

БЕН ОРЛИН

О нет!.. Опять  
возьми четыре!

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ

# ИГРЫ

с дурацкими  
рисунками

От автора  
бестселлера

«МАТЕМАТИКА  
С ДУРАЦКИМИ  
РИСУНКАМИ»

75% ПРОСТЫХ,

НО ТРЕБУЮЩИХ СООБРАЗИТЕЛЬНОСТИ ИГР,

В КОТОРЫЕ МОЖНО ИГРАТЬ ГДЕ УГОДНО

№6! хороший ход  
№6!! отличный ход  
№6!!! умопомрачительный ход  
№6! эффектный ход

In fact Sir  
Boss's barn was  
built on rot.

Два броска – один набывает

01101001  
10010110

**АНО**  
АЛЬПИНА НОН-ФИКШН

(Пречистенская набережная)<sup>3</sup> + (7-я Парковая)<sup>7</sup>

МОНОПОЛИЯНОМЫ

**Бен Орлин**  
**Математические игры с  
дурацкими рисунками: 75<sup>1</sup>/<sub>4</sub>  
простых, но требующих  
сообразительности  
игр, в которые можно  
играть где угодно**

*[http://www.litres.ru/pages/biblio\\_book/?art=70114195](http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=70114195)  
Математические игры с дурацкими рисунками: 75<sup>1</sup>/<sub>4</sub> простых, но  
требующих сообразительности игр, в которые можно играть где  
удобно: Альпина нон-фикшн; Москва; 2024  
ISBN 9785002231782*

### **Аннотация**

Эта книга предназначена для того, чтобы в нее играли. Человек, играющий с математикой, похож на птицу, получающую удовольствие от полета. Способность к математическому мышлению дарована лишь людям. Не оставляйте этот подарок эволюции нераспакованным. Достаньте его. Поиграйте с ним.

*Я отдаю предпочтение играм, для которых требуется только карандаш и бумага, хотя для некоторых понадобится кое-что*

*еще... (Не нужны даже настоящие игральные кости, просто введите в браузере запрос «бросить кости».)*

Вы найдете в книге подборку неустаревающих игр, требующих логики, стратегического и пространственного мышления. Они разбиты на пять категорий: «Геометрические игры», «Числовые игры», «Комбинаторные игры», «Рисковые игры» и «Информационные игры».

Автор рассказывает о происхождении каждой игры, показывает, как она раскрывает способности человека, описывает похожие и родственные игры и приглашает читателя попробовать и исследовать их.

*Эта книга – обзор забав, знакомых только людям: игр, иначе говоря, забав, где соблюдают правила. Для этой книги я подобрал такие игры, где простые, элегантные правила – залог изысканной и каверзной забавы.*

## **Для кого**

Для тех, кто хочет найти для себя или для компании новую игру, а также узнать что-то новое о старых и знакомых играх.

# Содержание

Вступление	9
I	33
Точки-клеточки	40
Ростки	60
Супер-крестики-нолики	76
Конец ознакомительного фрагмента.	81

**Бен Орлин**

**Математические игры**

**с дурацкими рисунками:**

**75<sup>1</sup>/<sub>4</sub> простых, но требующих**

**сообразительности**

**игр, в которые можно**

**играть где угодно**

Переводчик: *Алексей Огнёв*

Научный редактор: *Константин Кноп*

Редактор: *Вячеслав Ионов*

Издатель: *Павел Подкосов*

Руководитель проекта: *Александра Шувалова*

Ассистент редакции: *Мария Короченская*

Арт-директор: *Юрий Буга*

Корректоры: *Ирина Астапкина, Лариса Татнинова*

Верстка: *Андрей Фоминов*

Дизайн обложки: *Headcase Design*

*Все права защищены. Данная электронная книга предназначена исключительно для частного использования в лич-*

ных (некоммерческих) целях. Электронная книга, ее части, фрагменты и элементы, включая текст, изображения и иное, не подлежат копированию и любому другому использованию без разрешения правообладателя. В частности, запрещено такое использование, в результате которого электронная книга, ее часть, фрагмент или элемент станут доступными ограниченному или неопределенному кругу лиц, в том числе посредством сети интернет, независимо от того, будет предоставляться доступ за плату или безвозмездно.

Копирование, воспроизведение и иное использование электронной книги, ее частей, фрагментов и элементов, выходящее за пределы частного использования в личных (некоммерческих) целях, без согласия правообладателя является незаконным и влечет уголовную, административную и гражданскую ответственность.

© Ben Orlin, 2022

© Hachette Book Group, Inc, 2022

© Издание на русском языке, перевод, оформление. ООО «Альпина нон-фикшн», 2024

\* \* \*

БЕН ОРЛИН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
**ИГРЫ**  
с дурацкими  
рисунками

75¼ ПРОСТЫХ,  
НО ТРЕБУЮЩИХ СООБРАЗИТЕЛЬНОСТИ ИГР,  
В КОТОРЫЕ МОЖНО ИГРАТЬ ГДЕ УГОДНО

*Перевод с английского*



Москва  
2024

*Посвящается Кейси – ты ежедневно учишь*

*меня новым играм, и все они волшебные, а многие  
взрывают мозг*

# Вступление

Для начала вопрос на засыпку: чем вы, по сути, отличаетесь от шимпанзе?



	Вы	Шимпанзе
Отстоящий большой палец на руках	✓	✓
Умное лицо	✓	✓
Умение формировать глубокие дружеские отношения	✓	✓
Внутренне непротиворечивые политические убеждения	✗	✗
Упоение сортирным юмором	✓	✓

Ответ: детеныш шимпанзе взрослеет, а вы так и остаетесь шимпанзенком.

Я серьезно. Посмотрите на себя: гладкая кожа, маленькая челюсть, огромный округлый череп – все эти характерные черты наши сородичи-обезьяны теряют с возрастом, а вы упрямо сохраняете. Не считите это за упрек – я и сам такой же, друзья. Мы, люди, ребячимся и во взрослой жизни, не расстаемся с «вечной молодостью», как говорил биолог Стивен Джей Гулд. Сохранение во взрослом состоянии признаков более ранних стадий развития, или по-научному

*педоморфоз*, – своего рода наша визитная карточка, отличительная особенность среди приматов. Самое приятное – мы не просто выглядим как детеныши шимпанзе. Наше поведение тоже схоже: мы обезьянничаем, исследуем, ломаем голову – одним словом, *играем*.

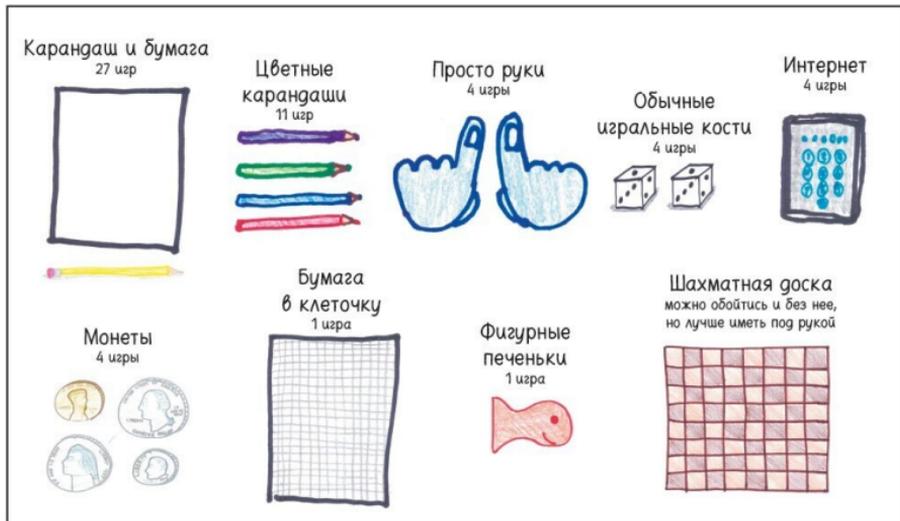
Вот так, мои детсколицы читатели, мы и стали гениями в отряде приматов. Так мы возвели пирамиды, наследили на Луне и записали мультиплатиновый альбом *Abbey Road*. Отказываясь повзрослеть и перестать дурачиться. Секрет нашей даровитости в том, что мы не прекращаем учиться, а секрет нашей обучаемости в том, что мы не прекращаем играть.

Ну что, сыграем?

## КАК ИГРАТЬ С ЭТОЙ КНИГОЙ

### Что потребуется

**1. Обычные вещи, которые легко найти дома.** Я отдаю предпочтение играм, для которых требуется только карандаш и бумага, хотя для некоторых понадобится кое-что еще. Детали изложены в каждой главе и обобщены в сводных таблицах. (Не нужны даже настоящие игральные кости, просто введите в браузере запрос «бросить кости».)



*Для каждой игры указаны те предметы, которые труднее всего раздобыть. Учтены лишь основные игры. Действуйте строго в рамках законодательства! Но если там, где вы находитесь, игры вообще запрещены, вам крупно не повезло*

**2. Партнеры по играм.** Множество математических книг предназначены для того, чтобы забавляться в одиночку. Но не эта. Я работал над ней в период «социального дистанцирования», после того как разразилась пандемия, поэтому неудивительно, что в итоге получилось признание в любви к общению. Так что, за исключением нескольких игр, вам потребуются компаньоны. И хотя моя целевая аудитория – великовозрастные шимпанзята, большинство игр оценит даже десятилетний ребенок, а многие подходят и для тех, кому всего шесть.

**3. Здоровая толика педоморфоза.** «В раннем возрасте

многие животные играют и проявляют гибкость, – писал Стивен Джей Гулд, – но, повзрослев, следуют жестко запрограммированным шаблонам». Я преподаю математику и не буду отрицать: зачастую кажется, что школьные уроки математики рассчитаны на каких-то других созданий – из тех, кто слепо движется по колее. Возможно, на термитов? Неудивительно, что в школе проявляются худшие стороны нашего мышления: мы скованны, подавлены тревогой и лишены воображения. Читая эту книгу, похороните в памяти школьное прошлое и вспомните свою истинную природу. Пусть внутри вас проснется ребенок.

