллектуально ущербные личности, по-прежнему корпящие над этой задачей в XXI веке.

> Все, что они знают о геометрии[29], – так это то, что

---

[27] **Гоббс возразил:** F. Cajori, “Controversies in Mathematics Between Hobbes, Wallis, and Barrow,” Mathematics Teacher 22, No. 3 (March 1929): 150.

[28] Долгая и, откровенно говоря, смешная история войны Гоббса с его терпеливыми математическими критиками изложена в главе 7 книги Амира Александра «Бесконечно малые».

[29] **Все, что они знают о геометрии:** рецензия на Geometry without Axioms, в Quarterly Journal of Education XIII (1833): 105.

> в ней есть вещи, которые те, кто изучал ее дольше всего, давно признали невыполнимыми. Услышав, что авторитет знания слишком сильно влияет на умы людей, они предлагают уравновесить его авторитетом невежества; и если случится так, что человек, знакомый с предметом, найдет себе занятие получше, чем выслушивать, как они делятся скрытыми истинами, то он тут же именуется слепым фанатиком, душителем света истины и так далее.

В Линкольне мы находим более привлекательную личность: достаточно амбиций, чтобы попытаться, и достаточно смирения, чтобы признать поражение.

Что Линкольн позаимствовал у Евклида – так это идею, что при известной осторожности вы сможете возвести высокое прочное здание убеждений и согласия с помощью строгих дедуктивных шагов, этаж за этажом, на фундаменте аксиом, в которых никто не может усомниться, или, если хотите, истин, которые кажутся самоочевидными. Тот, кто не считает их таковыми, исключается из дискуссии. Я слышу отголоски Евклида в самом знаменитом выступлении Линкольна – Геттисбергской речи, где он говорит, что Соединенные Штаты убеждены в истинности утверждения, что все люди рождены равными. Слово *утверждение* (*proposition*)[30] – это термин, используемый Евклидом для высказываний, ло-

---

[30] **Слово «утверждение» (proposition):** источник этой идеи – A. Kucharski, “Euclid as Founding Father,” Nautilus, Oct. 13, 2016; http://dev.nautil.us/issue/41/selection/euclid-as-founding-father.

гически вытекающих из самоочевидных аксиом, которые просто нельзя рационально отрицать.

Линкольн не первый американец, искавший основы демократической политики в терминологии Евклида; раньше это делал любивший математику Томас Джефферсон. Линкольн отмечал в письме, прочитанном в Бостоне в 1859 году на торжественной церемонии в память о Джефферсоне, где он не смог присутствовать:

> Можно с уверенностью утверждать[31], что человек может убедить любого здравомыслящего ребенка в том, что простые утверждения Евклида истинны; но тем не менее в итоге он потерпит неудачу с тем, кто будет отрицать определения и аксиомы. Принципы Джефферсона – это определения и аксиомы свободного общества.

В юности Джефферсон изучал Евклида в колледже Вильгельма и Марии и с тех пор высоко ценил геометрию[32]. Уже будучи вице-президентом, Джефферсон нашел время, чтобы ответить на письмо учащегося из Вирджинии о предпола-

---

[31] **Можно с уверенностью утверждать:** Abraham Lincoln, The Collected Works of Abraham Lincoln, ed. Roy P. Basler et al., vol. 3 (New Brunswick, NJ: Rutgers University Press, 1953), 375; http://name.umdl.umich.edu/lincoln3.

[32] Хотя оборот «Мы считаем эти истины самоочевидными» не принадлежит Джефферсону; в его проекте Декларации было написано: «Мы считаем эти истины священными и неоспоримыми». Именно Бенджамин Франклин вычеркнул эти слова и заменил их на «самоочевидные», сделав документ чуть менее библейским и чуть более евклидовым.

гаемом плане академического обучения, где пишет: «Тригонометрия в известном смысле имеет наибольшую ценность для каждого человека, и едва ли найдется день, когда он не станет прибегать к ней для каких-нибудь надобностей повседневной жизни (хотя б*о*льшую часть высшей математики он описывает так: “Всего лишь роскошь[33], действительно восхитительная роскошь; не для тех, кому приходится иметь занятие ради пропитания”)». В 1812 году, уйдя из политики, Джефферсон писал своему предшественнику на посту президента Джону Адамсу:

> Я отказался от газет в обмен на Тацита и Фукидида, Ньютона и Евклида и чувствую себя гораздо счастливее[34].

Здесь мы видим реальную разницу между двумя президентами-геометрами. Для Джефферсона Евклид был частью классического образования, необходимого для культурного джентльмена наряду с греческими историками и учеными эпохи Просвещения. Однако с Линкольном – самоучкой, выросшим на ферме, – ситуация обстояла иначе. Вот как преподобный Гулливер описывает Линкольна, вспоминающего свое детство:

---

[33] **Всего лишь роскошь:** Thomas Jefferson, The Essential Jefferson, ed. Jean M. Yarbrough (Indianapolis: Hackett Publishing, 2006), 193.

[34] **Я отказался от газет:** Thomas Jefferson, The Papers of Thomas Jefferson, Retirement Series, ed. J. Jefferson Looney, vol. 4 (Princeton: Princeton University Press, 2008), 429; https://press.princeton.edu/books/ebook/9780691184623/the-papers-of-thomas-jefferson-retirement-series-volume-4.

> Припоминаю, как уходил в свою маленькую спальню после того, как слышал вечерние разговоры соседей с моим отцом, и немалую часть ночи расхаживал взад и вперед, пытаясь понять точный смысл некоторых, на мой взгляд, мрачных фраз. Когда я преследовал какую-то идею, я не мог заснуть, хотя часто пытался, пока не ловил ее; а когда я считал, что поймал, то не удовлетворялся этим, а повторял ее снова и снова, пока не выражал на языке, достаточно ясном, как мне казалось, для любого знакомого мне мальчишки. Это была своего рода страсть, и она осталась со мной, поскольку мне всегда нелегко справиться с какой-то мыслью, пока я не ограничу ее с севера, юга, запада и востока. Возможно, этим объясняются те характерные особенности, которые вы наблюдаете в моих выступлениях.

Это не геометрия, но это взгляды геометра. Вы не оставляете вещи понятыми наполовину, а точно формулируете свои мысли и следите за ходом своих рассуждений точно так же, как Гоббс с изумлением следил за Евклидом. Линкольн считал такого рода систематическое самовосприятие единственным выходом из сумятицы и темноты.

Для Линкольна, в отличие от Джефферсона[35], стиль Евклида – вовсе не то, что пристойно джентльмену или профес-

---

[35] **Для Линкольна, в отличие от Джефферсона:** о разнице между концепциями геометрии у Линкольна и Джефферсона смотрите: Drew R. McCoy, “An ‘Old-Fashioned’ Nationalism: Lincoln, Jefferson, and the Classical Tradition,” Journal of the Abraham Lincoln Association 23, no. 1 (2002): 55–67.

сору с академическим образованием, поскольку Линкольн не был ни тем ни другим. Это бревенчатая хижина разума, построенная вручную. Если построить ее правильно, она выдержит любые испытания. И она может принадлежать кому угодно в стране, задуманной Линкольном.

ЗАСТЫВШАЯ ФОРМАЛИСТИКА

Представление Линкольна о геометрии для американских масс, как и многие другие его хорошие идеи, было реализовано лишь частично. К середине XIX века геометрия переместилась из колледжей в старшие классы школ, однако в типичном курсе Евклид стал чем-то вроде музейного экспоната: его доказательства следовало запомнить, воспроизвести и в какой-то степени оценить. О том, как кто-то их *придумал*, не было и речи. Сам создатель доказательств практически исчез: один писатель того времени заметил, что «многие молодые люди[36] читают шесть книг “Начал”, прежде чем случайно узнают, что Евклид – это не название предмета, а имя человека, который о нем написал». Таков парадокс образования: то, чем мы больше всего восхищаемся, мы укладываем в коробочку и засовываем ее в ящик.

Честно говоря, об историческом Евклиде сказать почти

---

[36] **Многие молодые люди:** тот же автор и та же рецензия, что уже цитировалась в связи с квадратурой круга: Quarterly Journal of Education, vol. XIII (1833): 105. Этот анонимный автор весьма часто цитируется!

нечего, поскольку нам о нем практически ничего и не известно. Он жил и работал в большом городе Александрия в Северной Африке примерно за 300 лет до нашей эры. И это все, что мы знаем. Его «Начала» – это собрание знаний по геометрии греческих математиков того времени; на десерт в конце книги добавлены основы теории чисел. Значительная часть материала была известна математикам еще до Евклида, но радикально новым и революционным шагом стала *организация* этого массива знаний. Из небольшого количества аксиом, в которых почти невозможно сомневаться[37], шаг за шагом выводится весь аппарат теорем о треугольниках, прямых, углах и окружностях. До Евклида – если это и правда был Евклид, а не целый коллектив геометров из Александрии, творивший под этим псевдонимом, – такую структуру было невозможно представить. Зато впоследствии она стала моделью для всего замечательного в знании и мышлении.

Конечно, существует и другой способ преподавать геометрию, который делает упор на изобретательность и пытается поместить учащегося в кресло Евклидова пилота, чтобы тот мог самостоятельно создавать определения и смотреть, что из них получится. Один из таких учебников, «Изобретательная геометрия», исходит из предпосылки, что «един-

---

[37] За исключением одной, но этот спорный постулат о параллельных прямых и начавшийся с него двухтысячелетний путь к неевклидовой геометрии обсуждается во многих других местах и здесь будет лишь упомянут.

ственное настоящее образование – это самообразование». Не смотрите на конструкции других людей, советует книга, «по крайней мере пока не откроете собственную конструкцию», – и вы не будете беспокоиться и сравнивать себя с другими учениками: все занимаются в собственном темпе, и вы с большей вероятностью усвоите материал, если вам нравится им заниматься. Сама книга – всего лишь последовательность из 446 головоломок и задач. Одни достаточно просты: «Можете ли вы нарисовать три угла двумя прямыми линиями? А четыре угла двумя прямыми линиями?» У других, как предупреждают авторы, на самом деле не может быть решения, и вы оказываетесь в положении *настоящего* ученого[38]. А третьи, как и самый первый из вопросов, и вовсе не имеют четкого «правильного ответа»: «Поставьте куб[39] на стол гранью к себе и скажите, что вы считаете толщиной,

---

[38] – Голубчики, – сказал Федор Симеонович озабоченно, разобравшись в почерках. – Это же проблема Бен Бецалеля. Калиостро же доказал, что она не имеет решения.– Мы сами знаем, что она не имеет решения, – сказал Хунта, немедленно ощетиниваясь. – Мы хотим знать, как ее решать.– Как-то странно ты рассуждаешь, Кристо… Как же искать решение, когда его нет? Бессмыслица какая-то…– Извини, Теодор, но это ты очень странно рассуждаешь. Бессмыслица – искать решение, если оно и так есть. Речь идет о том, как поступать с задачей, которая решения не имеет. Это глубоко принципиальный вопрос…Стругацкие А. и Б. «Понедельник начинается в субботу». *Прим. науч. ред.*

[39] **Поставьте куб:** William George Spencer, Inventional Geometry: A Series of Problems, Intended to Familiarize the Pupil with Geometrical Conceptions, and to Exercise His Inventive Faculty (New York: D. Appleton, 1877), 16. Британское издание появилось в 1860 году.

что – шириной, а что – длиной»[40]. В целом это всего лишь своего рода «ориентированный на ребенка» исследовательский подход, который высмеивают традиционалисты, считая несоответствующим современному образованию. Книга вышла в 1860 году.

Несколько лет назад в математической библиотеке Висконсинского университета появилась огромная коллекция старых учебников, по которым учились школьники штата последние сто или около того лет[41], но в итоге от них отказались в пользу более новых вариантов. Глядя на эти потрепанные книги, понимаешь: все споры об образовании уже разворачивались не раз. Все, что мы считаем новым и странным (например, книги наподобие «Изобретательной геометрии», где учеников просят самостоятельно придумывать доказательства; математические книги, делающие задачи «актуальными», связывая их с повседневной жизнью школьников; книги по математике, способствующие продвижению

---

[40] Это действительно плохо поставленный вопрос: при такой расстановке очевидно, что назвать шириной, высотой и глубиной. Видимо, тут имеется тонкое различие в описании «с точки зрения куба», у которого нет выделенных длины, ширины и толщины, потому что они равны, и со стороны внешнего наблюдателя, который использует естественные для него координаты в трехмерном пространстве. *Прим. науч. ред.*

[41] В одной из книг по арифметике, последний раз использованной в 1930 году, я нашел пометку карандашом: «Смотри страницу 170»; на 170-й странице было другое указание: «Смотри страницу 36», где я увидел новую команду, и т. д., пока не добрался до последней страницы, где было написано: «Ты дурак!» Десятилетний мальчик разыграл меня с того света.

общественных движений), на самом деле старо, в свое время тоже считалось странным и, несомненно, снова станет новым и странным в будущем.

Во введении в «Изобретательную геометрию» говорится, что геометрия имеет «место в образовании всех людей, не исключая женщин»: автор книги, Уильям Джордж Спенсер, – один из первых поборников совместного обучения. Более типичное отношение к женщинам и геометрии в XIX веке отражено (но не одобряется) в романе «Мельница на Флоссе» Джорджа Элиота[42], опубликованном в том же году, что и учебник Спенсера. «Девчонки не могут понять Евклида, правда, сэр?» – спрашивает один из персонажей учителя Стеллинга, на что тот отвечает: «У них иногда неплохие способности, но знания их неглубоки, они ничего не могут постичь до конца. Они смышленые, но поверхностные»[43]. Стеллинг представляет в сатирической форме тот традиционный образ британской педагогики, против которого восставал Спенсер: долгий марш через запоминание авторитетов, при котором медленный и тяжелый строительный процесс понимания не просто игнорируют, его остерегаются. «Мистер Стеллинг был не из тех, кто станет ослаблять и изнеживать ум своего питомца, прибегая к упрощениям и объ-

---

[42] Здесь уместно напомнить, что Джордж Элиот – псевдоним писательницы Мэри Анн Эванс.

[43] «Мельница на Флоссе». Книга вторая, глава первая. Перевод Л. Поляковой и Г. Островской. *Прим. пер.*

яснениям»[44]. Евклид был своего рода тонизирующим средством для укрепления мужественности, и его приходилось терпеть, как крепкий напиток или ледяной душ.

Недовольство стеллингизмом стало нарастать даже в верхах математических кругов. Британский математик Джеймс Джозеф Сильвестр, о геометрии и алгебре (а также отвращении к отупляющей мертвенности британской академической науки) которого мы еще поговорим, считал, что Евклида нужно спрятать «подальше от школьников», а геометрию преподавать в связке с физикой, делая акцент на геометрию *движения,* дополняющую статические формы Евклида. «Именно живого интереса[45] к предмету, – писал Сильвестр, – так не хватает нашим традиционным средневековым методам преподавания. Во Франции, Германии и Италии – везде, где я был на континенте, – разум воздействует непосредственно на разум: тем способом, который неизвестен застывшей формалистике наших академических учреждений».

СМОТРИ!

Мы уже не заставляем школьников заучивать и повто-

---

[44] «Мельница на Флоссе». Книга вторая, глава первая. Перевод Л. Поляковой и Г. Островской. *Прим. пер.*

[45] **Именно живого интереса к предмету:** James J. Sylvester, “A Plea for the Mathematician,” Nature 1 (1870): 261–63.

рять наизусть Евклида. В конце XIX века в учебники стали включать упражнения, в которых ученикам предлагалось строить собственные доказательства геометрических утверждений. В 1893 году эти перемены узаконил сформированный в 1892-м Комитет десяти, возглавляемый президентом Гарварда Чарльзом Элиотом. Комитету было поручено рационализировать и стандартизировать обучение в американских средних школах. По его утверждению, задача геометрии в школе – прививать ученикам навыки строгого дедуктивного мышления. Эта идея прижилась. В ходе опроса пятисот американских учителей об их задачах в преподавании геометрии, проведенного в 1950 году[46], самым популярным был ответ: «Развить навыки ясного мышления и точного выражения», который почти вдвое превысил вариант: «Дать знание фактов и принципов геометрии». Иными словами, мы здесь не для того, чтобы пичкать учеников всеми известными фактами о треугольниках, а для того, чтобы развивать в них умственную дисциплину, позволяющую добывать эти факты из первоначальных принципов. Школа для маленьких Линкольнов.

А для чего нужна эта умственная дисциплина? Может быть, на случай, если в какой-то момент будущей жизни им понадобится окончательно и неопровержимо доказать, что

---

[46] **В ходе опроса 1950 года:** Kenneth E. Brown, “Why Teach Geometry?” Mathematics Teacher 43, no. 3 (1950): 103–6; https://www.jstor.org/stable/27953519.

сумма внешних углов многоугольника равна 360 градусам? Я все жду, когда же это произойдет, но пока безрезультатно.

Основная причина обучения детей формулированию доказательств вовсе не в том, что мир полон доказательств, а в том, что мир полон *недоказательств*, и взрослым людям нужно знать разницу. Трудно согласиться с недоказательством, если вы реально знакомы с подлинником.

Линкольн понимал эту разницу. Его друг и коллега-юрист Генри Клей Уитни вспоминал: «Много раз я видел[47], как он срывает маску с заблуждения и стыдит как заблуждение, так и его автора». Мы постоянно встречаемся с недоказательствами, рядящимися в одежду доказательств, и без должного внимания с нашей стороны они часто обходят нашу защиту. Существуют подсказки, которые вы можете высматривать. Когда в математике какой-то автор начинает фразу со слов «Очевидно, что», на самом деле он говорит: «Мне это кажется очевидным. Вероятно, следовало бы это проверить, но я немного запутался в процессе и потому решил просто заявить, что это очевидно». У газетных аналитиков аналогичная фраза начинается со слов: «Конечно, все мы согласны с тем, что». Всякий раз, сталкиваясь с подобным, вы ни в коем случае не должны верить, что все согласны с дальнейшим. Вас просят трактовать нечто как аксиому, но если мы

---

[47] **Много раз я видел:** H. C. Whitney, Lincoln the Citizen (Baker & Taylor, 1908), 177. Если честно, то пример заблуждения, который Уитни приводит сразу после этого (он включает вопрос, можно ли сказать, что у корпорации есть душа), не кажется мне неудачей дедуктивной логики.

что-то и обязаны выучить из истории геометрии, так это то, что нельзя включать аксиому в свою книгу, пока она не доказала свою реальную ценность.

Всегда скептично относитесь к любому, кто говорит, что он «просто логичен». Если вам рассказывают не о равенстве треугольников, а об экономической политике, или о каком-то недостойно себя ведущем культурном деятеле, или об уступке, которую от вас хотят, то тут нет ничего «просто логичного», поскольку все происходит в контексте, где логические выводы – если они вообще применимы – неотделимы от всего остального. От вас хотят, чтобы вы ошибочно приняли цепочку уверенно выраженных мнений за доказательство. Но как только вы ощутите резкий *щелчок* настоящего доказательства, вы уже никогда не угодите в эту ловушку. Предложите своему «логичному» оппоненту заняться квадратурой круга.

По словам Уитни, Линкольн выделялся вовсе не сверхмощным интеллектом. Многие общественные деятели очень умны, но среди них есть и хорошие, и плохие люди, с сожалением отмечает Уитни. Линкольна же отличало то, что для него «было морально невозможно[48] спорить нечестно; он не мог этого делать по определению, как не мог красть; по сути, для него было одно и то же – лишить человека собственности путем кражи или путем нелогичных или отвратительных рассуждений». То, что Линкольн позаимство-

[48] **Было морально невозможно:** Whitney, Lincoln the Citizen, 178.

вал у Евклида (или то, что уже имелось у Линкольна и гармонировало с тем, что он нашел у Евклида), – это *целостность*: принцип, что нельзя говорить какие-то вещи, пока ты честно не обосновал свое право их обсуждать. Геометрия – это форма честности. Линкольна можно назвать Геометрическим Эйбом[49].

Единственное, в чем я расхожусь с Линкольном, – что он стыдит автора за заблуждения. Труднее всего быть честным с самим собой, и требуется гораздо больше времени и усилий на разоблачение собственных ошибок. Нужно всегда относиться к своим убеждениям, как к расшатанному зубу, то есть к зубу, в крепости которого вы не совсем уверены. И если что-то вызывает сомнения, не стоит стыдиться; просто спокойно отступите на твердую почву и заново переосмыслите проблемное понятие.

Именно этому в идеале должна научить нас геометрия. Однако «застывшая формалистика», на которую жаловался Сильвестр, от этого ой как далека. На практике урок геометрии, который мы преподаем детям, по словам художника, педагога и популяризатора математики Бена Орлина, обычно таков:

> Доказательство – это непонятная демонстрация уже известного вам факта[50].

---

[49] Отсылка к популярному прозвищу Линкольна – Честный Эйб. *Прим. пер.*

[50] **Доказательство – это:** слова Орлина взяты из его поста от 16 октября 2013 года: “Two-Column Proofs That Two-Column Proofs Are Terrible,” Math with

Орлин приводит пример такого доказательства для теоремы о равенстве прямых углов, то есть утверждения, что любые два прямых угла равны. Что можно спросить у девятиклассника, столкнувшегося с этим утверждением? Типичный формат[51] – *доказательство в два столбца*, главная опора геометрического образования в течение более чем ста лет. В нашем случае оно выглядело бы примерно так:

Угол 1 и угол 2 — прямые	**По условию**
Величина угла 1 равна 90 градусов	**Определение прямого угла**
Величина угла 2 равна 90 градусов	**Определение прямого угла**
Величина угла 1 равна величине угла 2	**Транзитивность равенства**
Угол 1 равен углу 2	**Определение равенства углов**

«Транзитивность равенства» – одно из общих понятий Евклида, это арифметический принцип, который он излагает в начале своего труда наряду с геометрическими аксиомами. Принцип таков: две вещи, равные третьей, равны между собой[52].

Bad Drawings (blog), mathwithbaddrawings.com/2013/10/16/two-column-proofs-that-two-column-proofs-are-terrible/.

[51] **Типичный формат:** материал о Комитете десяти и истории доказательства в два столбца взят из работы P. G. Herbst, “Establishing a Custom of Proving in American School Geometry: Evolution of the Two-Column Proof in the Early Twentieth Century,” Educational Studies in Mathematics 49, no. 3 (2002): 283–312.

[52] В сценарии Тони Кушнера для фильма Стивена Спилберга «Линкольн» президент ссылается на это в драматический момент.

Не стану отрицать, что есть определенное удовлетворение в сведении всего к таким крошечным, точным шагам. Они так убедительно складываются вместе, словно детальки лего! И подобное ощущение учителю действительно хочется передать.

Но все же… разве не очевидно, что два прямых угла – это одна и та же вещь, просто расположенная на странице в разных местах с разной ориентацией? На самом деле Евклид считал равенство прямых углов четвертой из аксиом – основных правил игры, которые принимаются как истинные без доказательства и из которых вытекает все остальное. Так почему современная школа требует от учеников предъявлять доказательство этого факта, если даже Евклид сказал: «Да ладно, это очевидно»? Потому что существует много разных наборов аксиом, из которых можно вывести геометрию на плоскости, и поступать в точности так, как Евклид, больше не считается самым строгим или педагогически выигрышным приемом. В 1899 году Давид Гильберт переписал всю аксиоматику с нуля, а аксиомы современной американской школы обычно следуют системе Джорджа Биркгофа 1932 года.

Аксиома это или нет, но тот факт, что два прямых угла равны, ученик просто знает. Вы не можете винить школьников в том, что они разочаруются, когда вы им скажете: «Вы думали, что знаете это, но на самом деле не знали, пока не выполнили все шаги в доказательстве в два столбца».

Даже несколько обидно!

Слишком многое на уроках геометрии посвящено доказательству очевидных вещей. Я хорошо помню занятия топологией на первом курсе колледжа. Профессор, весьма выдающийся почтенный ученый, потратил две недели на доказательство следующего факта: если вы проведете на плоскости замкнутую кривую без самопересечений, то, какой бы извилистой и причудливой она ни была, она разделит плоскость на две части: одна внутри, а вторая – снаружи кривой.

С одной стороны, как оказалось, весьма сложно написать формальное доказательство этого факта, известного как теорема Жордана о замкнутых кривых. С другой – эти две недели я провел в состоянии едва сдерживаемого раздражения. Неужели в этом и заключается математика? Делать очевидное трудоемким? Читатель, я просто отключался, так же как и мои однокурсники, среди которых были будущие математики и другие ученые. Парочка, сидевшая передо мной, – весьма серьезные студенты, которые впоследствии получат степени по математике в лучших университетах, – начинала энергично обниматься всякий раз, когда выдающийся почтенный ученый поворачивался к доске, чтобы записать очередной тонкий аргумент о небольшом видоизменении многоугольника. Я имею в виду, что они реально заводились, как будто их подростковая страсть друг к другу могла каким-то образом перенести их в другую часть континуума, где такого доказательства еще нет.

Столь высококвалифицированный математик, каким я стал сейчас, мог бы, слегка выпрямившись, сказать: «Ну, молодые люди, вы просто недостаточно искушены, чтобы понимать, какие утверждения действительно очевидны, а какие скрывают в себе тонкости». Возможно, я упомянул бы пугающую рогатую сферу Александера[53], которая показывает, что аналогичный вопрос в трехмерном пространстве вовсе не так прост, как можно подумать[54].

Однако с педагогической точки зрения такой ответ, на мой взгляд, довольно плох. Если в классе мы будем тратить время на доказательство вещей, которые кажутся очевидными, и настаивать на том, что они неочевидны, наши ученики будут кипеть от возмущения, как когда-то я, или найдут себе занятия поинтереснее, когда преподаватель отвернется.

Мне нравится, как мастер преподавания Бен Блюм-Смит

---

[53] Рогатая сфера Александера делит трехмерное пространство на две части, как и обычная сфера, но другим способом: в то время как на плоскости по теореме Шенфлиса две получающиеся части топологически эквивалентны кругу и плоскости с круглой дыркой для любой кривой без самопересечений. См. Фукс Д. Б. Рогатая сфера Александера. Квант (1990) № 6. *Прим. науч. ред.*

[54] В математике существует немало вещей, которые кажутся очевидными, но при этом неверны. Рассмотрим утверждение: сплошной шар радиусом 1 сантиметр нельзя разбить на конечное число частей и сложить из них сплошной шар радиусом 1 километр. Утверждение кажется очевидным, однако оно ложно: такое разбиение возможно (парадокс Банаха – Тарского). Аналогично интуиция отрицает существование непрерывной функции, у которой ни в одной точке нельзя провести касательную. Однако такие функции существуют. Поэтому, увы, даже вроде бы очевидные вещи в математике приходится доказывать. *Прим. пер.*

описывает эту проблему: чтобы учащиеся действительно ощутили огонь математики, им надо испытать *градиент уверенности*[55], [56] – ощущение перехода от чего-то очевидного к чему-то неочевидному, подталкиваемое вверх двигателем формальной логики. В противном случае мы говорим: «Вот список аксиом, которые выглядят совершенно правильными; складывайте их, пока не получите другое утверждение, которое выглядит совершенно правильным». Это все равно что обучать кого-нибудь лего, показав, что из двух маленьких кирпичиков можно сделать один большой. Вы можете это сделать, а иногда вам действительно нужно это сделать, но суть лего, конечно, не в этом.

Вероятно, лучше самому *почувствовать* градиент уверенности, чем говорить о нем. Для этого подумайте на миг о прямоугольном треугольнике.

---

[55] Градиент – векторная величина, показывающая направление наибольшего возрастания числовой величины в разных точках какого-либо пространства. Здесь автор использует понятие в переносном смысле – как синоним подъема в гору. *Прим. пер.*

[56] **Градиент уверенности:** Ben Blum-Smith, “Uhm Sayin,” Research in Practice (blog), http://researchinpractice.wordpress.com/2015/08/01/uhm-sayin/.

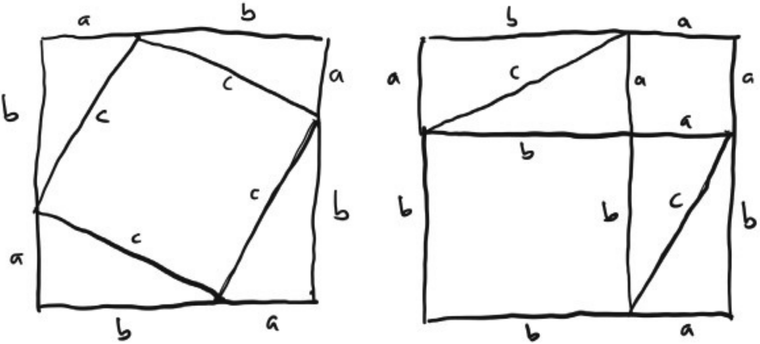
Начнем с интуитивного ощущения: если горизонтальная и вертикальная стороны определены, то известна и диагональ. Если вы пройдете 3 километра на юг, а потом 4 километра на восток, то однозначно удалитесь от исходной точки на какое-то конкретное расстояние.