**В чем цель?** Выявить лучшее в человеческом мышлении.

### **Какие правила?**

1. Эта книга – обзор забав, знакомых только людям: **игр**, иначе говоря, **забав, где соблюдают правила**. Игр на свете превеликое множество: от тех, где правил выше крыши (например, «Монополия»), до тех, где правило всего одно (например, «Пол – это лава!»); от тех, что строятся на беспощадной конкуренции (например, «Монополия»), до тех, где требуется тесная сплоченность (например, «Пол – это лава!»); от наихудших артефактов человеческой культуры (например, «Монополия») до наилучших (например, «Пол – это лава!»).

Для этой книги я подобрал такие игры, где **простые, элегантные правила** – залог **изысканной и каверзной за-**

**бавы.** Как говорится, легко научиться, трудно достичь мастерства.

## СЛИШКОМ СЛОЖНЫЕ ИГРЫ, КОТОРЫЕ Я ОТВЕРГ



Конусы Даншира



Битва за Северную Африку



Теория категорий



Крикет

## СЛИШКОМ ПРОСТЫЕ ИГРЫ, КОТОРЫЕ Я ОТВЕРГ



Крестики-нолики



Кресты-нули



Дырочки-гвоздики

2. **А что такое математические игры?** Отличный вопрос. Первым его задал мне Вито Сауро, один из самых благодушных экспертов Миннесоты по настольным играм. Почти у всех настольных игр, заметил он, математическая суть просто под разными обличьями. Уж не хочу ли я объять необъятное?

Нет-нет, ответил я. Согласно моему определению, математической является игра, создающая впечатление, как бы

это сказать, *математичности*, что ли.

Вито счел этот ответ (1) на редкость туманным и (2) вполне удовлетворительным. Как бы то ни было, я попытался собрать под одной обложкой **неустаревающие игры, требующие логики, стратегического и пространственного мышления**. Я руководствовался тремя критериями: игра должна быть (1) занятой, (2) необременительной и (3) пробуждающей математическое мышление<sup>1</sup>.

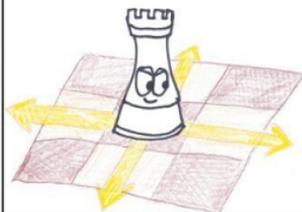
3. Книга состоит из пяти частей: **«Геометрические игры»**, **«Числовые игры»**, **«Комбинаторные игры»**, **«Рисковые игры»**, **«Информационные игры»**. Эта классификация довольно условна. Не воспринимайте ее как идеальную таксономию, где все экземпляры разложены по полочкам и на каждом наклеена бирка. Например, шахматы можно спокойно отнести к любой из пяти категорий – каждый раз вы увидите их под новым углом.

---

<sup>1</sup> Я обуздал свои педагогические порывы и не стал включать такие *класные* потехи, как «полимино», «своя игра с системами уравнений» и «кто быстрее делает домашнюю работу».

Каждая фигура имеет силу...  
испускает свет и затмевает его  
на доске.

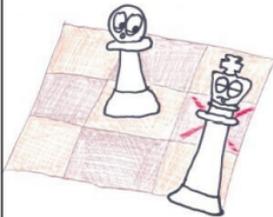
Грег Костиакян



ГЕОМЕТРИЯ

Один плохой ход сводит  
на нет 40 хороших.

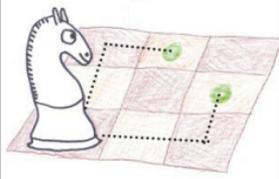
Бернхард Горвиц



ЧИСЛЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Дебют играй по-  
книжному, миттельшпиль –  
по вдохновенному, эндшпиль –  
по заведенному.

Рудольф Шпильман



КОМБИНАТОРИКА

Спасая одну фигуру, многие  
проигрывают игру.

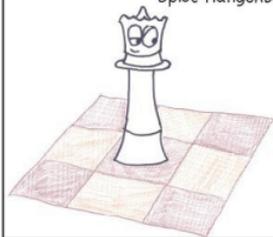
Савелий Тартаковер



РИСК И ВОЗНАГРАЖДЕНИЕ

Если выигрываешь – упрощай  
позицию; если проигрываешь –  
усложняй.

Брюс Пандольфини



ИНФОРМАЦИЯ

Каждая часть начинается с шутового эссе о соответствующей области математики. Затем идут **пять популярных игр**, чья сложность последовательно возрастает (внутри части, а не по всей книге). Завершается часть кратким описанием **разнородных игр** (включая мои самые любимые).

4. Описание всех игр имеет одинаковую структуру. Во-первых, в разделе «Как играть» я рассказываю суть: **количество игроков, необходимый реквизит, цель и правила**. Во-вторых, в разделе «Заметки дегустатора» я подробно

описываю вкусовую гамму игрового процесса, неуловимое *je ne sais quoi*<sup>2</sup>. Возможно, вы узнаете пару стратегических хитростей, но это не главное. Я стараюсь показать тонкие оттенки и нюансы математической игры, которые настолько изысканны, что вино по сравнению с ними похоже на прокисший виноградный сок<sup>3</sup>.



В-третьих, в разделе «Генеалогия игры» я излагаю то, что знаю о происхождении игр. Какие-то из них уходят корнями в глубину веков и неподвластны времени, другие – дурацкие и новомодные, а есть и ни то ни сё (не спрашивайте,

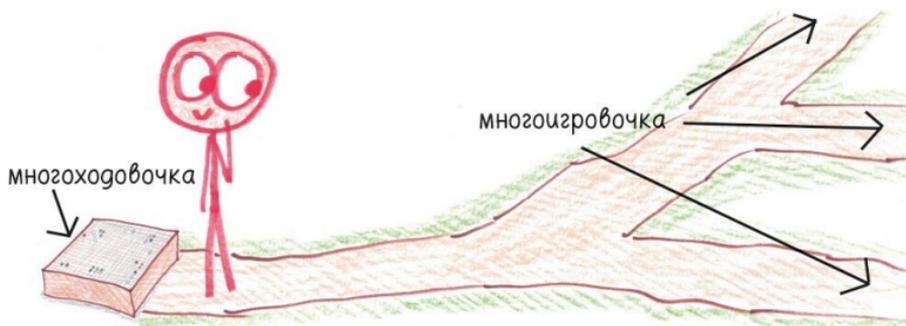
<sup>2</sup> *Je ne sais quoi* (фр.) – невыразимая суть произведения искусства, букв. «то, не знаю что». – Прим. пер.

<sup>3</sup> Пояснение для юных, кто не в курсе: вино – это и есть прокисший виноградный сок.

как такое может быть, просто примите как данность).

В-четвертых, в разделе «Почему эта игра важна?» я рассказываю, почему игра выявляет лучшее в человеческом мышлении. Возможно, она воспроизводит квантовую структуру материи. Возможно, обнажает строгую красоту топологии или циничную логику предвыборных махинаций. Возможно, пробуждает вашего внутреннего гения или, того лучше, шимпанзе. Так или иначе, на мой взгляд, это суть главы и главная цель всей книги.

Наконец, в разделе «Вариации и родственные игры» я показываю заманчивые ответвления, которые вы можете исследовать. Иногда это незначительные видоизменения правил, иногда – совершенно новые игры, связанные с оригиналом исторически, концептуально или по духу.



5. Под занавес приведены сводные таблицы, обобщающие игры и общедоступная библиография, изложенная в форме

ответов на часто задаваемые вопросы.

Да, и еще там я объясняю, откуда же взялось странное число  $75\frac{1}{4}$ . Если вас мучает вопрос «Что такое четверть игры?», то не сомневайтесь, все *не так* просто.

## ЗАМЕТКИ ДЕГУСТАТОРА ОБ ЭТОЙ КНИГЕ

Вы вольны читать эту книгу как любую другую. Переворачивайте страницы. Вежливо улыбайтесь шуткам. Мурлычьте под нос: «Вау, ничего себе рисунки. Я не прогадал, что раскошелился». Двигаясь от главы к главе, от начала к концу, от игры к игре, вы прекрасно проведете время.

Но лишитесь настоящего удовольствия.

Эта книга предназначена для того, чтобы с ней играли. Человек, играющий с математикой, похож на слона, получающего удовольствие от своего хобота, птицу, получающую удовольствие от своих крыльев, или Бэтмена, который получает удовольствие от своего навороченного автомобиля. Ради этого они и родились. Ваша способность к математическому мышлению – дар такого масштаба, что ему нет аналогов в животном мире (его превосходит разве что кошачье искусство презрения). Пожалуйста, не оставляйте этот подарок эволюции нераспакованным. Достаньте его. Поиграйте с ним. Или по крайней мере уподобьтесь кошке и поиграйте с оберточной бумагой.

Большинство игр предназначено для нескольких игроков. Надеюсь, вы найдете компаньона, который разделит ваше любопытство и попробует вместе с вами освоить их. «Там, где царит соперничество, можно преподавать лишь мертвую математику, – сказала математик Мэри Эверест Буль. – Живая математика должна быть общим достоянием». На мой взгляд, даже состязательные игры – это совместные проекты, в которых умы объединяются, чтобы выстраивать необычные логические и стратегические цепочки. Давид Бронштейн называл это «мышлением на двоих». Карл Менninger – «прогрессивной диффузией умов». Я предпочитаю говорить проще: «игра».

Как бы то ни было, это книга, и я очень надеюсь, что вы ее прочтете. Каждая игра высвечивает ту или иную истину о математике, от комбинаторного взрыва до теории информации. А эти математические истины проливают свет на игры. Кажется, что света слишком много? Не пугайтесь. Ваши глаза скоро привыкнут. Как однажды написал преподобный Чарльз Калед Колтон, «изучение математики, подобно Нилу, начинается с малого и кончается великим».

## **ГЕНЕАЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИГР**

Игры, о которых я рассказываю в этой книге, рождались в парижских университетах, японских школьных дворах, шумных игорных залах, редакциях аргентинских жур-

налов, их авторы – скромные энтузиасты и бессовестные выскочки, подвыпившие профессора и озорные дети. Эти игры многогранны, ибо многогранна математика; несерьезны, ибо несерьезна математика. И они общедоступны, ибо математика общедоступна, что бы там ни говорили устрашающие формулы и язвительные профи.

Грубо говоря, я позаимствовал игры из четырех областей:

1. **Традиционные детские игры**, например «Морской бой», «Китайские палочки», «Точки-клеточки».
2. **Игры для приятного времяпрепровождения**, например «Тико», «Бокс на бумаге» и «Амазонки».
3. **Концептуальные игры, придуманные математиками**, например «Сим», «Ростки» и «Доминирование».
4. **Необычные школьные игры**, например «Соседи», «Из ряда вон», «101 – и тебе крышка».