Но на какое? Для этого нужна теорема Пифагора – первая реальная теорема геометрии. Она говорит, что если a и b – горизонтальная и вертикальная стороны прямоугольного треугольника, а c – диагональ (так называемая гипотенуза), то

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Если $a = 3$, а $b = 4$, то $c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Мы знаем, какое число при возведении в квадрат дает 25: это число 5. Оно и есть длина гипотенузы.

Почему эта формула верна? Вы можете начать подниматься по градиенту уверенности, нарисовав треугольник со сторонами 3 и 4 и измерив его гипотенузу, она будет близкой к 5. Затем нарисуйте треугольник со сторонами 1 и 3 и измерьте его гипотенузу; если вы обращались с линейкой достаточно внимательно, то получите что-то близкое к числу 3,16, которое при возведении в квадрат дает 1 + 9 = 10. Благодаря этим примерам уверенность увеличится, но это еще не доказательство. А вот это уже оно:



Большой квадрат на обоих рисунках одинаков, но разбит на части двумя разными способами. На первом чертеже четыре копии нашего прямоугольного треугольника и квадрат со стороной c. На втором – тоже четыре копии, но иначе расположенные: остаток квадрата теперь занимают два меньших квадрата со сторонами a и b. Площадь, которая остается в большом квадрате после убирания четырех треугольников, должна быть одинаковой в обоих случаях, а значит, c^2 (площадь, оставшаяся на первом чертеже) будет равна $a^2 + b^2$

(площадь, оставшаяся на втором чертеже).

При желании придраться можно пожаловаться на нестрогое доказательство того, что на первом рисунке квадрат (того, что длина сторон этой фигуры одинакова, недостаточно: сожмите пальцами противоположные углы квадрата – и получите фигуру под названием *ромб:* это явно не квадрат, но стороны по-прежнему равны). Но пусть так. До ознакомления с этой иллюстрацией у вас нет оснований считать, что теорема Пифагора верна, но, увидев ее, вы поймете, *почему* теорема верна. Подобные доказательства, когда геометрическая фигура разрезается на части, которые потом переставляются, называются *доказательствами разрезания* и ценятся за ясность и изобретательность. Математик и астроном XII века Бхаскара[57] показывает такую форму доказательства теоремы и находит изображение настолько убедительным, что для него не требуется словесное пояснение, просто подпись в виде одного слова «Смотри!»[58]. Любитель-математик Генри Перигал в 1830 году придумал собственное доказательство разрезанием, когда пытался, подобно Линкольну, квадрировать круг; он настолько высоко ценил свою схему[59],

---

[57] В истории математики его часто называют Бхаскара II, чтобы отличать от более раннего математика с таким же именем.

[58] Некоторые источники полагают, что доказательство Бхаскары было взято из более раннего китайского математического текста «Чжоу би суань цзин», однако по этому поводу ведутся споры; если на то пошло, то неясно, было ли у самих пифагорейцев то, что мы именуем сейчас доказательством.

[59] **Он настолько высоко ценил свою схему:** Bill Casselman, “On the

что спустя почти шестьдесят лет завещал вырезать ее на своем надгробии.

ЧЕРЕЗ МОСТ ОСЛОВ

Нам нужно знать, как решать геометрические задачи чисто формальными выводами, однако геометрия – это не просто последовательность чисто формальных выводов. Если бы это было так, то это был бы не лучший способ научить искусству систематических рассуждений в сравнении с тысячей других вещей. Мы могли бы объяснять шахматные задачи или судоку. Или создать систему аксиом, вообще не имеющую никакого отношения к какой-либо области человеческой деятельности, и заставлять учащихся выводить из нее следствия. Но вместо всего этого мы преподаем геометрию, поскольку она – формальная система, которая *не просто* формальная система. Она встроена в наши представления о пространстве, положении и движении. Мы не можем не быть геометрическими. Иными словами, у нас есть интуиция.

В эссе 1905 года геометр Анри Пуанкаре определил интуицию и логику как два незаменимых столпа математического мышления. Каждый математик склонен к той или иной стороне, и, как отмечает Пуанкаре, нам свойственно именовать

Dissecting Table," Plus Magazine, Dec. 1, 2000; https://plus.maths.org/content/dissecting-table.

геометрами тех, кто сильнее предрасположен к интуитивному мышлению. Нам нужны оба столпа. Без логики мы не могли бы ничего сказать о 1000-угольнике – объекте, который нам не представить ни в каком разумном смысле. Но без интуиции предмет теряет всю свою привлекательность. Пуанкаре объясняет, что Евклид – это мертвая губка:

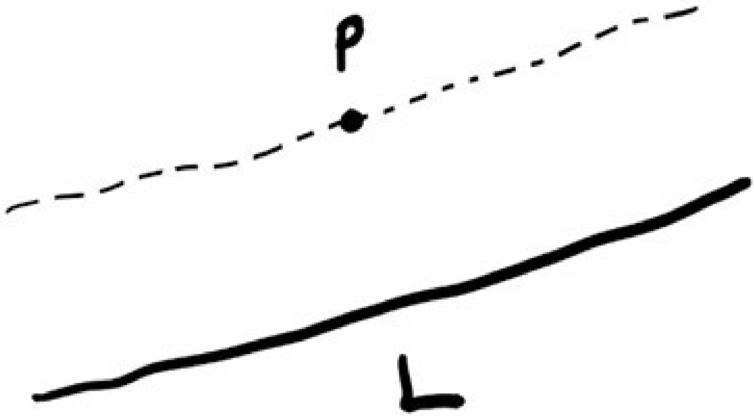
> Вы, несомненно, видели[60] те тонкие структуры кремниевых игл, которые формируют скелет некоторых губок. Когда органическая материя исчезает, остается только хрупкое и изящное кружево. Правда, там нет ничего, кроме оксида кремния, но интересна именно та форма, которую он принял, и мы не могли бы ее понять, если бы не знали живой губки, которая и придала ему такую форму. Именно так и старые интуитивные представления наших отцов – даже тогда, когда мы отказались от них, – все еще придают форму логическим построениям, которые пришли им на смену.

Каким-то образом нам нужно научить людей делать выводы, не отрицая наличия интуитивных способностей – той самой живой ткани губки. И все же мы не хотим, чтобы нами управляла исключительно интуиция. Здесь поучительна история постулата о параллельных. Евклид включил его в список аксиом: «Если дана прямая L и точка P вне ее, то через точку P можно провести одну и только одну прямую, парал-

---

[60] **Вы, несомненно, видели**: Henri Poincaré, The Value of Science, trans. G. B. Halsted (New York: The Science Press, 1907), 23.

лельную прямой L»[61].



Это сложно и громоздко по сравнению с другими аксиомами, которые выглядят изящнее, например: «Через любые две точки можно провести прямую». Математикам казалось, что было бы лучше, если бы получилось вывести пятую аксиому из четырех других, которые считались более базовыми.

Но зачем? Ведь наша интуиция громко кричит, что пятая аксиома верна. Что может быть бесполезнее, чем пытаться

[61] Это не совсем так, как сформулировано у Евклида, но эквивалентно его пятому постулату, который он сформулировал еще более топорно и запутанно. [Формулировка Евклида: «И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых». «Начала», книга I. Перевод Д. Мордухай-Болтовского. *Прим. пер.*]

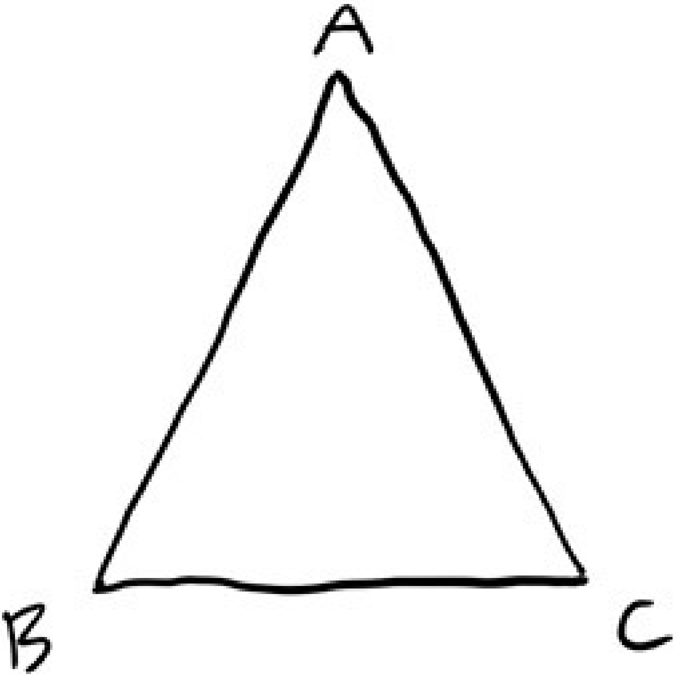
это доказать? Это все равно что спрашивать, можем ли мы доказать, что $2 + 2 = 4$. Мы это знаем!

И все же математики упорствовали, раз за разом безуспешно пытаясь показать, что пятая аксиома выводится из остальных. В итоге оказалось, что усилия изначально были обречены на неудачу, потому что существуют и другие геометрии, в которых *прямая, точка* и *плоскость* означают вовсе не то, что подразумевал под этими словами Евклид (и, вероятно, вы), однако они удовлетворяют первым четырем аксиомам, но не удовлетворяют пятой. В некоторых из этих геометрий через точку P проходило бесконечно много прямых, параллельных прямой L. В других не было ни одной такой прямой.

Нет ли тут обмана? Мы же не спрашиваем о каких-то геометрических сущностях других странных миров, которые извращенно называем прямыми. Мы говорим о *настоящих прямых*, для которых пятый постулат Евклида, безусловно, верен.

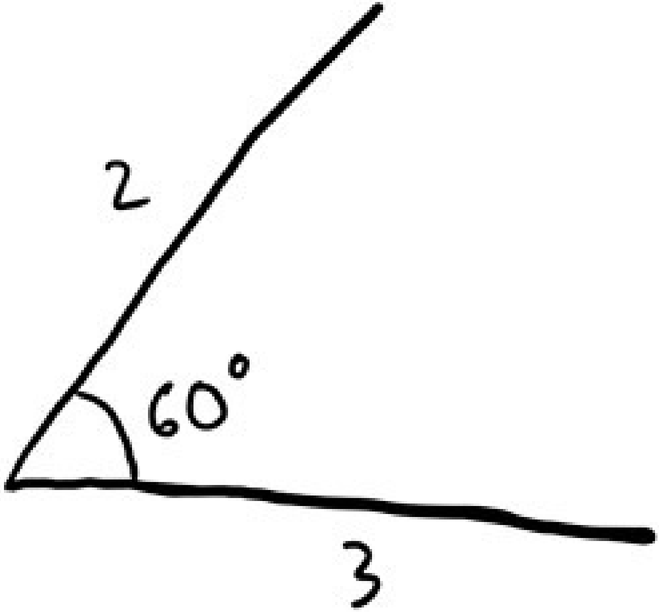
Да, конечно, вы можете пойти этим путем. Но, поступая таким образом, сознательно закроете себе доступ к целому миру геометрий просто потому, что это не та геометрия, к которой вы привыкли. Неевклидова геометрия – фундамент для обширных областей математики, включая и ту, что описывает физическое пространство, в котором мы реально живем. (Мы вернемся к этому вопросу через несколько страниц.) Мы могли бы отказаться открывать ее на основании своего жесткого евклидова пуризма. Но это была бы наша потеря.

Вот еще один пример, требующий нахождения баланса между формальной логикой и интуицией. Предположим, у нас есть равнобедренный треугольник, то есть его стороны AB и AC равны. Теорема: углы B и C тоже равны.

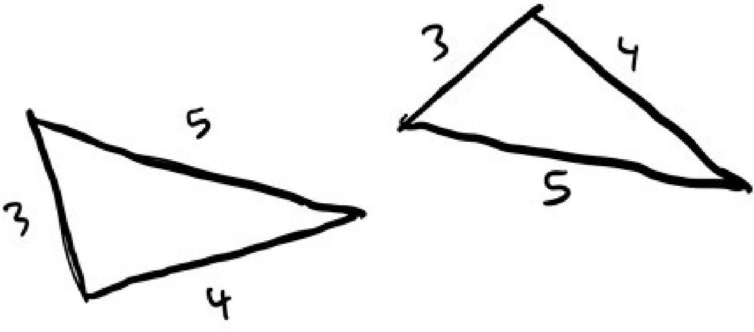


Это утверждение иногда называют *pons asinorum*, то есть мост ослов, потому что это штука, через которую почти всех нас нужно осторожно провести. Здесь доказательство Евклида поважнее, чем вышеописанная ситуация с прямыми углами. Мы сразу оказываемся *in medias res*[62], хотя в школе подходили к мосту ослов только после нескольких недель подготовки. Поэтому примем как данность Предложение 4 книги I Евклида, где говорится, что если вы знаете две стороны треугольника и угол между ними, то можете найти длину третьей стороны и два оставшихся угла. Иными словами, если я нарисую так:

[62] Латинское выражение *in medias res* (буквально «в середине вещей») используется, когда в литературном произведении сюжет начинается с ключевого эпизода, без предыстории и долгих описаний. *Прим. пер.*



то существует только один способ восстановить оставшуюся часть треугольника. Другой способ сказать то же самое: если у двух треугольников равны две пары сторон и углы между ними, то у них равны *все* углы и *все* стороны, то есть, как говорят геометры, треугольники равны, или конгруэнтны.



Мы уже обращались к этому факту, когда угол между двумя сторонами был прямым, но я думаю, что и в случае произвольного угла это кажется столь же понятным.

(Кстати, справедливо и следующее: если три стороны двух треугольников равны, то и треугольники равны; например, если длины сторон 3, 4 и 5 равны, то треугольник должен быть прямоугольным, как я нарисовал выше. Однако это менее очевидно, что Евклид и доказал несколько позднее: Предложение I.8. Если вам кажется, что это очевидно, подумайте о четырехугольнике: вспомните ромб, с которым мы недавно встречались, – у него такие же стороны, как у квадрата, но он же не квадрат.)

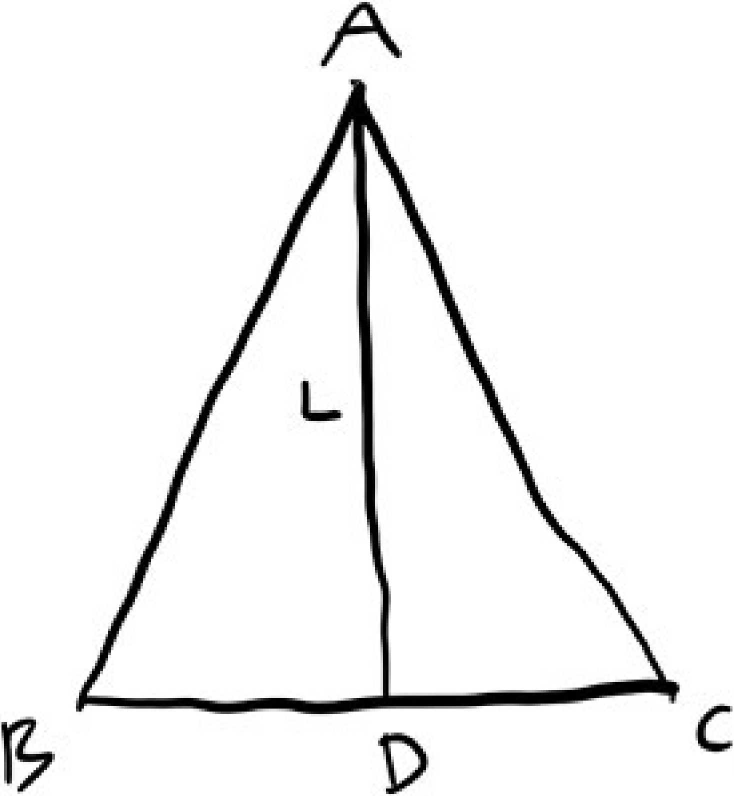
А теперь перейдем к *pons asinorum*. Доказательство в два столбца может выглядеть так:

[63]

Пусть L — прямая, которая проходит через A и делит угол BAC пополам	**Хорошо, пусть**
Пусть D — точка, в которой L пересекает BC	**По-прежнему никаких возражений***

Да, мы посреди доказательства, но у нас новая точка и новый отрезок AD, так что лучше обновить чертеж! Кстати, вспомните, что, по нашему предположению, треугольник равнобедренный, поэтому длина AB и AC одинакова; сейчас мы это используем.

[63] * Зря: если совсем строго, надо еще доказать, что прямая L пересекает отрезок BC. *Прим. науч. ред.*


A
L
B
D
C

AD и AD имеют равную длину	**Отрезок равен сам себе**
AB и AC имеют равную длину	**По условию**
Углы BAD и CAD равны	**Мы выбирали AD так, чтобы угол BAC делился пополам**
Треугольники ABD и ACD конгруэнтны	**Предложение I.4 из «Начал»**
Угол B равен углу C	**Соответствующие углы в равных треугольниках равны**

QED[64].

Это доказательство посерьезнее, чем то, что мы видели, поскольку тут вам действительно приходится что-то делать: вы проводите новую линию L и придумываете название D для точки, где L пересекает BC. Это позволяет вам воспринять точки B и C как углы двух новых треугольников ABD и ABC, которые, как мы продемонстрируем далее, равны.

Однако существует и более хитрый способ, изложенный примерно через шестьсот лет после Евклида Паппом Александрийским, еще одним геометром из Северной Африки, в трактате Συναγωγή («Математическое собрание»). (Слово «синагога» означает «собрание», и в античном мире оно могло обозначать собрание математических предложений, а вовсе не собрание евреев на молитву.)

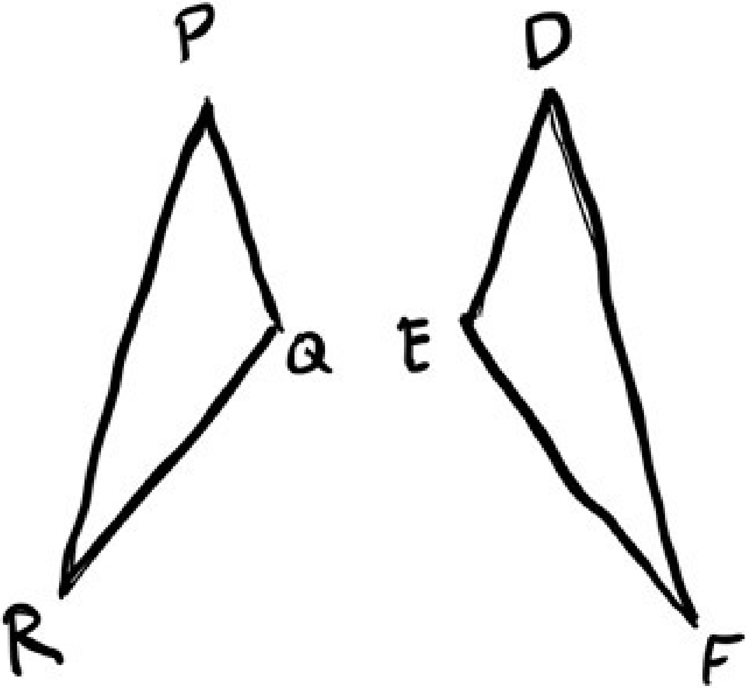
64 Сокращение латинских слов Quod Erat Demonstrandum, означающих «что и требовалось доказать».

AB и AC имеют одинаковую длину	**По условию**
Угол A равен углу A	**Угол равен сам себе**
AC и AB имеют равную длину	**Ты уже говорил это; к чему ты клонишь, Папп?**
Треугольники BAC и CAB конгруэнтны	**Снова Предложение I.4 из «Начал»**
Угол B равен углу C	**Соответствующие углы в равных треугольниках равны**

Погодите, что произошло? Казалось бы, мы ничего не делали, а нужное заключение появилось просто из ниоткуда, как кролик, выпрыгивающий при отсутствии шляпы. Это создает определенное беспокойство. Это не то, что понравилось бы Евклиду. Но так или иначе, на мой взгляд, это верное доказательство.

Ключ к идее Паппа – предпоследняя строка: треугольники BAC и CAB конгруэнтны. Кажется, что это просто утверждение о равенстве треугольника самому себе, которое выглядит тривиальным. Но присмотритесь более внимательно.

Что на самом деле мы имеем в виду, говоря, что два разных треугольника PQR и DEF конгруэнтны?



А вот что! Мы утверждаем сразу шесть вещей: длина PQ равна длине DE, длина PR равна длине DF, длина QR равна длине EF, угол P равен углу D, угол Q равен углу E, угол R равен углу F.

Конгруэнтен ли треугольник PQR треугольнику DFE? Нет, потому что на рисунке длина стороны PQ не равна длине соответствующей стороны DF.

Если мы серьезно воспринимаем определение конгруэнтности (а для нас, геометров, принимать определения всерьез – в некотором роде фирменная фишка), то треугольники DEF и DFE не конгруэнтны, *несмотря на то что это один и тот же треугольник.* Потому что DE и DF имеют разную длину.

Однако в нашем доказательстве с мостом ослов треугольник равнобедренный, а потому, когда мы воспринимаем его как треугольник BAC, он в точности тот же, что и в случае, когда мы его рассматриваем как треугольник CAB. Это не тривиальное утверждение. Если я говорю, что имя АННА читается одинаково в обоих направлениях, я в действительности сообщаю вам тот факт, что это палиндром. Возражать против самой концепции палиндрома, заявляя: «Ну конечно, это одно и то же, там две буквы А и две буквы Н, а порядок не важен», – чистое извращение.

На деле слово «палиндромный» было бы хорошим названием для треугольников типа BAC, который конгруэнтен треугольнику CAB, получаемому при записи вершин в обратном порядке. Именно благодаря такой идее Папп и сумел пройти через мост, не прибегая к дополнительным линиям и точкам.

И все же доказательство Паппа не вполне объясняет, почему равнобедренный треугольник имеет два равных угла. Представление о палиндромности равностороннего треугольника, то есть о том, что он остается таким же при записи вершин в обратном порядке, говорит вам то же, что (я уверен) и ваша интуиция: треугольник остается неизменным, когда вы берете его, переворачиваете и кладете обратно на то же место. Как и слово-палиндром, он обладает *симметрией*. Вот почему нам кажется, что углы должны быть равны.

На уроках геометрии нам обычно не разрешают говорить о переворачивании фигур[65], хотя делать это нужно. С какими бы абстракциями мы ни имели дело, математика – это то, чем мы занимаемся с помощью нашего тела. И прежде всего – геометрия. Иногда буквально: каждый математик обнаруживал, что рисует невидимые фигуры с помощью жестов, и как минимум одно исследование[66] показало, что дети, которым предлагали представить геометрическую задачу в движениях, чаще приходили к верному заключению[67]. Говорят, сам Пуанкаре в геометрических рассуждениях полагался на свое чувство движения. Он не был визуалом и плохо

---

[65] В Соединенных Штатах стандарты образования Common Core, которые должны были обеспечить универсальную базу для обучения детей по двенадцатилетней системе K-12, сейчас явно сдают позиции. В них действительно требуется, чтобы на уроках геометрии рассматривали симметрию. Остается надеяться, что, когда стандарты Common Core отступят, обсуждение симметрии останется в программах, подобно ледниковой морене.

[66] **Существует как минимум одно исследование**: M. J. Nathan, et al., “Actions Speak Louder with Words: The Roles of Action and Pedagogical Language for Grounding Mathematical Proof,” Learning and Instruction 33 (2014): 182–93.

[67] Хотя частота построения формального доказательства сделанного вывода при этом не увеличивалась!

запоминал лица и фигуры, поэтому, когда ему требовалось[68] нарисовать картинку по памяти, он, по его словам, вспоминал не то, как она выглядела, а то, как по ней двигался его взгляд.

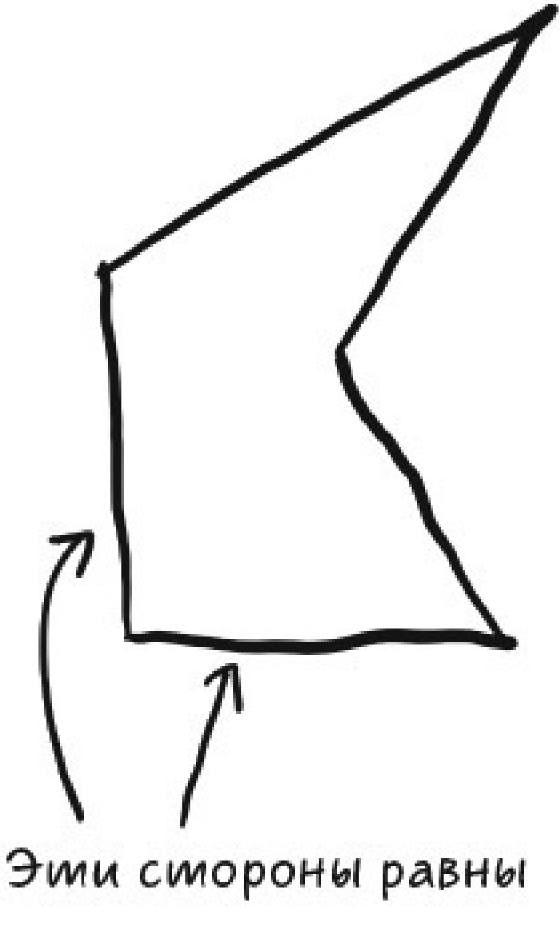
РАВНОБЕДРЕННОСТЬ

Что означает слово «равнобедренный» в названии треугольников? Прежде всего то, что две его стороны равны. В греческом языке используется слово σκέλη (скеле), что значит «ноги», отсюда и английское *isosceles*. В китайском слово 等腰 составлено из иероглифов *равный* и *талия*, на русском языке у такого треугольника равные бедра, а на иврите – равные голени. В любом случае мы, похоже, согласны с тем, что быть равнобедренным означает иметь две равные стороны. Но почему? Почему бы не определить равнобедренный треугольник как треугольник, у которого равны два угла? Вы, вероятно, заметили (а весь смысл *pons asinorum* в том, чтобы это доказать!), что равенство двух сторон означает равенство двух углов, и наоборот. Другими словами, эти два определения эквивалентны и задают одно и то же множество треугольников. Но я бы не сказал, что это одно и то же определение. Существуют и другие варианты. Бо-

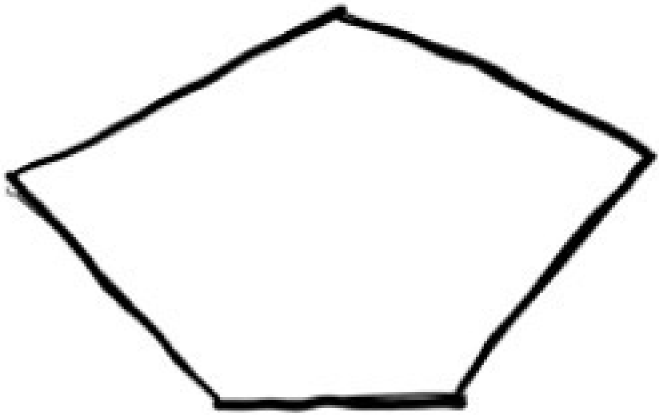
[68] **Когда ему требовалось**: Jeremy Gray, Henri Poincaré: A Scientific Biography (Princeton: Princeton University Press, 2012), 26.

лее современно было бы определить равнобедренный треугольник как палиндромный: треугольник, который вы можете взять, перевернуть, положить обратно, и он при этом не изменится. То, что у такого треугольника будут две равные стороны и два равных угла, следует почти автоматически. В этом геометрическом мире рассуждение Паппа показывало бы, что треугольник с двумя равными сторонами равнобедренный, а треугольники BAC и CAB совпадают.

Хорошее определение – то, которое проливает свет на ситуации, выходящие за рамки того, для чего оно было придумано. Идея, что *равнобедренный* означает *не изменяющийся при переворачивании,* дает нам хорошее представление о том, что такое равнобедренная трапеция или равнобедренный пятиугольник. Вы могли бы сказать, что равнобедренный пятиугольник – тот, у которого две стороны равны, но тогда вы соглашаетесь на перекошенные обвисшие пятиугольники наподобие этого:



Но хотите ли вы этого? К определению «равнобедренный» явно лучше подходит вот такой симпатичный пятиугольник:



И в самом деле, в школьном учебнике равнобедренная трапеция – это не фигура с двумя равными сторонами или двумя равными углами, а фигура, которую можно перевернуть, и она не изменится. Сюда прокралось постевклидово понятие симметрии, потому что наши мозги устроены так, что его замечают. Все чаще и чаще идея симметрии становится основанием для доказательств на уроках геометрии. Это не Евклид, но именно такова сейчас геометрия.