Как появляются игры? Что зажигает математический огонь? Я сам придумал девять игр, и мне бы следовало знать. Но нет единого пути, нет общей родословной. Индия подарила нам шахматы, Китай – го, Мадагаскар – фанорону, а мой двухлетний племянник Скандер – пляски возле пазла с воплем «мовавававава».

Почему математические игры настолько универсальны? Честно говоря, не знаю. Возможно, потому что универсум настолько математичен.

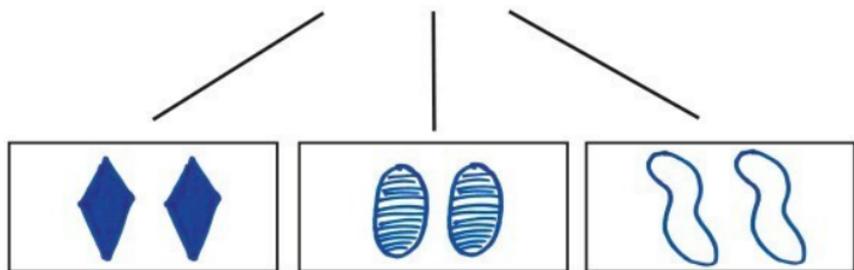
Показательный пример: в 1974 году генетик Марша Джин

Фалько начала рисовать символы на каталожных карточках. Это был инструмент исследования: каждая карточка означала собаку, а каждый символ – генетическую комбинацию. Но после перетасовки и перегруппировки карточек все детали отпали. Она увидела чистые комбинации, абстрактные модели. Игру логики. Логику игры. «Материя не привлекает внимания [математиков], – писал Анри Пуанкаре, – их интересует только форма». Ветеринар, заглядывая через плечо Марши, стал задавать вопросы и натолкнул ее на идею игры.

Так родилось любимое развлечение Стивена Хокинга, любимая тема исследований ведущих математиков и одна из популярнейших карточных игр XX века: «Сет».

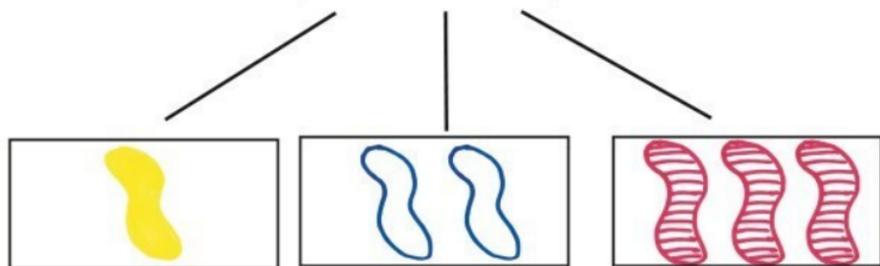
Сет – три карты, совпадающие или различающиеся по всем признакам.

Одинаковый цвет, одинаковое количество

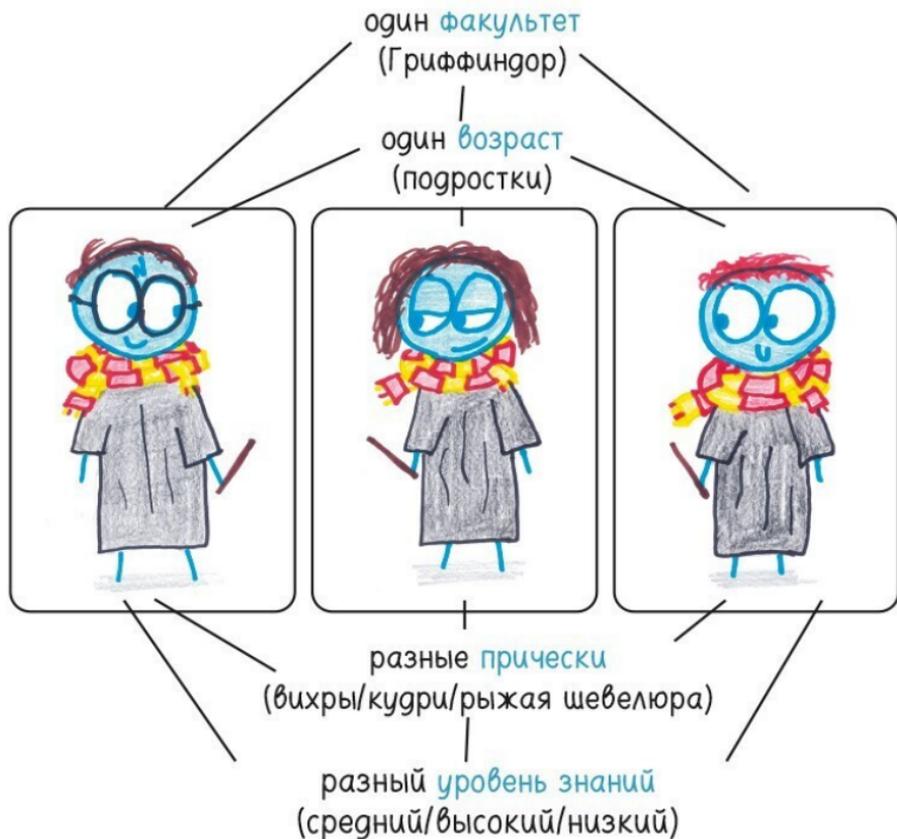


разная заливка, разная форма

одинаковая форма



разные цвет, заливка, количество



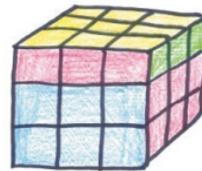
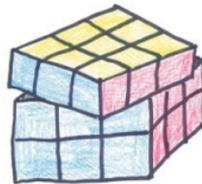
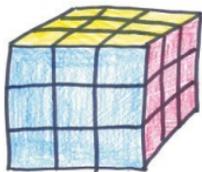
В том же самом, 1974, году один венгерский архитектор поставил перед собой конструкторскую задачу: можно ли сделать большой куб из маленьких кубиков, которые двигаются независимо друг от друга? Он попытался. И у него получилось. А потом ему взбрело в голову приклеить цветную бумагу на грани кубиков и покрутить их. Это был по-

воротный момент его жизни. «Парад красок приятно ласкал взгляд, – вспоминал он позже, – но в конце концов я решил, что настала пора возвращаться, как после отменной обзорной экскурсии... и привести кубики в порядок».

Он попытался. Но не тут-то было. Как азартный человек, он увлекся. Спустя месяц куб удалось, наконец, вернуть в исходное состояние. Так Эрнэ Рубик стал создателем самой продаваемой игрушки в истории человечества.

«Сет» и кубик Рубика демонстрируют нам два фундаментальных пути математической мысли. Вы можете начать с реальности, как Марша, и отыскивать ее абстрактную структуру или начать с абстрактной структуры, как сделал Эрнэ, и искать ее смысл в реальности. В этом плане «Сет» и кубик Рубика не просто позволяют играть другим; они сами являются плодами игры воображения, праздного искусства гениальных приматов, которые никогда не перестают учиться.

# КУБИК РУБИКА в числах



Количество возможных комбинаций  
(если верить телерекламе):

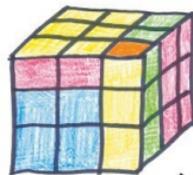
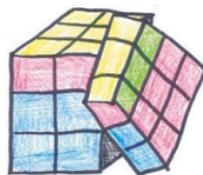
«больше 3 миллиардов»  
(3 000 000 000)

Количество возможных комбинаций  
(на самом деле):

больше 43 квинтиллионов  
(43 252 003 274 489 856 000)

Как соотносится число в рекламе  
с реальным числом комбинаций:

это все равно что сказать,  
что звезда NBA Джозел  
Эмбишд «выше, чем  
молекула воды»



## ПОЧЕМУ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ ВАЖНЫ

Потому что они выявляют лучшее в человеческом мышлении.

В 1654 году некий азартный игрок написал двум математикам с просьбой решить головоломку. Представьте, что двое играют в орлянку. Первый, кто наберет семь очков, выигрывает сотню долларов. Но когда счет был 6:4, игра пре-

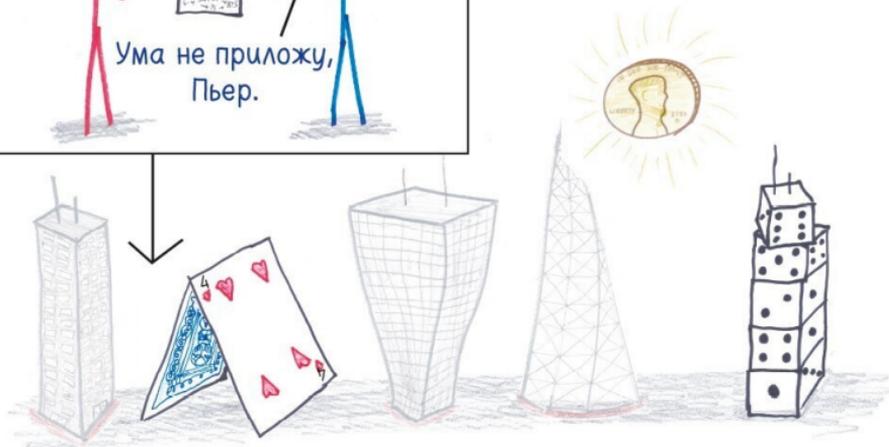
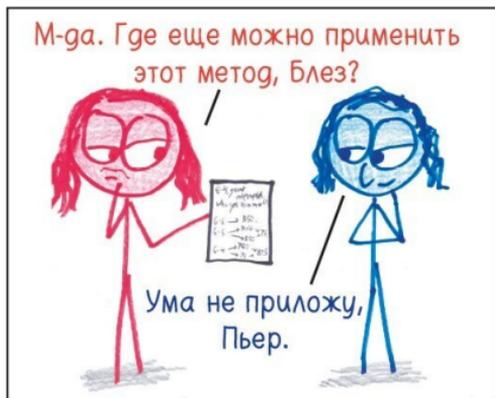
рвалась. Как честно разделить приз?

Два математика, Блез Паскаль и Пьер Ферма, решили задачу<sup>4</sup>, более того, благодаря их решению началось математическое изучение неопределенности, которое мы сейчас называем *теорией вероятностей*.

Это фундаментальное орудие современности появилось на свет благодаря простой головоломке, связанной с игрой случая.

---

<sup>4</sup> Спойлер: единственный шанс отстающего игрока на победу – выиграть три раунда подряд. Таким образом, его шансы 1:8. Следовательно, он получит одну восьмую приза (\$12,5), а второй игрок – \$87,5.



А вот еще одна история из жизни. Воскресными днями в 1700-е годы жители Кёнигсберга (ныне Калининград), прогуливаясь по четырем районам родного города, пытались пройти по всем семи мостам (Кузнечному, Рабочему, Зеленому, Лавочному, Деревянному, Высокому и Медовому), но только один раз. Успеха не добился никто. А в 1735 году математик Леонард Эйлер доказал, что это невозможно. Такого маршрута попросту не существовало. Его доказательство легло в основу *теории графов* – исследования сетей, охватывающего все на свете, от соцсетей и поисковых алго-

ритмов в интернете до эпидемиологии. Google и битва против COVID-19 берут свое начало в праздном времяпрепровождении пруссаков XVIII века.



Хотите еще пример? Почтим память Джона Хортон Конвея, великого математика, – он покинул наш мир, когда я работал над этой книгой. Конвей исследовал самые разные области математики, от клеточных автоматов до абстрактной алгебры. А кроме того, он вновь и вновь возвращался к играм. Его любимым открытием были сюрреальные числа, которые кодировали структуру игр для двух игроков в числовую систему. Его самое известное (и, следовательно, наименее любимое) открытие показало, как вселенская сложность

может возникнуть из нескольких простых правил; он придумал игру под названием «Жизнь».

«Я был поражен тем, какую роль его идеи об играх сыграли в работе над решетками, кодами и упаковками... Какие шансы у математика, который любит игры, обнаружить, что игры подспудно лежат в основе других областей, которые он изучает?» – пишет математик и поклонник этой игры Джим Пропп.

Я мог бы и продолжить – например, еженедельная вечерняя партия в покер вдохновила Джона фон Неймана на создание теории игр, чьи стратегические выводы сейчас пронизывают экологию, дипломатию и экономику, – но в мои планы не входит воспевание пользы математики для народного хозяйства. По правде говоря, мне дела нет до того, что математическая игра помогла кому-то заработать миллиарды или сколотить триллионы долларов. По-моему, это *случайный побочный продукт* математической игры.

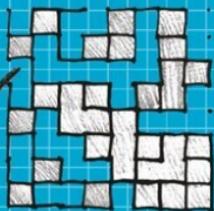
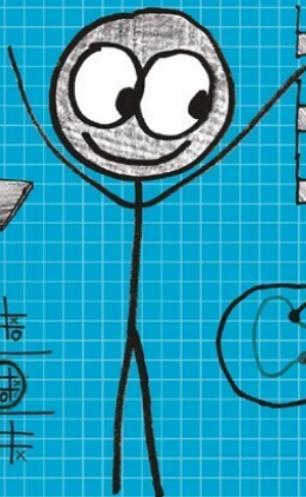
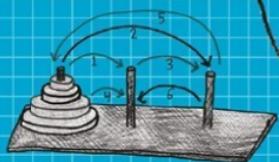
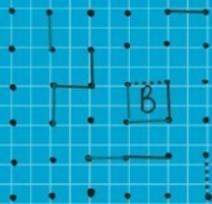


Когда вы отрываетесь от игры и обнаруживаете, что невольно изменили ход человеческой истории, то понимаете – это игра с огнем, причем с особым.

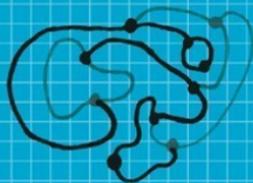
«Все хорошие идеи – это игра», – пишет Мейсон Хартман. Она имеет в виду, что наш разум исследует идеи так, как детеныш шимпанзе исследует лес, свободно и самозабвенно. Это не игра в «Парчизи», где каждый ход направлен на победу; скорее, это игра воображения, игра «а что, если...», эстафета поколений, неугасимый факел. «Игра, имеющая конец, ведется ради победы, – писал Джеймс Карс, – бесконечная игра – ради самой игры».

Мы часто воспринимаем математику как набор игр, имеющих конец, – вопросов, требующих ответа; головоломок, которые предстоит решить; теорем, которые необходимо доказать. Но все вместе они образуют необозримую и нескончаемую игру, захватывающую мысли любой разумной обезьяны. «Я люблю математику, – сказала математик Роза Петер, – потому что человек вдохнул в нее дух игры, и она дала ему его величайшую игру – умопостижение бесконечности».

По моему скромному мнению, величайшая игра человечества – «Пол – это лава!», но время от времени я все же приобщаюсь к умопостижению бесконечности. Сердечно приглашаю и вас присоединиться к этому.



$\begin{array}{ c c c } \hline \times & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c c c } \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c c c } \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \# & \# & \# \\ \hline \end{array}$

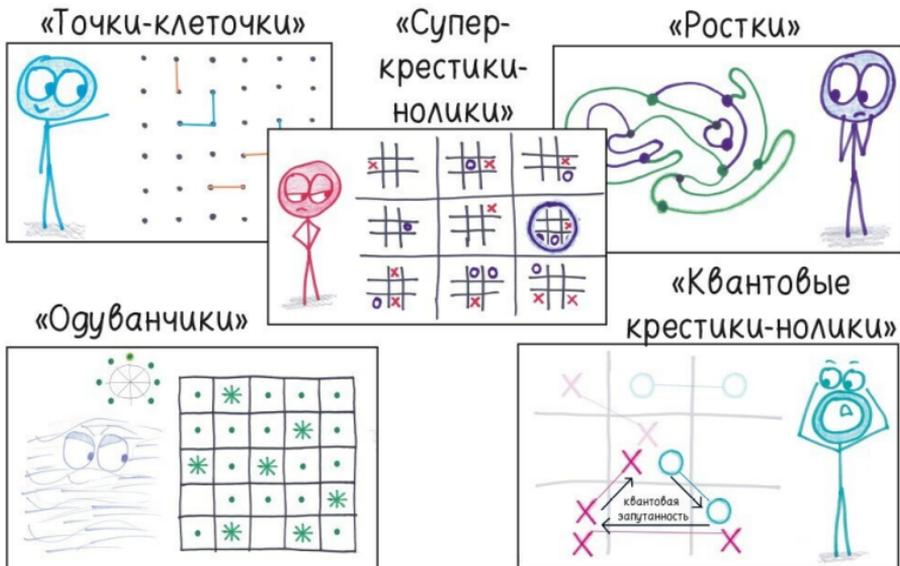


# I

## Геометрические игры

Здесь вы познакомитесь с пятью играми, действие которых разворачивается в непохожих пространствах. Надеюсь, вы вынесете отсюда как минимум то, что *есть разные виды пространства*.

Игра в «Точки-клеточки» напоминает вычерчивание градоостроительного плана на миллиметровке. «Ростки» расползаются по змеящемуся, зыбкому пейзажу. «Супер-крестики-нолики» представляют собой фрактальный мир микрокосмов, макрокосмов, повторов. «Одуванчики» – игра продуваемых ветрами равнин и суровых векторов. Наконец, «Квантовые крестики-нолики» обитают в сверхъестественном пространстве, которое и на пространство-то почти не похоже. Охватите эти игры взглядом, и вы поймете, почему математики полагают, что геометрий много, что есть совершенно разные способы концептуализации пространства и его содержимого. «Одна геометрия не может быть более истинной, чем другая, – писал математик Анри Пуанкаре, – она может быть лишь удобнее».



Тем не менее у всех этих игр есть одна общая черта: они разворачиваются на плоскости. Приключения в двумерном мире позволяют пролить свет на трехмерный, словно в театре теней наоборот.

Быть современным человеком здорово. Наши предки, словно Тарзан, перепрыгивали с ветку на ветку, а я, словно Джейн<sup>5</sup>, перепрыгиваю из книги в книгу, со страницы на страницу, с одного листа бумаги на другой. Мой мозг создан для трехмерного мира, в котором есть глубина и объем, а я нацелился на мир двумерных документов и экранов, тонких ломтиков толстенной реальности.

<sup>5</sup> Джейн Портер – девушка, в которую влюбляется Тарзан. – Прим. пер.

Что ж, если нельзя вернуть обезьяну в джунгли, то геометрические игры позволяют сделать кое-что покруче: вернуть джунгли обезьяне. Они придают плоскости глубину, превращают двумерное в трехмерное.

Объясню, что я имею в виду, на примере трех быстрых игр.

Первая: классическая аркада 1979 года «Астероиды», где вы управляете стреловидным космическим кораблем, бороздящим просторы экрана. Этот экран – целая вселенная: долетев до края, выныриваешь с противоположной стороны. Вы будто бы живете на поверхности шара: куда ни двигайся, вернешься в исходную точку.

Однако на самом-то деле это не сфера. Вначале, «склеив» левую и правую стороны экрана, разработчики игры создали своего рода цилиндрический мир. Затем, «склеив» верхний и нижний края экрана, они соединили торцы цилиндра. В результате получилась не сфера, а бублик. Любители математики знают, что по-научному его называют *тор*<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup> В книге «Новые правила для классических игр» Уэйн Шмитбергер предлагает применить пространственную логику «Астероидов» к «Скраблу», чтобы слово могло уходить вниз, за пределы игрового поля, и выныривать сверху или заезжать за правый край поля и продолжаться слева. «Один из забавных результатов игры в тороидальный "Скрабл", – пишет он, – заключается в том, что на игровом поле возникают комбинации, которые выглядят не просто жульническими, но и совершенно нелепыми с точки зрения общепринятых правил "Скрабла". Фрагмент слова или одинокая буква висят у края поля, казалось бы, сами по себе, хотя на самом деле это составная часть слова на противоположном краю поля. Отличный способ разозлить кибитцеров». Попробуйте применить ту же торои-



Астероиды заполнили тороидальную вселенную. Эй, кто-нибудь, оповестите NASA!

---

дальнюю логику к другим играм в этой книге: «Росткам», «Числовым цепочкам» и «Амазонкам».



Для нашей второй игры обратимся к математику Ингрид Добеши. «Когда мне было восемь или девять лет, – вспоминает она, – больше всего я любила играть в куклы, шить им одежду. Меня завораживало то, что, сшивая плоские куски ткани, можно сделать нечто абсолютно неплоское, имеющее изогнутые поверхности».