Глава 2. Сколько отверстий в соломинке?

Всем, кто профессионально занимается математикой, всегда приятно, когда весь интернет день или два решает какую-нибудь математическую задачку. Мы наблюдаем, как другие люди открывают для себя тот способ мышления, которым мы упиваемся всю жизнь (и наслаждаются им). Когда у вас красивый дом, вы ведь, как правило, радуетесь неожиданным визитам гостей.

Задачи, которые захватывают людей, обычно интересны, хотя на первый взгляд могут показаться пустячными. Привлекает и удерживает внимание именно ощущение встречи с реальной математической проблемой.

Например: сколько отверстий в соломинке?

Большинство из тех, кому я задавал этот вопрос, считают ответ очевидным. И бывают крайне удивлены, а иногда даже расстроены, когда узнают, что есть люди, чей очевидный ответ отличается от их собственного.

Насколько я могу судить, впервые вопрос об отверстиях в соломинке появился в статье[69] супругов Стефани и Дэвид Льюис, вышедшей в 1970 году в журнале Australasian Journal

---

[69] **Появился в статье 1970 года:** David Lewis and Stephanie Lewis, “Holes,” Australasian Journal of Philosophy 48, no. 2 (1970): 206–12.

of Philosophy: обсуждаемым трубчатым объектом был рулон бумажных полотенец. Затем этот вопрос всплыл[70] в 2014 году в виде опроса на каком-то форуме бодибилдеров. Аргументы на форуме отличались по тону от аргументов из философского журнала, но общие контуры полемики оказались довольно сходными: все ответы «ноль отверстий», «одно отверстие» и «два отверстия» имели определенное обоснование.

Затем появился ролик[71], где два приятеля из колледжа распалялись все сильнее, споря, два отверстия или одно; в итоге он стал вирусным и набрал свыше полутора миллионов просмотров. Задача о соломинке появилась на Reddit, в Twitter и в газете The New York Times. Группа молодых, привлекательных и крайне сбитых с толку сотрудников новостной компании BuzzFeed сняла видео, которое тоже набрало сотни тысяч просмотров[72].

Вероятно, вы уже начали в уме формулировать основные аргументы. Давайте перечислим их здесь.

Ноль отверстий. Ваша соломинка – это пластиковый прямоугольник, который свернули в трубочку и склеили.

[70] **Затем этот вопрос всплыл в 2014 году:** https://forum.bodybuilding.com/showthread.php?t162056763&page=1.

[71] **Затем появился ролик:** этот видеоролик был скопирован на многих сайтах, например metro.co.uk/2017/11/17/how-many-holes-does-a-straw-have-debate-drives-internet-insane-7088560/.

[72] **Сняла видео, которое:** www.youtube.com/watch?v=W0tYRVQvKbM.

В прямоугольнике никаких отверстий не было, и вы не делали в нем никаких отверстий, когда сворачивали трубку, поэтому в нем их нет.

Одно отверстие. Отверстие – это пустое пространство в центре соломинки. Оно занимает все место от верха до низа.

Два отверстия. Да просто посмотрите на нее! Одно отверстие вверху, а другое – внизу.

Моя первая цель – убедить вас, что вы заблуждаетесь насчет отверстий, даже если так не думаете. У каждого из этих вариантов есть серьезные проблемы.

Сначала разберемся с нулем. Предмет может иметь отверстие, даже если из него ничего не убирали. Вы же не делаете бублик, выпекая сначала булочку, а потом пробивая ее центр. Нет, вы раскатываете змейку из теста[73], а затем соединяете ее концы и получаете бублик. Если вы станете утверждать, что в бублике нет дырки, вас засмеют в любом уважающем себя магазине по всему миру. Считаю, что этот вопрос решен окончательно.

А как насчет теории с двумя отверстиями? Тут возникает

---

[73] **Нет, вы раскатываете:** честно говоря, среди изготовителей бубликов есть и те, кто делает змейку и соединяет ее в кольцо, и те, кто делает круглую лепешку и пробивает отверстие в середине. Однако никто из них не делает дырку в уже готовом выпеченном хлебе без дырок.

такой вопрос: если в соломинке две дырки, то где начинается одна и заканчивается другая? Если это вас не беспокоит, подумайте о кусочке швейцарского сыра. Будете ли вы считать дырки в нем по отдельности сверху и снизу?

Или такой аргумент: заполним чем-нибудь низ соломинки. Иными словами, уберем то, что вы, двухдырочники, считаете нижним отверстием. Теперь соломинка – фактически высокий узкий стакан. Есть ли в стакане отверстие? Да, скажете вы: наверху как раз и есть отверстие. Хорошо, тогда давайте уменьшать высоту стакана, пока он не станет пепельницей. Вы однозначно не будете утверждать, что верх пепельницы представляет собой отверстие. Но если при переходе от стакана к пепельнице дырка пропала, то *когда именно?*

Вы можете заявить, что пепельница все равно имеет отверстие, поскольку в ней есть углубление – отрицательное пространство, где нет материала, который там мог бы быть. Вы настаиваете, что отверстие «не обязано проходить насквозь», ведь говорят же люди про отверстия в земле. Это справедливое возражение, но я думаю, что если мы станем воспринимать как дыру любую впадину или выемку, то понятие станет слишком широким, а потому бесполезным. Когда вы говорите, что ведро дырявое, то вовсе не имеете в виду какую-то вмятину в его дне, а указываете на то, что оно больше не удерживает воду. Если вы откусываете кусок от булочки, то она от этого не превращается в бублик.

Остается одно отверстие. Это самый популярный из трех вариантов, но я испорчу и его. Когда я задал вопрос о соломинке своей подруге Келли, она отвергла теорию одного отверстия очень просто: «Означает ли это, что рот и анус – одно и то же отверстие?» (Келли преподает йогу, поэтому склонна смотреть на вещи с анатомической точки зрения.) Это хороший вопрос.

Однако давайте предположим, что вы из тех смельчаков, которые рискнут принять равенство рот = анус. Проблемы все равно остаются. Вот сцена из ролика с теми парнями из колледжа (впрочем, если серьезно, лучше посмотрите его сами, я не смогу так точно передать красиво нарастающее разочарование с помощью реплик и сценических указаний). Первый парень – сторонник однодырочной теории, второй – двухдырочной.

Второй (держит вазу). Сколько в ней дырок? Одна, верно?

(Первый выражает согласие невербально.)

Второй (держит рулон бумажных полотенец). Сколько тут дырок?

Первый. Одна.

Второй. Как? (Снова держит вазу.) Неужели они выглядят одинаково?

Первый. Потому что если я сделаю дырку тут (показывает жестом на дно вазы), то все равно остается одна дырка!

Второй (раздраженно). Ты только что сказал: *если я сде-*

лаю дырку тут (издает что-то вроде раздосадованного причитания).

Первый. Если я сделаю еще одну дырку тут, это будет…

Второй. Правильно – *еще одна* дырка, включая эту. Две! Точка!

Второй студент в этой сцене выражает весьма правдоподобный принцип: если вы делаете в предмете новую дырку, то число дырок должно увеличиться.

Давайте усложним ситуацию: сколько дырок в штанах? Большинство людей сказали бы, что три – одна на талии и две на концах штанин. Но если вы зашьете талию, то останется большая джинсовая соломинка с изгибом. Если вы начинали с трех отверстий и одно убрали, то должно остаться два, а не одно, не так ли?

Если вы сторонник варианта с одним отверстием в соломинке, то, возможно, скажете, что в штанах только два отверстия, так что после зашивания талии остается одно. Такой ответ я слышу часто, но он страдает тем же, что и теория с двумя дырками в соломинке: если в штанах два отверстия, то где заканчивается одно и начинается другое?

Или вы считаете, что в штанах всего одна дыра, поскольку под ней подразумеваете область отрицательного пространства внутри брюк? А если я порву свои джинсы на коленке и сделаю новую дырку? Она не считается? Вы настаиваете, что это всего лишь новое отверстие, ведущее в ту же самую дыру? И когда вы зашиваете низ штанов или затыкаете низ соломинки, вы не убираете дыру, а просто закрываете один вход (или выход) в нее.

Но это возвращает нас к вопросу, есть ли отверстие в пепельнице. Или еще хуже. Предположим, у меня есть надутый воздушный шарик. Согласно вашему мнению, в шарике есть дыра – пустое пространство внутри. Я беру иголку и прокалываю шарик. Он лопается и превращается в круглый кусок резины (может, с завязанным узлом), который, очевидно, не имеет дыры. Итак, вы взяли предмет с дырой, проделали в нем дыру и получили то, в чем дыры нет.

Вот теперь вы запутались? Надеюсь, что да!

Математика не дает точного ответа на этот вопрос. Она не может вам сказать, что вы подразумеваете под словом «дыра» или «отверстие», – это ваше индивидуальное понимание. Но она может вам подсказать, что вы могли иметь в виду; а это хотя бы не даст вам споткнуться о собственные предположения.

Позвольте мне начать с раздражающе философского заключения: в соломинке два отверстия, но это *одно и то же* отверстие.

ХОРОШИЕ ВЫВОДЫ ИЗ ПЛОХО НАРИСОВАННЫХ ФИГУР

Здесь мы вступаем в область геометрии под названием топология. В ней нас не волнует величина объектов, их удаленность друг от друга, степень изогнутости или деформации. На первый взгляд это может показаться вопиющим отходом от темы нашей книги, а на второй – оставить вас в недоумении, не предлагаю ли я какой-то геометрический нигилизм, когда нас не заботит ничего.

Нет! Заметная часть математики состоит в том, чтобы понять, о чем мы можем позволить себе не заботиться, временно или навсегда. Такое избирательное внимание – базовая часть нашего мышления. Скажем, вы переходите улицу, и тут какая-то машина проскакивает на красный и мчится на вас. Есть множество вещей, которые вы можете учесть, планируя свой следующий шаг. Можете ли вы достаточно хорошо рассмотреть через ветровое стекло, трезв ли водитель? Какая модель у автомобиля? Надели ли вы сегодня чистое нижнее белье на случай, если в итоге вас собьют и вы будете лежать на асфальте? Все эти вопросы вы не задаете, позволяя себе не заботиться о них, и все свое сознание фокусируете на попытке определить траекторию движения машины, чтобы успеть отскочить с ее пути как можно быстрее и дальше.

Математические задачи обычно не столь драматичны, однако приводят к аналогичным процессам абстрагирования – умышленного игнорирования всех параметров, не относящихся непосредственно к стоящей перед нами проблеме. Ньютон сумел справиться с задачами небесной механики, когда понял, что небесные тела двигаются не по каким-то собственным прихотям, а по универсальным законам, применимым к каждой частице материи во Вселенной. Для этого ему пришлось заставить себя забыть о том, из чего сделан объект и какова его форма: все, что имело для Ньютона значение, – это масса объекта и расположение относительно других тел. Или шагнем еще дальше, к истокам математики. Сама идея *числа* состоит в том, что при вычислениях вы можете оперировать семью коровами, семью камнями или семью людьми, используя одни и те же правила подсчета и комбинирования, а отсюда уже недалеко до семи наций или семи идей. Не имеет значения (для данных целей), *что* это за объекты, – важно только их количество.

Топология – это нечто подобное, только для фигур. В своей нынешней форме она восходит к Анри Пуанкаре. Опять он! Это имя мы будем слышать не раз, поскольку Пуанкаре приложил руку к ошеломительно широкому диапазону геометрических идей – от специальной теории относительности до теории хаоса и тасования карт. (Да, тут тоже есть теория, и это тоже геометрия; мы к ней еще вернемся.) Пуанкаре родился в 1854 году в Нанси в состоятельной семье профессора медицины. В пятилетнем возрасте он серьезно заболел дифтерией и несколько месяцев совершенно не мог говорить; мальчик полностью выздоровел, но все детство был физически слабым. Уже взрослого один студент описывал его так: «Прежде всего я вспоминаю его глаза[74]:

[74] **Прежде всего я вспоминаю его глаза:** Galina Weinstein, “A Biography

близорукие, но яркие и проницательные. В остальном в памяти хранится образ невысокого сутулого мужчины с неуклюжими движениями туловища и конечностей». Когда Пуанкаре был подростком, немцы захватили Эльзас и Лотарингию, хотя Нанси остался под властью Франции. Неожиданное и абсолютное поражение во Франко-прусской войне стало национальной трагедией; Франция не только решила вернуть утраченные территории, но и стала воспроизводить ту бюрократическую эффективность и технологическую компетентность, которую сочла причиной военного превосходства Германии. Подобно тому как запуск советского спутника привел к волне финансирования научного образования в Соединенных Штатах в конце 1950-х годов, утрата Эльзаса[75] и Лотарингии побудила Францию догнать Германию с ее лучше организованными научными учреждениями. Пуанкаре, который изучил немецкий язык во время оккупации, принадлежал к новому авангарду французских математиков, получивших современную подготовку и превративших Париж в один из математических центров мира с лидером в лице Пуанкаре.

Пуанкаре был выдающимся студентом, но не вундеркиндом: его первая серьезная работа появилась, когда ему было около 25 лет, а всемирно известной фигурой он стал толь-

---

of Henri Poincaré–2012 Centenary of the Death of Poincaré," ArXiv preprint server, July 3, 2012, 6; https://arxiv.org/pdf/1207.0759.pdf.

[75] **Утрата Эльзаса:** Gray, Henri Poincaré, 18–19.

ко в конце 1880-х годов. В 1889 году он получил[76] премию шведского короля Оскара за лучшее эссе по задаче трех тел, в которой требуется определить положение трех небесных тел, двигающихся под действием гравитации. Эта задача не до конца понята и в XXI веке, однако в своей статье Пуанкаре заложил основы теории динамических систем – метода, используемого современными математиками для изучения как задачи трех тел, как и тысяч других проблем.

Пуанкаре отличался редкой пунктуальностью[77] и работал над математическими проблемами ровно четыре часа в день – с десяти утра до полудня и с пяти до семи вечера. Он верил в крайнюю важность интуиции и бессознательной работы, однако его карьера была в каком-то смысле очень методичной: ее характеризовали не столько яркие моменты озарения, сколько систематическое и неуклонное расширение царства познаваемого на территории тьмы по четыре часа в будни и никогда – по выходным. С другой стороны, у Пуанкаре, как известно, был ужасный почерк, а поскольку он одинаково владел обеими руками, в Париже ходила шутка[78], что Пуанкаре может писать одинаково хорошо, то есть оди-

[76] **В 1889 году он получил:** June Barrow-Green, “Oscar II’s Prize Competition and the Error in Poincaré’s Memoir on the Three Body Problem,” Archive for History of Exact Sciences 48, no. 2 (1994): 107–31.

[77] **Пуанкаре отличался редкой пунктуальностью:** Weinstein, “A Biography of Henri Poincaré,” 20.

[78] **В Париже ходила шутка:** Tobias Dantzig, Henri Poincaré: Critic of Crisis (New York: Charles Scribner’s Sons, 1954), 3.

наково плохо, любой рукой.

Он был не только самым выдающимся математиком своего времени[79], но и популяризатором науки для широкой публики: его книги, рассказывающие о таких модных темах, как неевклидова геометрия, радий или новые теории бесконечности, расходились десятками тысяч экземпляров и были переведены на английский, немецкий, испанский, венгерский и японский языки. Он был мастером слова с особым талантом выражать математическую идею в каком-нибудь тонком изречении. Вот одно из них, весьма подходящее для стоящей перед нами задачи:

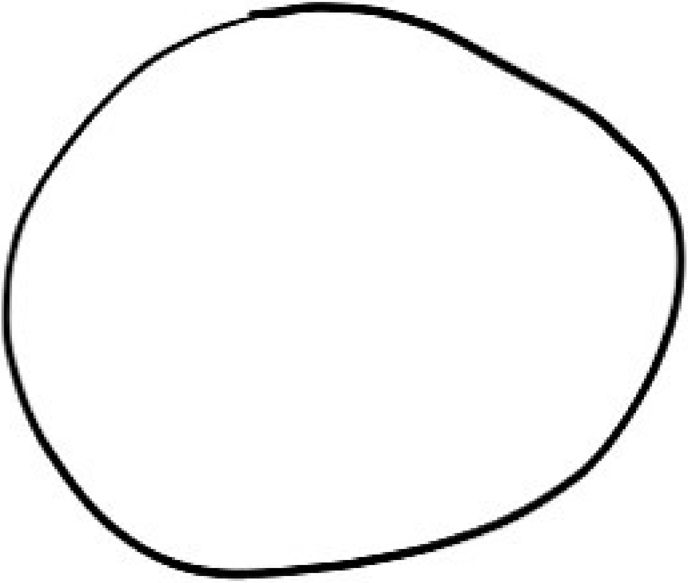
> Геометрия – это искусство делать хорошие выводы из плохих чертежей[80].

Иными словами, если мы с вами собираемся поговорить об окружности, мне нужно, чтобы нам было на что смотреть, поэтому я беру лист бумаги и рисую ее.

---

[79] **Он был не только:** Gray, Henri Poincaré, 67.

[80] **Геометрия – это искусство:** “La Géométrie est l’art de bien raisonner sur des figures mal faites.” Henri Poincaré, “Analysis situs,” Journal de l’École Polytechnique ser. 2, no. 1 (1895): 2.



Если у вас педантичное настроение, вы можете возразить, что это не окружность; возможно, у вас есть линейка и вы проверяете, что расстояние от предполагаемого центра до каждой точки предполагаемой окружности вовсе не одинаково. Ладно, соглашаюсь я, но, когда мы говорим о числе дырок в круге, это неважно. В этом отношении я следую примеру самого Пуанкаре, который – в соответствии со своим изречением и своим ужасным почерком – рисовал фигуры отвратительно. Его ученик Тобиас Данциг вспоминал:

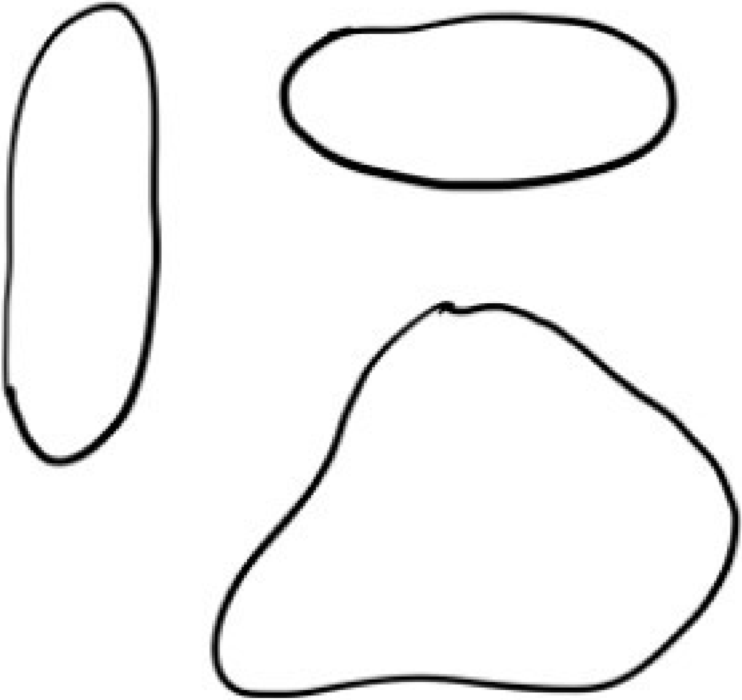
«Окружности, которые он рисовал[81] на доске, были чисто формальными, они напоминали настоящие только тем, что были замкнутыми и выпуклыми»[82].

Для Пуанкаре и для нас все это – окружности.

---

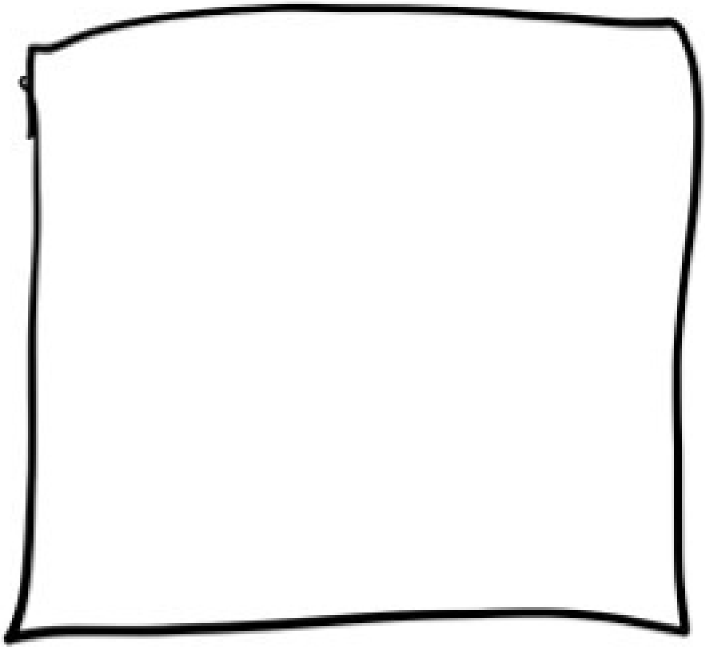
[81] **Окружности, которые он рисовал:** Dantzig, Henri Poincaré, 3.

[82] Термин «выпуклый» означает примерно «выгибающийся только наружу, а не внутрь». Подробнее об этом – в главе 14, где мы встретимся с еще более вычурными формами избирательных округов.



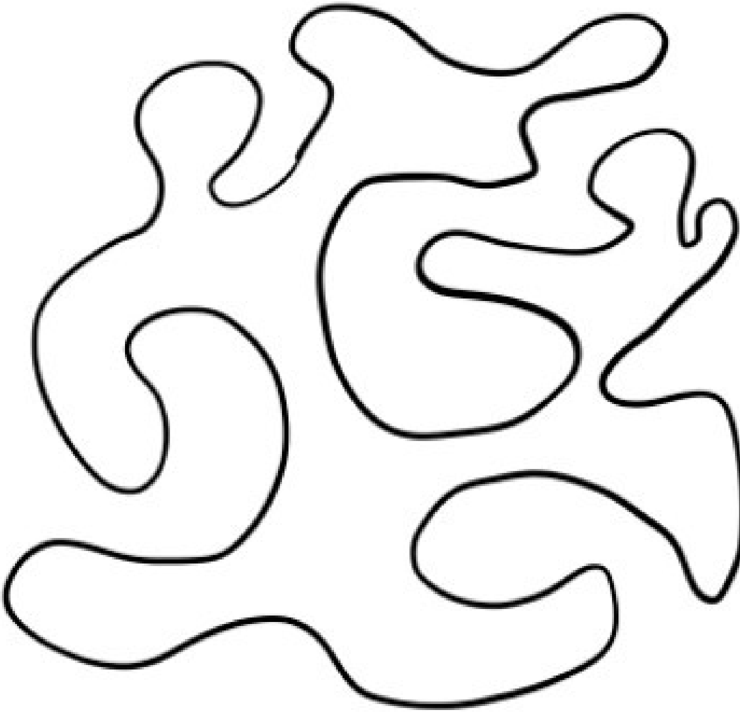
Даже квадрат – это окружность![83]

[83] Точнее, так: квадрат – это окружность, если нас интересуют топологические вопросы, например: сколько отверстий в фигурах, которые они ограничивают, или на сколько частей распадаются такие фигуры. Если же вас волнуют вопросы вроде «сколько касательных можно провести к кривой в одной точке», то квадрат и окружность сильно отличаются.

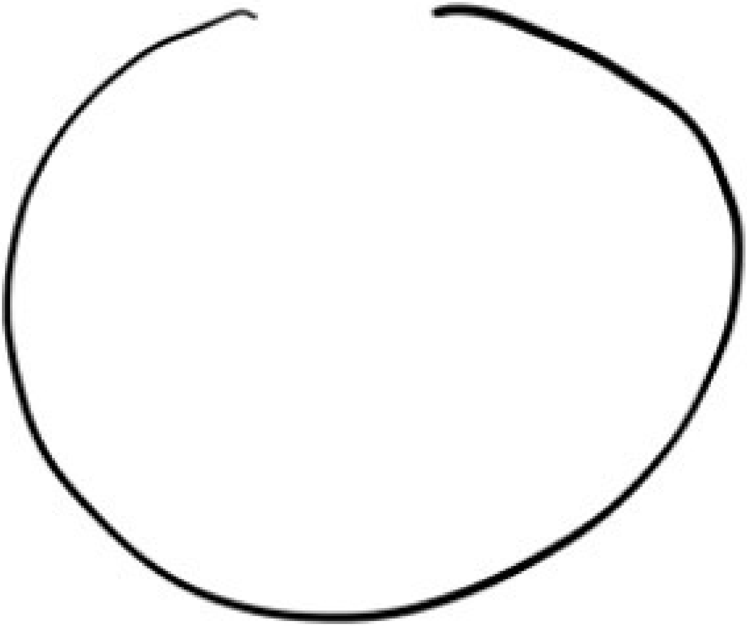


И эта дурацкая загогулина – тоже[84].

[84] Хотя эта фигура не является всюду выпуклой. *Прим. науч. ред.* [Научный редактор *всегда* должен быть в педантичном настроении. *Прим. науч. ред.*]



Но вот это не окружность,

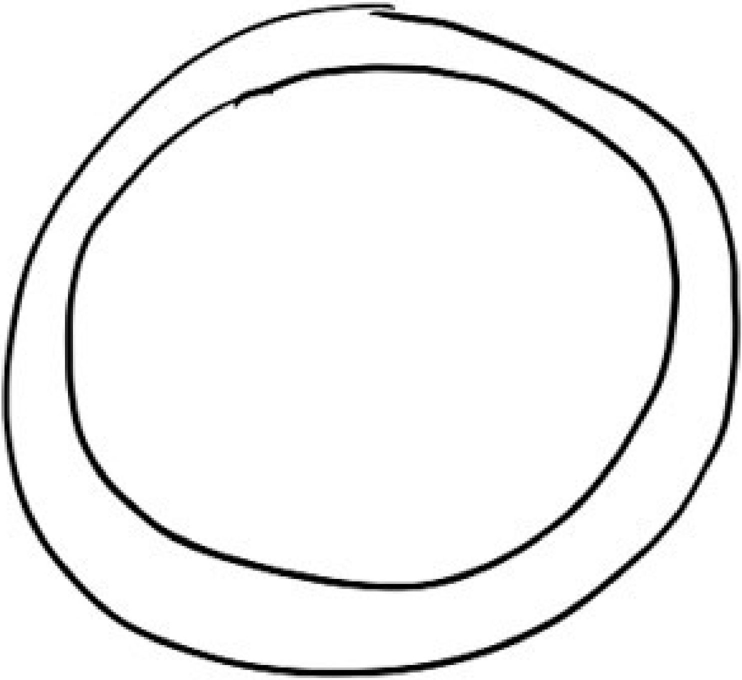


потому что в ней есть разрыв. Разорвав окружность, я совершил нечто более необратимо жестокое, нежели сминание, сгибание и даже загибание углов. Я действительно изменил ее форму, превратив в плохо начерченный отрезок вместо плохо начерченной окружности, и перешел от объекта с дырой внутри к объекту без дыры.

Вопрос об отверстиях в соломинке кажется топологическим вопросом. Нужно ли двум математикам знать точные размеры соломинки, действительно ли она прямая и представляет ли ее поперечное сечение идеальный круг, который одобрил бы Евклид? Конечно же, нет. На каком-то уровне они понимают, что от этих вещей при достижении их целей можно спокойно отказаться.

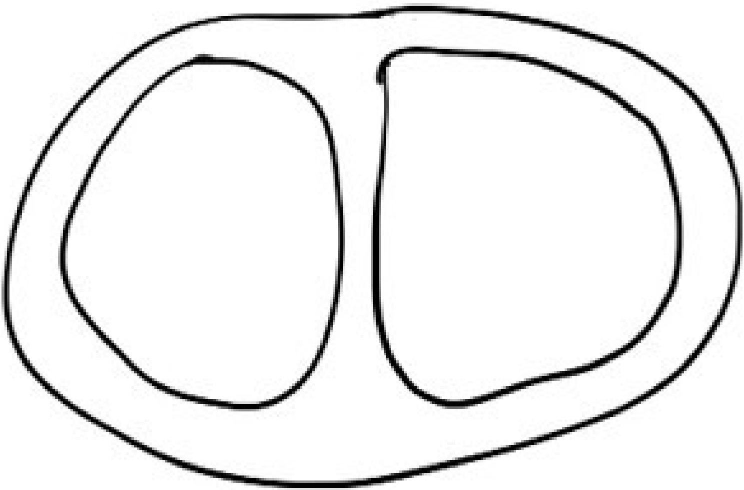
Но что останется, когда вы от них откажетесь? Пуанкаре советует нам взять соломинку и укорачивать, укорачивать и укорачивать ее. Однако для него это все та же соломинка. Очень скоро она превратится в узкую полоску пластика.