Спустя десятилетия ее работа над вейвлетами продвинула вперед технологию сжатия изображений. В некотором роде это одна и та же игра: плоскостность и кривизна, сплошность и поверхность, глубина и сжатие.

Геометрия, на мой взгляд, не что иное, как старинное математическое искусство кройки и шитья нарядов для кукол.



Последняя двумерно-трехмерная игра – произведения художника Морица Эшера. Вы наверняка видели его работы: две руки, рисующие друг друга, мозаика из птиц и рыб, иллюзорная лестница, ведущая вверх по спирали в бесконечность. Математики любят его творчество, потому что оно напоминает их науку: легкомысленная игра глубоких идей. «Мне доставляет удовольствие, – писал художник, – сознательно смешивать двумерное и трехмерное, плоское и пространственное, высмеивать гравитацию».

«Все мои работы – это игры, – любил повторять он. – Серьезные игры».

На мой взгляд, нет ничего лучше для исследования различных геометрических миров, чем игры и головоломки. Они дают нам, по словам математика Джона Уршела, «представление о возможных направлениях мышления». Мы по-

лучаем яркие образы кардинально разных реальностей.

В глубине души мы с вами – обезьяны. Мы не можем отказать от пространственного мышления. Поэтому хорошо, что есть тысячи видов пространства, на любой вкус, одно чудеснее и удивительнее другого.

# Точки-клеточки

## ИГРА КВАДРАТОВ

Математик Элвин Берлекамп во введении к 130-страничной книге «Точки-клеточки: непростая детская игра» назвал ее лучшей «из всех игр для детей, популярных, сложных и математически насыщенных». Сразу и не поймешь, что он имел в виду! Сложная игра для популярных детей? Популярная игра для сложных детей? Или игра для сложных и популярных детей, по горло сытых математикой? Как бы то ни было, общий смысл ясен: она ошарашивает.

Я не смогу изложить исчерпывающую теорию «Точек-клеточек» в одной короткой главе. Однако вас ждет кое-что получше: полное математическое исследование из первых рук, от ученого, который первым опубликовал правила этой игры.

Станете ли вы после прочтения этой главы популярным, сложным и насыщенным математикой ребенком? Трудно сказать. Так что просто читайте и двигайтесь дальше.

# КАК ИГРАТЬ

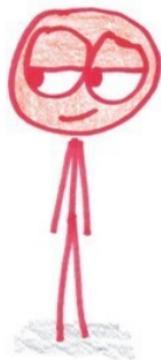
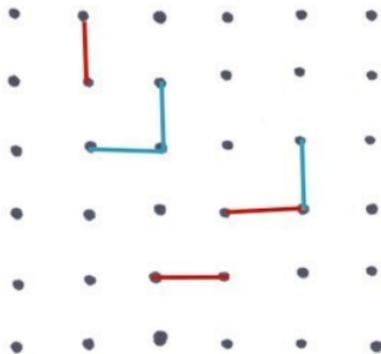
**Сколько игроков?** Двое.

**Что потребуется?** Два карандаша разных цветов и поле с рядами точек. Рекомендую поле  $6 \times 6$  точек, но в принципе подойдет любое прямоугольное поле.

**В чем цель?** Начертить больше квадратов, чем противник.

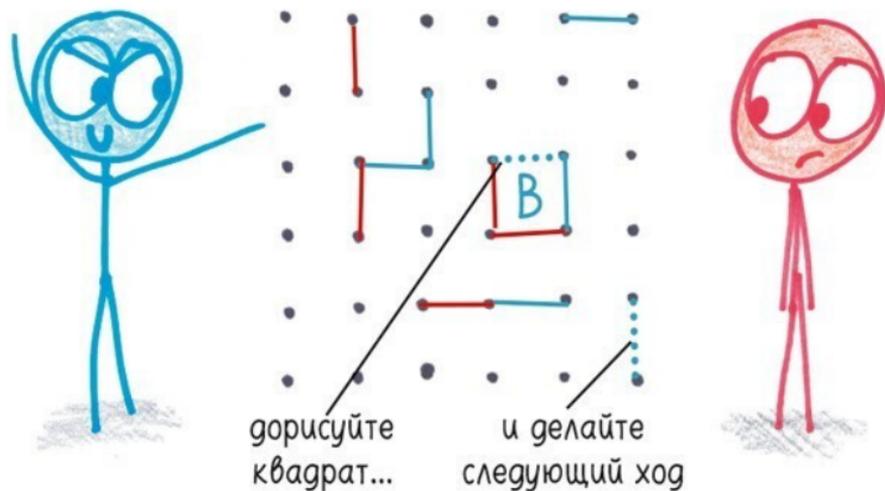
## Какие правила?

1. Поочередно соединяйте соседние точки вертикальными или горизонтальными линиями.



2. Тот, кто дочертит квадрат, набирает одно очко, поме-

чает этот квадрат (например, своими инициалами) и делает следующий ход.



Это правило позволяет вам дочертить целую вереницу квадратов, прежде чем противник дождется своего хода.



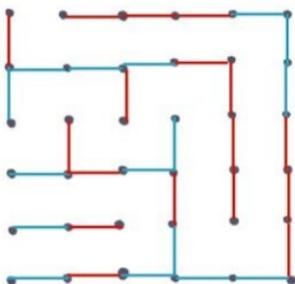
## ЗАМЕТКИ ДЕГУСТАТОРА

Впервые я сыграл в эту игру в детстве, в подвале с полками, набитыми видеокассетами, под аккомпанемент тяжелой поступи динозавров. Нам с братьями не хватало стратегического мышления: в основном мы действовали наобум, стараясь просто не рисовать третью сторону квадратов (чтобы противник не нарисовал четвертую) и волей-неволей рассредоточивали свои линии<sup>7</sup>. Рано или поздно безопасных ходов не оставалось. Тогда-то и наступала самая напряженная стадия игры.

---

<sup>7</sup> Иногда второй игрок хитрит и повторяет ходы первого игрока, так что игровое поле не меняется при повороте на  $180^\circ$ . Это гарантированно позволяет второму игроку первым начертить квадрат. Но опытный первый игрок может обратиться к этой стратегии во благо себе, пожертвовав одним квадратом, чтобы выиграть остальные.

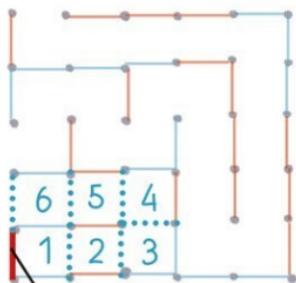
М-да... Куда  
ни пойдешь – западня...



Поэтому ты и телишься  
45 минут?

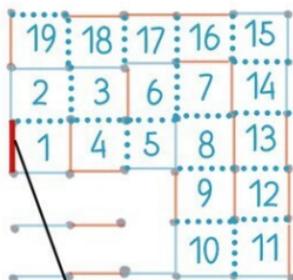
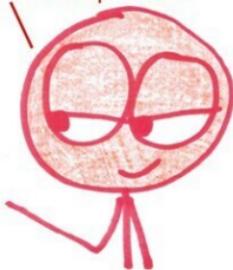


Теперь жертвы становились неизбежными, хотя и не все были равноценными. Некоторые ходы позволяли противнику набрать лишь одно или два очка, а другие – заполнить своими квадратами практически все поле. Я всегда старался жертвовать самыми маленькими областями, надеясь отвоевать те, что покрупнее.



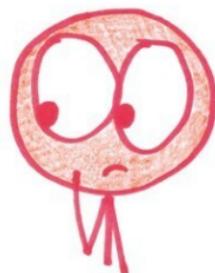
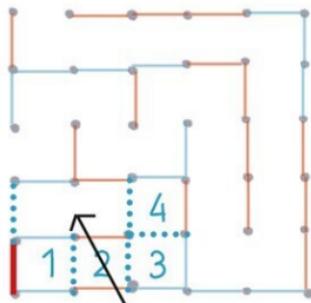
Отдать 6 квадратов

Выбор ясен.



Отдать 19 квадратов

Годы спустя, работая над этой книгой, я освоил важную стратегию, незамысловатую, но позволяющую обыгрывать 99 % новичков: **двойной крест**. Идея в том, что вы ломаете противнику весь кайф, когда он уже нацелился сделать триумфальный ход. Просто сократите свой ход, не начертив предпоследнюю линию. Таким образом, рисуя одну линию, вы жертвуете двумя квадратами, которые получит ваш противник (поэтому крест двойной). В обмен вы завладеете всей областью, на которую положил глаз ваш оппонент.



не чертите эту линию – пусть ее начертит ваш противник

За пределами этой стратегии всё становится сложным и неясным. Детали вы можете почерпнуть из трудов великого Элвина Берлекампа. Он скончался, когда я работал над этой книгой, и навсегда останется в нашей памяти как ненасытное дитя математической сложности.

## ГЕНЕАЛОГИЯ ИГРЫ

Сегодня в «Точки-клеточки» играют практически везде: на черных, белых и зеленых школьных досках, в желтых блокнотах юристов, на ресторанных салфетках или за неимением лучшего на собственных ладонях<sup>8</sup>. Впервые правила игры опубликовал математик Эдуард Люка в 1889 году. Он называл ее *Piporipette*. По словам Эдуарда, игру придумали его бывшие студенты из престижной парижской Политехнической школы.

Странно, не правда ли? Зачем серьезным студентам тратить время на придумывание детской игры? И почему такой уважаемый ученый решил опубликовать статью о ней?

---

<sup>8</sup> Она известна во многих странах, разве что под разными названиями, которые варьируют от банальных (вроде точек в США и клеточек в Англии) до красиво звучащих (вроде *Piporipette* во Франции и *Timbiriche* в Мексике) и замысловатых (вроде *Kamertje Vehuren* в Нидерландах и *Käsekästchen* в Германии).

Как это начиналось

Что было потом



Ответ прост: потому что серьезная математика часто рождается именно из детских игр.

Мы видим эту закономерность даже в карьере Эдуарда. Пожалуй, он наиболее известен своим исследованием последовательностей наподобие чисел Фибоначчи, где каждое следующее число – сумма двух предыдущих. (Классическая последовательность: 1, 1, 2, 3, 5, 8 и так далее.) Числа Фибоначчи кажутся глупой забавой до тех пор, пока вы не начнете подсчитывать лепестки маргаритки, семена подсолнуха или ананаса. Тогда вы убедитесь, что в эту глупую игру играют не только дети (и неповзрослевшие взрослые), но и сама природа.

Вот еще одна любимая задача Эдуарда: головоломка с пу-

шечными ядрами. Суть в том, чтобы найти число пушечных ядер, из которых можно сложить идеальный квадрат и идеальную пирамиду. Задача выглядит пустяшной. Однако она дьявольски сложна. Эдуард предположил, что известное решение (4900 пушечных ядер) – *единственное*.

Десятилетия спустя исследование эллиптических функций доказало его правоту.

Как это начиналось

Что было потом

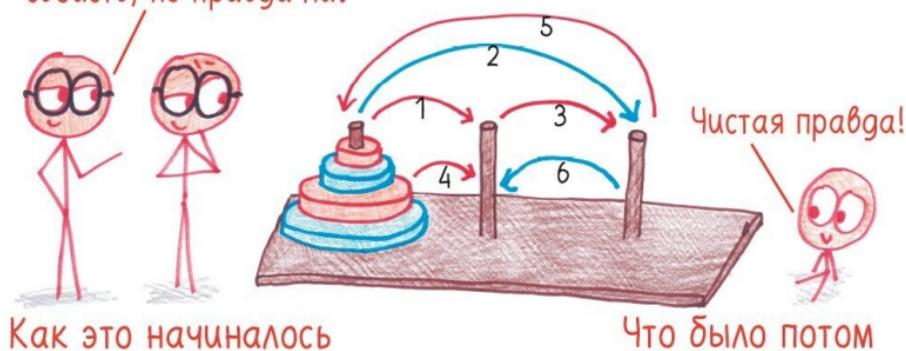


Но самое знаменитое изобретение Эдуарда – «Ханойская башня». Наверняка вы видели такие игрушки. Башня состоит из трех стержней и набора дисков разного диаметра, образующих пирамиду. Цель состоит в том, чтобы перенести пирамиду с одного стержня на другой, перемещая по одному диску за раз и никогда не укладывая больший диск поверх

меньшего.

На первый взгляд башня, как бы это сказать помягче, детская забава. Тем не менее у нее множество практических применений. Психологи используют ее для проверки когнитивных способностей; преподаватели информатики – для обучения рекурсивным алгоритмам; инженеры-программисты – в качестве схемы ротации при резервном копировании данных.

У этой абстрактной структуры множество сложных свойств, не правда ли?



Почему праздное времяпрепровождение с легкостью превращается в научное исследование? Почему граница между работой и досугом такая зыбкая и проницаемая?

Честно говоря, не знаю. Подозреваю, Эдуард тоже не знал. Можно сказать лишь одно: простые математические предпосылки приводят к глубоким выводам. Вот что такое ма-

тематика на самом деле: сложное взаимодействие простых идей. Эдуард так говорил о «Точках-клеточках»: «Несмотря на всю свою незамысловатость, на практике эта игра преподносит сюрприз за сюрпризом».

## **ПОЧЕМУ ЭТА ИГРА ВАЖНА?**

Потому что бесполезная игра часто рождает наиболее полезные идеи.

В первой публикации, посвященной «Точкам-клеточкам», Эдуард Люка пространно рассуждает о ценности чистого любопытства. Он приводит множество исторических примеров и утверждает, что мы должны задавать вопросы спонтанно, какими бы глупыми они ни казались, поскольку неизвестно, насколько глубокие истины можно раскрыть.

Его стиль довольно витиеватый, однако все равно я процитирую<sup>9</sup>:

---

<sup>9</sup> Кстати, если вам вдруг покажется, что в этой книге полно рассуждений, не имеющих отношения к делу, вспомните о размышлениях Эдуарда, предваряющих описание самой игры.



Когда наши предки в сухую погоду **натурали** кусочек янтаря кошачьей шкуркой, чтобы проскочила искра... они просто развлекались... не подозревая, что закладывают **основу теории электричества и множества ее применений**, восхищающих человечество...



Когда греческие геометры... **рассекали конусовидные корнеплоды** и изучали получившиеся фигуры... они даже предположить не могли, что их изыскания через 20 с лишним столетий помогут Кеплеру сформулировать **законы движения планет...**



Когда жрецы Древней Персии составляли магические треугольники **из букв слова «абракадабра»**... они и не догадывались, что однажды Тарталья и Паскаль начертят свой арифметический треугольник и заложат **основы современной алгебры...**



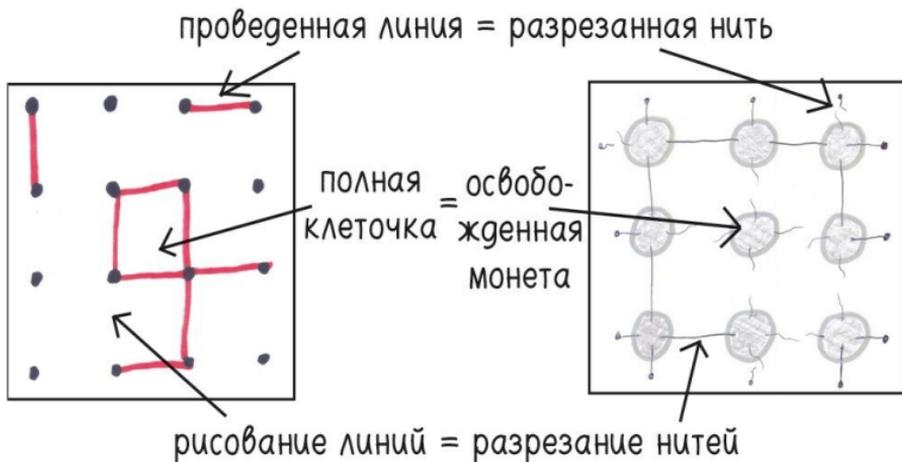
Каждый математик хочет вскрыть глубокие связи между несопоставимыми идеями. Вопрос в том, как этого добиться. Напряженно работать? Возможно. Терпеливо вычислять? Не повредит. Подсмотреть ответ в конце задачника? Простите, не угадали. Позволить воображению резвиться?

А вот здесь есть о чем поговорить.

Эдуард верил, что глубина возникает из игры, наука – из дуракаваляния. И он был не одинок. Элвин Берлекамп научился играть в «Точки-клеточки», когда ему было 6 лет, и спустя 70 лет все еще не утратил интереса к ним. Он играл на протяжении всей жизни. И где-то посредине странствия земного, когда он изучал электротехнику в Массачусетском технологическом институте, его осенило: можно использовать математику, чтобы создать «дуальную игру», которую он окрестил «Нити и монеты».

Как выглядит эта альтернативная версия? Нарисуйте монеты, соединенные нитями. Один конец каждой нити приклеен к какой-либо монете, а другой – либо к соседней монете, либо к столу. Игроки поочередно разрезают нити ножницами. Если монета высвобождается, она достается вам, и вы зарабатываете право на еще один ход. Игра длится до тех пор, пока игроки не разберут все монеты. Побеждает тот, у кого больше монет.

Никаких квадратиков – лишь монеты. Никаких отрезков – лишь натянутые нити. Но, по сути, игра та же самая. Не меняя принципиальную структуру, Элвин вывернул «Точки-клеточки» наизнанку.

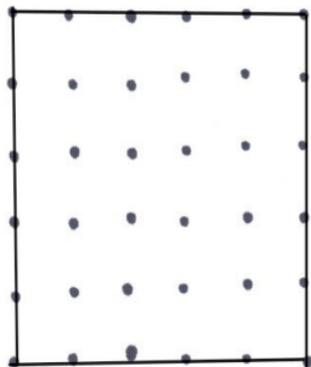


Зачем? Да просто так. Забавы ради. «Пусть мыслители мыслят, а мечтатели мечтают, – писал Эдуард Люка, – не тревожься о том, что иногда занимаются чем-то несерьезным или бесполезным, ибо, по словам мудреца Анаксагора, *во всё́м есть часть всего́*».

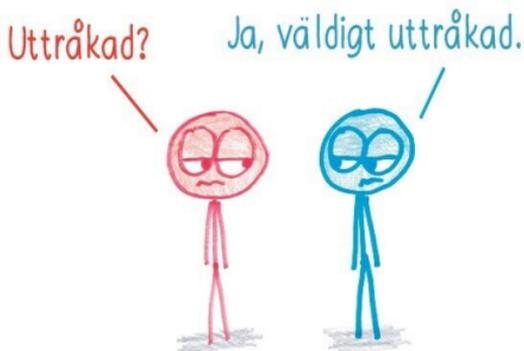
Эта философия вдохновляла математические изыскания на протяжении тысячелетий, и она прослужит нам еще тысячелетия. Пусть мыслители мыслят. Пусть мечтатели мечтают. Пусть студенты чертят закорючки на полях конспектов лекций. Не проводите границу между практичным и непрактичным, полезным и бесполезным, пустым и идеальным. Это области одного и того же необитаемого континента, одной и той же прекрасной девственной земли, которую мы лишь начали изучать.

# ВАРИАЦИИ И РОДСТВЕННЫЕ ИГРЫ

**Шведская доска.** Границы поля уже нарисованы.

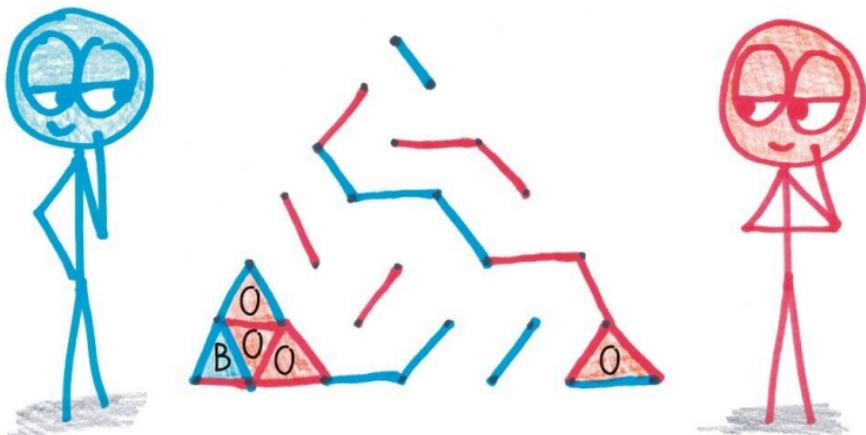


Шведская доска



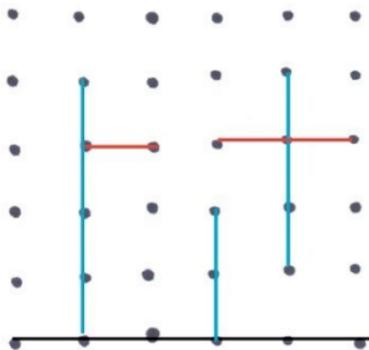
Шведская тоска

**Точки-треугольнички.** Правила те же, но вы играете на треугольном поле и сражаетесь за равносторонние треугольнички. На мой взгляд, это делает игру красивее (к тому же треугольнички легче начертить). Идеальное решение, если вас утомил классический вариант игры, а курьер с пиццей еще не прибыл.