Можно пойти дальше и разогнуть стенки наружу, чтобы получилась плоская фигура на странице книги.



Официальное геометрическое название такой фигуры, заключенной между двумя окружностями, – *кольцо*, хотя вы можете считать это грампластинкой, или летающим кольцом Aerobie, или чакрамом – индийским метательным оружием XVII века с острым, как бритва, внешним краем. Как бы вы его ни назвали, это все равно плохо нарисованная соломинка и у нее всего одно отверстие.

Если топология настаивает, что в соломинке всего одно отверстие, то что она говорит насчет штанов? Мы можем укоротить их, как делали с соломинкой. Сначала они станут шортами, а потом и стрингами. Когда я разложу стринги на странице книги, которую вы читаете, вы увидите двойное кольцо,



в котором явно два отверстия. Итак, мы пришли сейчас к заключению, что у соломинки одно отверстие, а у штанов – два.

ШТАНЫ НЁТЕР

Но проблемы еще не закончились. Если в штанах два отверстия, *то какие?* При вышеописанном процессе укорачивания это штанины, а талия становится внешним краем. Но вы могли заметить, складывая белье, что с равным успехом можете сделать стринги по-другому, когда одна «штанина» станет внешним краем, а вторая «штанина» и талия будут двумя дырками.

Моя дочь, вовсе не знакомая с работами Пуанкаре, сказала, что штаны имеют два отверстия, аргументируя это тем, что отверстие в пояснице – это комбинация отверстий в ногах. Она права! И лучший способ это понять – серьезно воспринять аналогию между штанами и соломинкой. Попробуйте представить соломинку, через которую пьете солодовый молочный коктейль, в виде штанов. Вы можете окунуть одну штанину в бокал и тянуть напиток: через штанину заходит, а через талию выходит к вам в рот одно и то же количество жидкости. Вы можете сделать то же самое с другой штаниной, а можете опустить в коктейль обе. Но что бы вы ни делали, по закону сохранения молочного коктейля его количество, выходящее из талии, равно сумме количеств, поступающих через штанины. Если в левую штанину поступает 3 миллилитра коктейля в секунду, а в правую – 5 миллилитров в секунду, то сверху вытечет 8 миллилитров напитка[85]. Вот почему моя дочь права, сказав, что отверстие для талии – на самом деле не новое отверстие, а комбинация двух отверстий для ног.

Так значит ли это, что отверстия для ног – *настоящие* дырки? Не торопитесь. Всего секунду назад, складывая только что постиранные стринги, мы считали, что никакой разницы между «штанинами» и талией нет. Однако сейчас, похоже, талия снова играет особую роль: 3 + 5 = 8, но не 5 + 8 = 3 или 8 + 3 = 5.

Тут требуется аккуратность в отношении положительных и отрицательных чисел. Выходящий поток противоположен входящему, поэтому нужно брать его с обратным знаком: вместо того чтобы говорить, что 8 миллилитров вытекают через талию соломинки, мы скажем, что втекают – 8 миллилитров! И теперь у нас есть красивое симметричное описание: сумма потоков через три входа равна нулю. Чтобы описать полную картину протекания коктейля через штаны, я просто должен назвать два числа из трех, причем неважно, какие именно два. Подойдет любая пара.

Теперь мы готовы исправить ту ложь, что сказали ранее. Должен признать, не совсем верно говорить, что отверстие

---

[85] Нет, я не знаю, как вы умудряетесь пить коктейль, чтобы через одну соломинку проходило в $1^2/_3$ раза больше жидкости, чем через другую. Но вы уже подарили мне соломинку в форме штанов, так что с равным успехом можете продолжать этот мысленный эксперимент.

вверху соломинки (настоящей соломинки) – это то же самое отверстие, что и внизу. Но оно и не абсолютно новое. Отверстие вверху – это *негатив* отверстия внизу. То, что втекает в одно, должно вытекать из другого.

Математики и до Пуанкаре (особенно тосканский геометр и политик Энрико Бетти) боролись с вопросом, как задать форму нескольким отверстиям, однако именно Пуанкаре первым понял, что одни отверстия могут быть комбинациями других. Но даже он не думал об отверстиях так, как нынешние ученые; для этого пришлось ждать работу немецкого математика Эмми Нётер в середине 1920-х. Нётер ввела в топологию понятие *группы гомологий*, и с тех пор мы используем именно такое понимание отверстий.

Нётер выражала свои идеи на языке «цепных комплексов» и «гомоморфизмов», а не штанов и молочных коктейлей, но я буду придерживаться наших нынешних понятий, чтобы избежать болезненного стилистического перехода. Новаторство Нётер заключалось в том[86], что неправильно думать о дырах как о дискретных объектах, скорее это похоже на на-

---

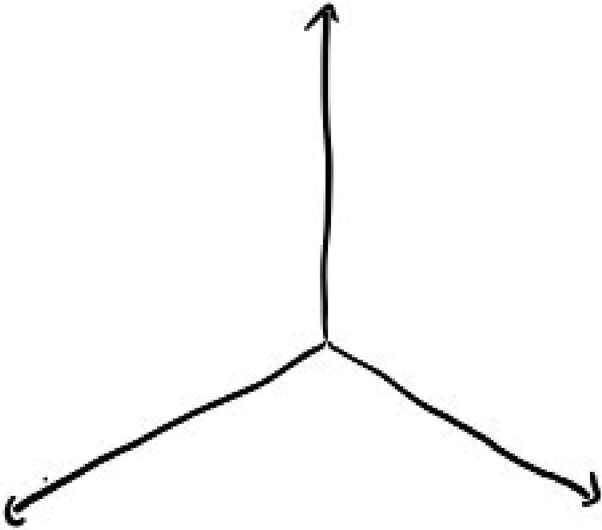
[86] **Новаторство Нётер:** ради справедливости по отношению к Пуанкаре отметим, что Леопольд Вьеторис, работавший на заре топологии и скончавшийся в 2002 году в возрасте 110 лет, указывал, что Пуанкаре понимал, что штаны образуют пространство, но не выразил это в своей работе. Я предпочитаю действия Нётер. (Saunders Mac Lane, "Topology Becomes Algebraic with Vietoris and Noether," Journal of Pure and Applied Algebra 39 (1986): 305–07.) Сам Вьеторис независимо от Нётер и примерно в то же самое время формализовал это же понятие, однако в те дни математические результаты Вены не сразу становились известны в Геттингене, и наоборот.

правления в пространстве.

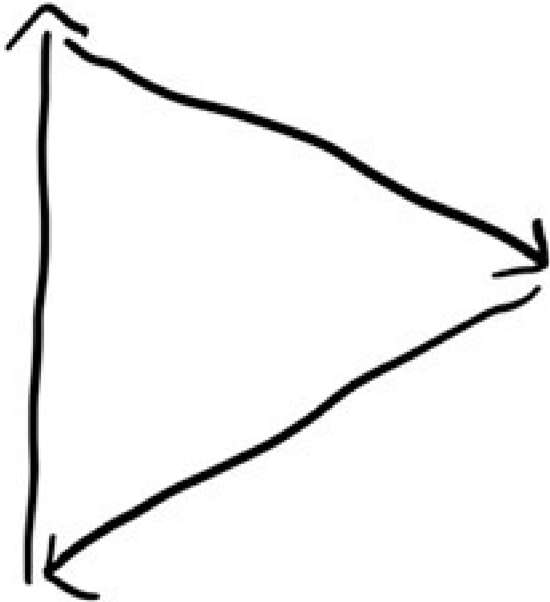
Сколько направлений вы можете проложить на карте? В каком-то смысле вы можете двигаться в бесконечном множестве направлений: на север, юг, восток, запад; на юго-запад или северо-северо-восток; держать курс точно на 43,28 градуса к востоку от южного направления. Однако суть в том, что при всем богатстве выбора есть только два основных направления, в которых вы можете путешествовать: вы доберетесь куда угодно, комбинируя всего два направления – на север и на восток (если будете считать 10-мильное путешествие на запад отрицательным 10-мильным путешествием на восток).

Однако нет смысла спрашивать, какие два направления будут основными, из которых следуют все остальные. Любая пара ничем не хуже другой; можно выбрать север и восток, юг и запад, северо-запад и северо-северо-восток. Единственное, что вы не можете сделать, так это выбрать два совпадающих или противоположных направления, поскольку тогда вам придется ограничиться движением по одной линии.

Верх и низ соломинки – полные противоположности, север и юг. Здесь можно обнаружить только одно измерение. Талия и штанины, напротив, заполняют два измерения, например:



Проехав в одном из этих направлений, затем во втором, затем в третьем, вы вернетесь в исходную точку.



Три направления аннулируют друг друга, давая в сочетании ноль.

«Сегодня это считается самоочевидным[87], – писали Павел

[87] **Сегодня это считается самоочевидным:** "Diese Tendenz scheint heute selbstverstandlich; sie war es vor acht Jahren nicht; es bedurfte der Energie und des Temperamentes von Emmy Noether, um sie zum Allgemeingut der Topologen zu machen und sie in der Topologie, ihren Fragestellungen und ihren Methoden, diejenige Rolle spielen zu lassen, die sie heute spielt." Paul Alexandroff and Heinz Hopf, Topologie I: Erster Band. Grundbegriffe der Mengentheoretischen Topologie Topologie der Komplexe Topologische Invarianzsätze und Anschliessende Begriffsbildungen Verschlingungen im n-Dimensionalen Euklidischen Raum Stetige

Александров и Хайнц Хопф в своем фундаментальном труде по топологии 1935 года, – однако восемь лет назад это было не так. Потребовалась энергия и индивидуальность Эмми Нётер, чтобы сделать это знание обычным для топологов. Благодаря ей оно стало играть современную роль в задачах и методах топологии».

«СЕГОДНЯ НИКТО НЕ СОМНЕВАЕТСЯ, ЧТО ГЕОМЕТРИЯ N ИЗМЕРЕНИЙ – РЕАЛЬНАЯ ВЕЩЬ»

Пуанкаре создал современную топологию, однако он ее так не называл, а использовал более громоздкий термин *analysis situs* («анализ места»). Хорошо, что он не прижился! На самом деле слово «топология» на шестьдесят лет старше, а придумал его Иоганн Бенедикт Листинг – ученый-универсал, который также изобрел слово «микрон» для обозначения миллионной доли метра, внес важный вклад в физиологию зрения, занимался геологией и изучал содержание сахара в моче больных диабетом. Он ездил по миру, измеряя магнитное поле планеты с помощью магнитометра, изобретенного его учителем Карлом Фридрихом Гауссом. Он был компанейским и доброжелательным человеком (возможно, даже слишком компанейским), пытаясь избавиться от своего дол-

---

Abbildungen von Polyedern (Berlin: Springer-Verlag, 1935), ix. Благодарю Андреаса Зигера за помощь в переводе этого абзаца.

га. Физик Эрнст Брайтенбергер назвал его «одним из многих второстепенных универсалов, которые придавали колорит истории науки XIX столетия»[88].

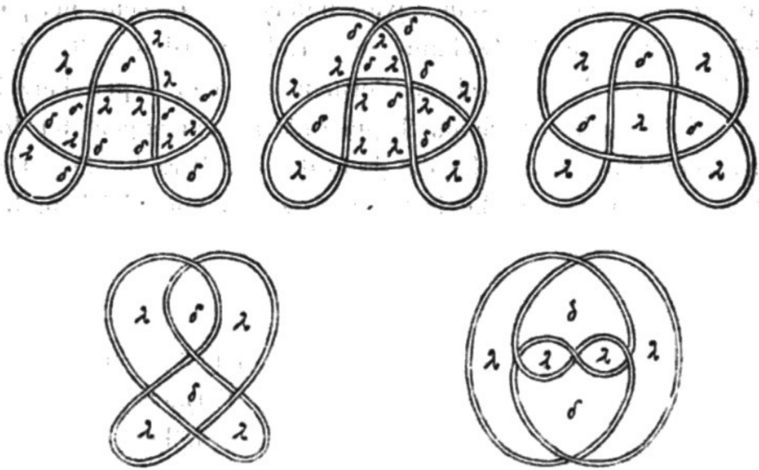
Летом 1834 года Листинг сопровождал своего состоятельного друга Вольфганга Сарториуса фон Вальтерсхаузена в поездке к вулкану Этна на Сицилии, а в свободное время, когда вулкан спал, размышлял о формах и их свойствах и придумал термин «топология». У него не было такого систематического подхода, как у Пуанкаре или Нётер: в топологии, как и в других областях науки, и в жизни, он был чем-то вроде сороки, летящей туда, куда ее влекли интересы. Он оставил множество изображений узлов и нарисовал ленту Мёбиуса до Августа Фердинанда Мёбиуса[89] (хотя нет никаких подтверждений, что Листинг, как Мёбиус, понял ее любопытное свойство – наличие только одной стороны). В конце жизни он создал масштабный труд «Перепись пространственных форм», собрав в нем все формы, какие смог придумать. Он был своего рода геометрическим Одюбоном, каталогизирующим богатство разнообразия природы[90].

---

[88] **Одним из многих:** биографический материал о Листинге взят из книги Ernst Breitenberger, “Johann Benedikt Listing,” History of Topology, ed. I. M. James (Amsterdam: North-Holland, 1999), 909–24.

[89] Листинг открыл эту поверхность в июле 1858 года, а Мёбиус – в сентябре 1858-го. *Прим. пер.*

[90] Джон Джеймс Одюбон – американский натуралист и художник, стремившийся изобразить всех птиц Америки. *Прим. пер.*



Есть ли причины выходить за рамки списка Листинга? Споры о количестве отверстий в соломинке занятны, но что делает их важнее, чем, скажем, обсуждение числа ангелов, которые могут поместиться на булавочной головке?

Ответ вы можете найти в самом первом предложении статьи *Analysis Situs*, которая начинается так:

> Сегодня никто не сомневается[91], что геометрия *n* измерений – реальная вещь.

Представить себе соломинку и штаны легко, и нам не нужен формальный математический аппарат, чтобы их различать. Формы в пространствах более высоких измерений – де-

[91] **Сегодня никто не сомневается:** Poincaré, “Analysis situs,” 1.

ло другое. Наш внутренний глаз бессилен их увидеть. А мы хотим не только их рассмотреть, но и внимательно изучить. Как мы увидим, в геометрии машинного обучения мы будем искать пространство с сотнями или тысячами измерений, пытаясь найти самый высокий пик в этом невизуализируемом ландшафте. Уже в XIX веке Пуанкаре, изучая задачу трех тел, должен был отслеживать местоположение и движение материальных объектов в небе; а это означало запись для каждого небесного тела трех координат для положения и трех – для скорости[92], то есть всего шесть измерений. Поскольку у него было три движущихся тела одновременно и для каждого требовалось шесть измерений, то всего получалось восемнадцать измерений. Никакой рисунок на странице не поможет вам понять, сколько отверстий в восемнадцатимерной соломинке, не говоря уже о том, чтобы отличить ее от восемнадцатимерных штанов. Необходим новый формальный язык, который с неизбежностью будет отделен от наших внутренних представлений о том, что считать отверстием. Так всегда работает геометрия: мы начинаем с интуитивных представлений о формах физического мира (а с чего еще мы могли бы начать?), внимательно анализируем наше восприятие того, как эти формы выглядят и двигаются, – с достаточной точностью, чтобы мы могли говорить

---

[92] Для физика скорость означает не только численное значение, но и направление; вам требуется отслеживать скорость перемещения в направлении на север, восток и вверх, то есть всего три величины.

о них, не опираясь на интуицию. Потому что при выходе из мелководья трехмерного пространства, к которому привыкли, такая надобность у нас появится.

И мы уже можем видеть начало такого процесса. Остался один тревожный пример из нашего обсуждения, к которому мы готовы вернуться только сейчас. Помните воздушный шарик? В нем нет дырки. Вы протыкаете в нем дырку, раздается хлопок, и теперь перед вами резиновый диск. Очевидно, что дыры в нем нет. Но разве мы ее не сделали только что?

Вот один из способов разобраться в таком явном парадоксе. Если вы проделали в шарике отверстие и в результате в нем отверстий не оказалось, значит, изначально *в нем должно быть –1 отверстие.*

Мы стоим на развилке – в точке принятия решения. Можно отбросить либо весьма привлекательную идею, что добавление дырки в предмете увеличивает количество дырок на единицу, либо весьма привлекательную идею, что отрицательное число отверстий – полная чушь. История математики богата на подобные болезненные решения. Обе идеи интуитивно понятны, но при тщательном рассмотрении мы обнаруживаем, что они логически несовместимы. От одной надо отказаться[93].

---

[93] Сравните это с ситуацией с Джефферсоном. Он был одним из самых ярых сторонников идей свободы и равенства, которые вдохновляли революцию, но одновременно всю жизнь использовал рабский труд, несмотря на словесное неприятие, и сомневался, что чернокожий человек «способен проследить и понять исследования Евклида». Хотя он и любил Евклида, он никогда не мог прямо взгля-

Не существует абстрактной истины, сколько дыр в воздушном шаре, соломинке или штанах. Когда мы подходим к развилке, которую преподносит нам математика, нам нужно выбрать какое-то определение. Не следует считать, что один путь ложный, а другой истинный; нужно думать, что один путь лучше, а другой хуже. Лучше тот, который объяснит и прольет свет на большее количество случаев. За многие столетия математики обнаружили, что обычно лучше принять то, что кажется странным (как отрицательное число дырок), чем то, что нарушает какой-то общий принцип (например, что проделывание дырки в объекте должно увеличивать число дырок в нем на единицу). Так что я водружаю свой флаг тут: предпочтительнее сказать, что нелопнувший шарик имеет – 1 отверстие. На деле существует способ характеризации пространств под названием *эйлерова характеристика*; она представляет собой топологический инвариант, то есть не меняется при различных непрерывных деформациях. Вы можете считать, что этот параметр равен единице минус число отверстий.

Штаны: эйлерова характеристика – 1, два отверстия.

Соломинка: эйлерова характеристика 0, одно отверстие.

Лопнувший воздушный шарик: эйлерова характеристика 1, ноль отверстий.

Нелопнувший воздушный шарик: эйлерова характеристи-

нуть на это противоречие.

ка 2, –1 отверстие.

Способ описать эйлерову характеристику, чтобы она казалась менее странной, – это разность между двумя величинами: числом отверстий четной и нечетной размерности. В целом воздушном шарике, то есть в сфере, дыра есть – в том же смысле, что и дыра внутри куска швейцарского сыра: внутренняя часть шарика – дыра сама по себе. Однако ощущается, что это дыра иного рода, нежели в соломинке. Верно! Это то, что мы назвали бы двумерной дырой. Шарик имеет одну двумерную дыру и ни одной одномерной. Может показаться, что тогда эйлерова характеристика должна быть 1–1 = 0, что не соответствует нашей таблице. Мы упустили, что шарик имеет еще и нульмерное отверстие.

Что это может значить?

Вот тут и вступает в игру теория Пуанкаре и Нётер. Как следует из названия, эйлерову характеристику системно изучал швейцарский математик-универсал Леонард Эйлер, однако он рассматривал только двумерные поверхности. Многие люди, включая Иоганна Листинга, пытались распространить идеи Эйлера на трехмерный случай. Но только после Пуанкаре ученые поняли, как перенести результат Эйлера в пространства размерности более трех. Я не стану запихивать на одну страницу первый курс алгебраической топологии, а просто скажу, что Пуанкаре и Нётер дали общую теорию дыр любой размерности, и в их системе количество нульмерных отверстий в каком-то пространстве – это просто число частей, на которое оно разбивается. Шарик, как и соломинка, представляет собой единый объект, поэтому у него только одно отверстие нулевой размерности. А вот два шарика имеют два нульмерных отверстия.

Это определение может показаться странным, но с ним все работает. Шарик имеет:

> 1 нульмерное отверстие + 1 двумерное отверстие – 0 одномерных отверстий,

что дает нам эйлерову характеристику, равную 2.

В прописной букве B одно нульмерное отверстие и два одномерных, поэтому ее эйлерова характеристика равна – 1 [94]. Разрежьте нижнюю петлю буквы B – и получите букву R, у которой эйлерова характеристика равна 0: у буквы R на одно одномерное отверстие меньше, поэтому число увеличилось на 1. Разрезав петлю буквы R, получите букву K: ее эйлерова характеристика равна 1. Вы могли бы также отрезать ножку у буквы R, получив две буквы P и I; теперь у вас два отдельных куска, поэтому два нульмерных отверстия и одно одномерное в букве P дают 2–1 = 1. Каждый раз, когда вы делаете разрез, вы увеличиваете эйлерову характеристи-

---

[94] Это минимальная эйлерова характеристика для символов на вашей клавиатуре, если только у вас нет знака доллара, перечеркнутого двумя чертами (его эйлерова характеристика – 3), или символа командной клавиши на клавиатуре Apple (⌘), для которого она равна –4. Максимальная эйлерова характеристика на клавиатуре равна 2 для символов вроде ! у которых два нульмерных отверстия и нет никаких других.

ку на 1, и это верно, даже если вы своим разрезом не устраняете одномерную дыру. У буквы I эйлерова характеристика равна 1; разрежьте ее – и получите две буквы I с эйлеровой характеристикой 2. Следующий разрез даст три I и характеристику 3 и так далее.

Что, если вы сошьете вместе нижние отверстия штанов? Не стану вдаваться в подробности, но получившаяся форма в системе Пуанкаре имеет одну нульмерную и две одномерные дыры, что дает эйлерову характеристику –1. Иными словами, в штанах после нашего вандализма столько же отверстий, сколько было и до него. Вы избавились от одного, сшив отверстия у лодыжек, но создали новое, которое теперь находится между штанинами. Убедительно? С удовольствием посмотрел бы на такое рассуждение в Snapchat![95]

[95] Snapchat – мобильное приложение обмена сообщениями с прикрепленными фото и видео. *Прим. ред.*

Глава 3. Одно название разных вещей

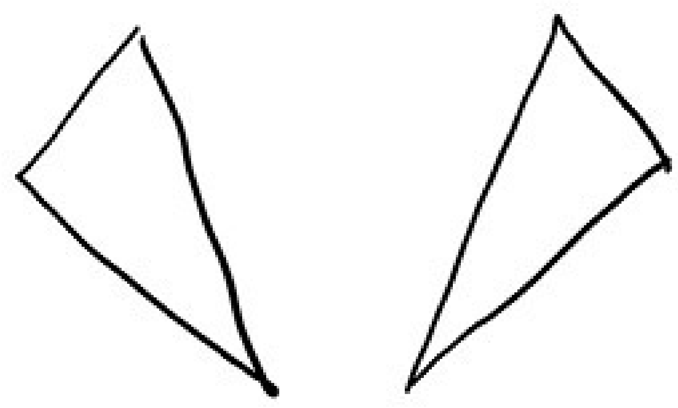
Симметрия – это основа современного понимания геометрии. Более того, то, что мы решаем считать симметрией, определяет, с какой геометрией мы имеем дело.

В евклидовой геометрии симметрии – это *движения* фигур как твердого тела: любые комбинации сдвигов (переносов), переворачиваний (отражений) и вращений. Язык симметрии позволяет говорить о конгруэнтности (равенстве) более современным способом. Вместо того чтобы сказать: два треугольника конгруэнтны, когда соответствующие стороны и углы равны, мы говорим: треугольники конгруэнтны, если существует движение, которое переводит один в другой. Разве это не более естественно? Действительно, читая Евклида, чувствуешь, что он еле сдерживается (не всегда успешно), чтобы не выразиться именно таким образом.

Зачем в качестве фундаментальных симметрий брать движения? Одна из веских причин состоит в том (хотя доказать это не так-то легко), что именно движения – это то, что вы можете проделывать с плоскостью, сохраняя при этом расстояние между точками; собственно, и слово *симметрия* происходит от древнегреческого слова συμμετρία (*соразмерность*), которое образовано из слов συμ- (*вместе, с, сов-*

местно) и μετρέω (*измеряю*). Термин, означающий «равная мера», был бы лучше; и действительно, в современной математике словом *изометрия* (от греческих слов ἴσος – *равный, одинаковый*, и μετρέω – *измеряю*) называют преобразования, которые сохраняют расстояние.

Эти два треугольника конгруэнтны,



а потому мы склонны, как и Евклид, считать, что они равны, несмотря на то что на самом деле это два разных треугольника, расположенных в нескольких сантиметрах друг от друга. Это подводит нас к другому изречению постоянно цитируемого Пуанкаре:

> Математика – это искусство давать одно название разным вещам.

Подобные проблемы с определениями – часть нашего мышления и речи. Представьте, что кто-то спрашивает вас, не из Чикаго ли вы, а вы отвечаете: «Нет, я из Чикаго двадцатипятилетней давности». Это было бы абсурдной педантичностью, поскольку, говоря о городах, мы неявно подразумеваем симметрию при переносе во времени. В стиле Пуанкаре мы называем Чикаго прошлого и Чикаго настоящего одним и тем же словом.

Конечно, мы могли бы строже Евклида отнестись к тому, что считать симметрией: например, запретить отражения и вращения, оставив только перенос на плоскости без поворотов. Тогда эти два нарисованных выше треугольника уже не были бы равны, поскольку указывают в разных направлениях.

А если оставить вращения, но отказаться от отражений? Вы можете представить это как класс допустимых преобразований, но только в пределах плоскости: вы можете передвигать и поворачивать объекты, но запрещается их поднимать и переворачивать, поскольку это означает запрещенный выход в трехмерное пространство. Согласно таким правилам, мы по-прежнему не можем назвать эти два треугольника одним именем. В левом треугольнике порядок сторон от самой короткой к самой длинной идет против часовой стрелки. Как бы вы ни двигали и не поворачивали эту фигуру, это свойство сохранится, а значит, левый треугольник никогда не совпадет с правым, в котором короткая, средняя, длинная стороны идут по часовой стрелке. Отражение меняет направление по часовой и против часовой стрелки, а переносы и повороты – нет. Без отражения направление обхода короткая, средняя, длинная сторона – это свойство треугольника, которое никакая симметрия не изменит. Это то, что мы называем *инвариантом*.

У каждого класса симметрий есть собственные инварианты. Движение не может изменить площадь треугольника или любой иной фигуры; в терминах физики мы могли бы сказать, что это закон сохранения площади для движения. Есть и закон сохранения длины, поскольку движение не может изменить длину отрезков[96].

Повороты плоскости понять легко, однако переход к трехмерному пространству значительно усложняет дело. Еще в XVIII веке (опять Леонард Эйлер!) ученые выяснили, что любое вращение трехмерного пространства можно представлять как вращение вокруг какой-то неподвижной прямой – оси. Пока все хорошо, но остается куча вопросов. Предположим, я совершаю поворот на 20 градусов вокруг вертикальной оси, а потом на 30 градусов вокруг оси, указывающей горизонтально на север. Результирующее вращение должно оказаться поворотом на некоторое количество гра-

---

[96] Должен добавить, что сохранение длины влечет за собой сохранение площади треугольников, поскольку два треугольника с одинаковыми сторонами конгруэнтны, а потому имеют одинаковую площадь; вы также можете воспользоваться красивой формулой Герона (названной так в честь математика Герона Александрийского), которая выражает площадь треугольника через его стороны.

дусов вокруг какой-то прямой, но какой? Получится примерно 36 градусов вокруг оси, направленной вверх и куда-то на северо-северо-запад. Но увидеть это непросто! Человеком, разработавшим гораздо более удобный способ думать об этих вращениях – представлять их в виде своеобразного числа, называемого *кватернионом*, – был тот самый друг Вордсворта, Уильям Роуэн Гамильтон. Как известно, 16 октября 1843 года Гамильтон с женой шли вдоль Королевского канала в Дублине, когда… Давайте дадим слово самому Гамильтону.

> Хотя она время от времени разговаривала со мной, в моей голове шла подспудная работа мысли, которая в итоге дала результат, и не будет преувеличением сказать, что я сразу понял его важность. Казалось, замкнулась электрическая цепь и проскочила искра… Я не смог устоять перед побуждением – каким бы противоречащим философии оно ни было, – проходя по мосту Брумридж, вырезать ножом на его каменной кладке фундаментальную формулу…

Конец ознакомительного фрагмента.