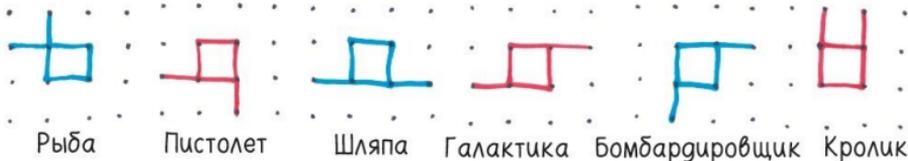
**Назарено.** В этом усовершенствованном варианте игры из книги Андреа Анджолино «Отточенный карандаш и игры на бумаге» меняются два правила. Во-первых, вы можете проводить **прямую линию любой длины**, если она не пересекает уже начерченные линии. (Таким образом, вы можете дорисовать несколько квадратов сразу.) Во-вторых, если вы дорисовали квадрат, то не получаете дополнительный ход.

Если новое правило в «Точках-треугольничках» меняет вид знакомой игры, то в «Назарено» все наоборот: в знакомой игре открываются новые горизонты.



**Квадратный полип.** Свихнувшийся визионер Уолтер Джорис в книге «Сто стратегических игр с карандашом и бумагой» предлагает несколько игр, напоминающих «Точки-клеточки». Моя любимая – 90-я по счету: «Квадратный полип». Участвуют два игрока. Понадобятся цветные карандаши.

1. Нарисуйте поле  $9 \times 9$  точек (или поменьше, если вы новичок; или побольше, если вы знаток) и **по очереди рисуйте квадратные полипы**. Это квадраты с двумя ответвлениями, например:



**2. Стремитесь захватить как можно больше квадратов.** Каждый полип автоматически занимает квадрат  $1 \times 1$ , но умелый игрок может получить области покрупнее и более причудливой формы.

**3. Линии не должны пересекаться<sup>10</sup>.** Это правило позволяет сорвать планы противника, выпустив одно-единственное смертоносное щупальце (но будьте осторожны: противник может настолько же легко сорвать ваши планы).

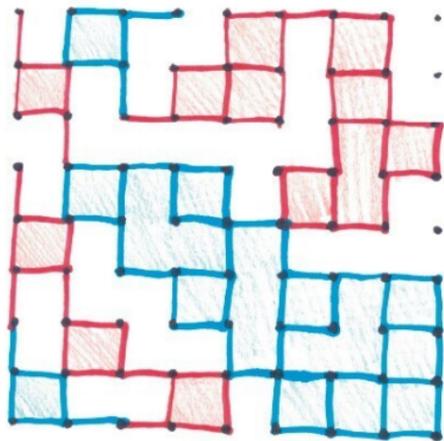
**4. Играйте до тех пор, пока не останется ни одного хода.** Выигрывает тот, кто занял наибольшую часть поля.

---

<sup>10</sup> Есть изящный альтернативный вариант, предложенный тестировщиком Вальхия, где можно пересекать собственные линии, но не линии противника.

Победитель!

20



13



# Ростки

## ИГРА С «ЛЮБОПЫТНЫМ ТОПОЛОГИЧЕСКИМ КОЛОРИТОМ»

Из школьной геометрии мы выносим одну пренеприятную истину: размер имеет значение. И в самом деле, размер – одно из основополагающих свойств в материальном мире. Углы бывают острыми, прямыми или тупыми. Фигуры имеют длину, площадь или объем. Порция мокко с соленой карамелью может быть большой, маленькой или средней. Так или иначе все сводится к размеру. Черт возьми, само название школьного предмета недвусмысленно об этом говорит: в переводе с древнегреческого оно означает «землемерие».

Вас раздражает такая зацикленная на размере философия? Тогда вам понравится топология. Там фигуры растягиваются, словно резина, податливы, словно пластилин, раздуваются, словно воздушные шары. Не фигуры, а трансформеры! В этом текучем мире лавовых ламп размер не имеет значения. По сути, о размерах там не идет и речи.

Топология ищет более глубокие истины.

Хотите узнать какие? Для первого знакомства лучше всего подойдет игра «Ростки». Какие точки можно соединить?

Сколько областей возникнет? В чем разница между «внутри» и «снаружи»? Придержите свои шляпы – или их топологические эквиваленты – и наслаждайтесь игрой, правила которой легко поймет любой ребенок, но перебрать варианты развития событий не под силу ни одному суперкомпьютеру.

## КАК ИГРАТЬ

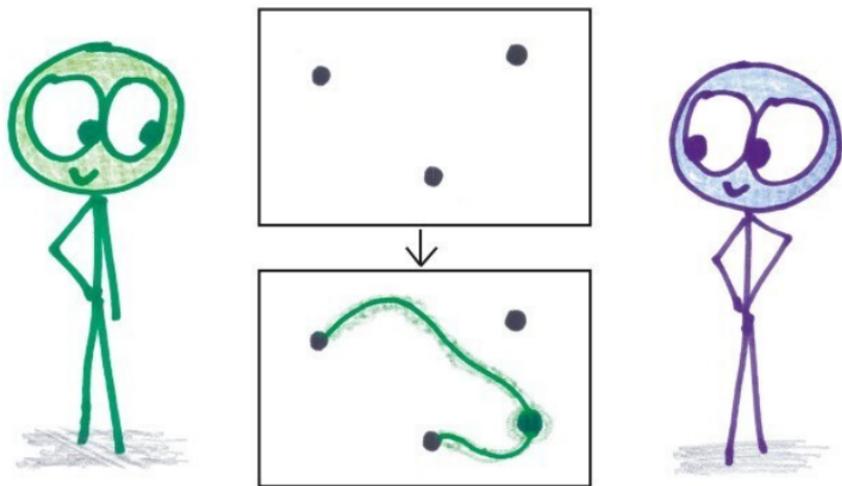
**Сколько игроков?** Двое (или больше).

**Что потребуется?** Разноцветные карандаши и бумага. Вначале нарисуйте несколько точек. На первое время ограничьтесь тремя-четырьмя.

**В чем цель?** Побеждает тот, кто сделает последний ход в игре, не оставив противнику ни одного варианта.

### Какие правила?

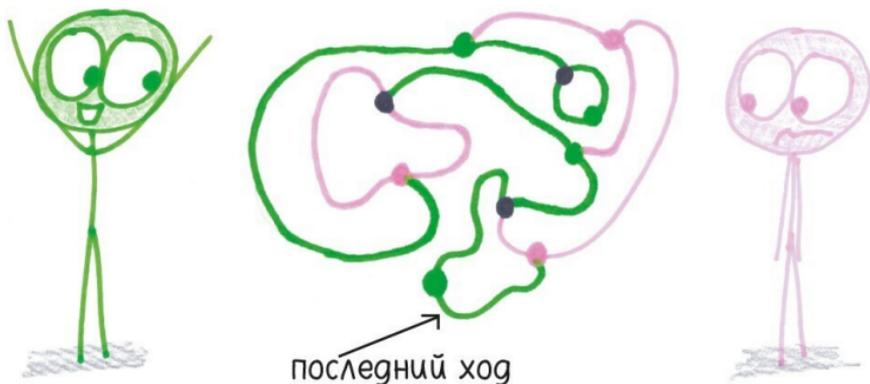
1. Во время каждого хода **рисуйте одну линию** (прямую или кривую), соединяющую две точки либо возвращающуюся к исходной точке, и **ставьте новую точку** где-нибудь на этой линии.



2. Всего два ограничения: (1) **линии не могут пересекать** себя или друг друга; (2) из каждой точки может исходить **не более трех линий**.

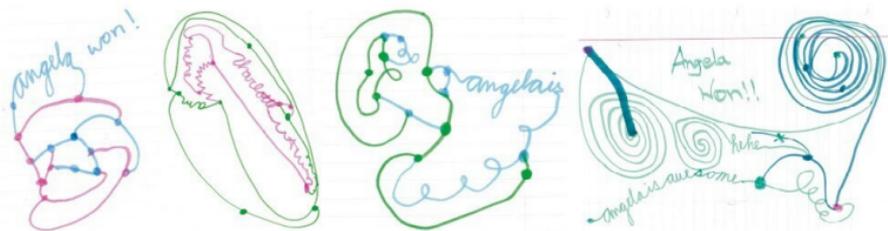


3. В конце концов все возможности будут исчерпаны. **Выигрывает тот, кто сделает последний ход.**



## ЗАМЕТКИ ДЕГУСТАТОРА

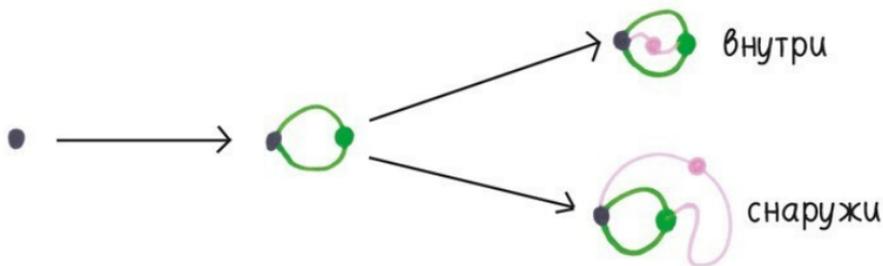
Прелесть «Ростков» в гибкости линий. Неважно, какие они: прямые, плавные кривые или витиеватые спирали; значение имеют только соединяемые точки. Можете даже изобразить свою подпись. Шестиклассница Андже́ла так и поступила, когда мы попробовали сыграть, и, хотя в принципе она нарушила правило (линии самопересекались), это настолько впечатляло, что я не возражал.



Шедевры Анжелы

Такая гибкость отражает суть топологии: вещи могут быть совершенно непохожими друг на друга, но иметь одинаковый функционал.

Рассмотрим вариант, где вначале на игровом поле всего одна точка. Первый игрок волей-неволей рисует петлю и ставит новую точку на ней. Второй игрок должен соединить две точки. Кажется, возможны два варианта: нарисовать линию внутри петли или снаружи.

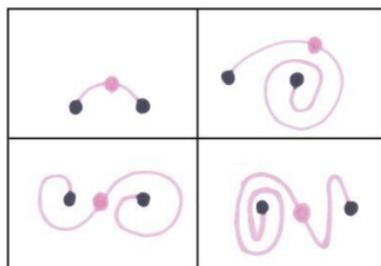


Но погодите-ка. Представьте, что вы чертите линии на сфере. Особо ничего не меняется, но теперь неважно, ри-

суете ли вы вторую линию «внутри» или «снаружи». С точки зрения топологии эти два хода идентичны. Таким образом, в действительности у второго игрока нет выбора.

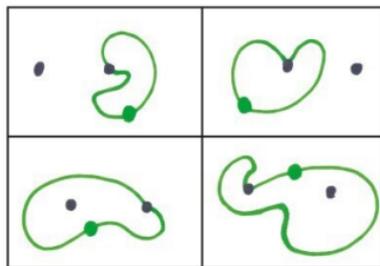
А как насчет игры, которая начинается с двух точек? У первого игрока есть лишь два варианта: соединить эти две точки или нарисовать петлю. Неважно, будет ли вторая точка «внутри» или «снаружи» петли. Топологически нет разницы.

Вариант 1:  
соединить две точки



(все фигуры топологически эквивалентны)

Вариант 2:  
нарисовать петлю



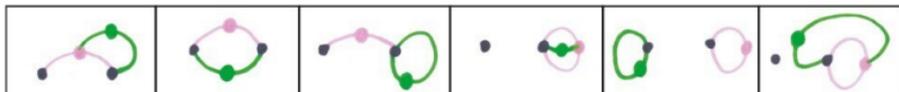
(все фигуры топологически эквивалентны)

Неужели топологи не замечают различий и все вещи для них на одно лицо? «Победа» топологически равноценна «поражению»? «Хорошо» топологически то же самое, что «плохо»? Кошка топологически эквивалентна рыбке и в аквариум нужно поставить маленький кошачий лоток?

Решайте сами, если у вас есть домашние питомцы. Но, играя в «Ростки», не стоит беспокоиться. Не все ходы экви-

валентны. По сути дела, когда все начинается с двух точек, уже ко второму ходу возникает шесть топологически разных вариантов. Свободы становится все больше.

варианты первых двух ходов



(все топологически различны)

В «Точках-клеточках» мы имели дело с жесткой, прямолинейной геометрией, подобной градостроительному плану. «Ростки», напротив, свободолюбивая игра, похожая на хаос карнавального шествия.

## ГЕНЕАЛОГИЯ ИГРЫ

Место и время рождения «Ростков» точно известны: Великобритания, Кембридж, вторая половина дня во вторник 21 февраля 1967 года.

Родители игры, кибернетик Майк Патерсон и математик Джон Конвей, рисовали закорючки на листе бумаги, пытались изобрести новую игру. Майк предложил правило с добавлением новой точки, Джон предложил название. Так ро-

дились «Ростки»<sup>11</sup>. Они поделили честь открытия в соотношении 60/40 в пользу Майка: эта честная и точная пропорция впечатляет не меньше, чем само рождение игры.

В «Ростки» просто играть, но сложно перебрать все варианты. Анализ игры, начинающейся с шести точек, занял у Дениса Моллисона 47 страниц. Никто не превысил эту планку до 1990 года, когда компьютер Bell Labs перебрал все варианты игры, начинающейся с 11 точек. На момент написания этой главы перебраны все варианты для игры, начинающейся с 40 точек, хотя Конвей перед кончиной в 2020 году скептически высказался на сей счет: «Вы поверите, услышав, что кто-то изобрел машину, которая может сочинить пьесу, достойную пера Шекспира? Это слишком сложно».

Отпугнула ли эта сложность игроков-любителей? Ничуть. «На следующий день после того, как проросли "Ростки", – пишет Конвей, – в них стали играть все подряд. За чаем и кофе небольшие компании не могли взгляда оторвать от нелепых или фантастических вариантов развития игры... Обще-му поветрию поддались и секретари... Рисунки с "Ростками" можно было обнаружить в самых неожиданных местах... Да-

---

<sup>11</sup> Почему-то трезвомыслящие люди, размышляя над альтернативным названием, превращаются в психов. Один аспирант, заметив, что точек становится всё больше, предложил назвать игру «Корь». Позже проникательный в целом Эрик Соломон написал, что игру называли «Ростки», потому что в финале рисунок напоминает «разваренную брюссельскую капусту». Во-первых, логика названия другая; во-вторых, лучше бы Эрика не допускали к приготовлению брюссельской капусты.

же мои дочери, которым три и четыре года, играли в них, хотя обычно я выигрывал».

## ПОЧЕМУ ЭТА ИГРА ВАЖНА?

Потому что среди разделов современной математики топология – одна из наиболее (1) динамичных, (2) причудливых, (3) полезных и (4) красивых.

Эпитетов много, так что разберем их по порядку.

**Топология динамична.** Топологи живут в изменчивом мире растягивающейся резины, расплавленного металла и тающего мороженого. Они постоянно ищут *инварианты*: свойства, которые остаются неизменными, несмотря на все перипетии.

Наиболее известный инвариант – *эйлерова характеристика*. Для «Ростков» все сводится к простому уравнению (это заметил Эрик Соломон): точки + области = линии + фигуры.

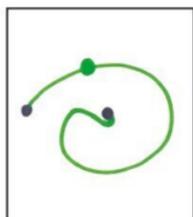
Это уравнение верно на любом этапе игры для всех возможных сценариев, от простейшего до сложнейшего, независимо от того, начинаете ли вы с двух точек или с двух миллионов. В любой ситуации количество точек плюс количество замкнутых областей будет равно количеству линий, соединяющих точки, плюс количество отдельных фигур<sup>12</sup>.

---

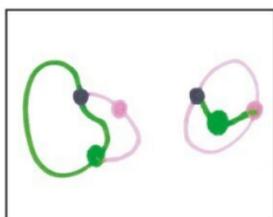
<sup>12</sup> «Фигура» – это любая группа соединенных точек. Одинокая точка тоже является фигурой.

Это типично для топологии: в необузданно меняющемся мире мы находим стройные закономерности.

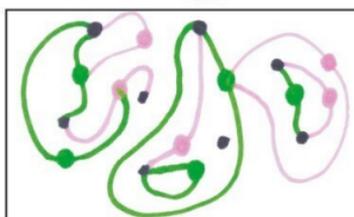
Точки + Области = Линии + Фигуры



Точек: 3    Линий: 2  
Областей: 0    Фигур: 1

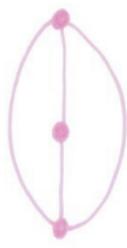


Точек: 6    Линий: 8  
Областей: 4    Фигур: 2



Точек: 18    Линий: 20  
Областей: 6    Фигур: 4

**Топология причудлива.** Вот забавное открытие Джона Конвея. Если количество ходов минимально, то в конце концов вы получите (грубо говоря) одну из этих фигур:



Вошь



Жук



Таракан



Уховертка



Скорпион

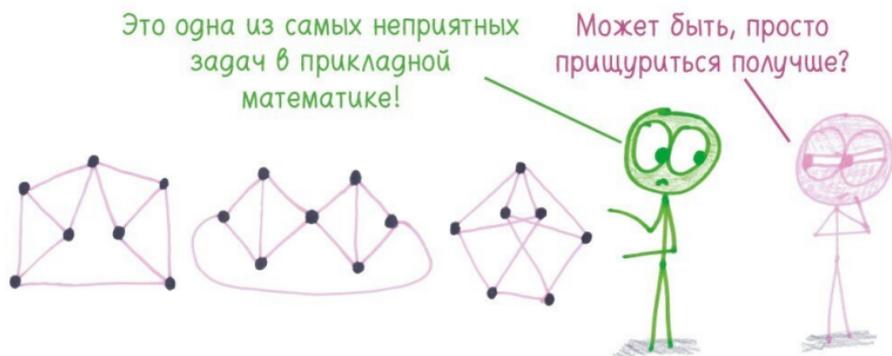
В классическом пособии «Выигрышные стратегии математических игр» объясняется, что окончательная конфигура-

рация «будет представлять собой одно из этих насекомых (возможно, вывернутое наизнанку), к которому присосалось произвольное количество вшей (к некоторым вшам могут присосаться другие)».

В общем, вшей довольно много. Причем одни конфигурации, по замечанию Конвея, «вшивее» других.

**Топология полезна.** Несмотря на балаган с ухвертками и вшами, топология помогает разобраться с самыми разными вещами, от запутанности ДНК до запутанности социальных сетей, не говоря уже о космологии и квантовой теории поля.

Рассмотрим знаменитую топологическую проблему: *изоморфизм графов*. Мы уже знаем, что две конфигурации в «Ростках» могут выглядеть по-разному, но быть структурно одинаковыми. Как определить, различаются ли две сети или они идентичны, хотя на первый взгляд непохожи?



Этот вопрос тревожит инженеров, сопоставляющих электрические схемы, компьютерщиков, кодирующих визуальную информацию, и химиков, ищущих соединения в базах данных. По сути дела, все эти серьезные люди играют в свои версии «Ростков».

**Топология красива.** Для многих знакомство с топологией начинается с ленты Мёбиуса. Возьмите полоску бумаги, перекрутите ее и склейте концы.

У ленты Мёбиуса всего одна поверхность: нет дихотомии «внутри» и «снаружи». Если вы решите использовать ее в качестве браслета и попытаетесь покрасить внутреннюю сторону в синий, а внешнюю в красный, ничего не получится. И это лишь одна из странностей. Что будет, если разрезать ленту Мёбиуса вдоль? А если попытаться разрезать ее на три части?



Математик Дэвид Ричесон в книге «Жемчужина Эйлера»

подсчитал, сколько медалей Филдса (самая престижная награда в области математики) досталось топологам. «Из 48 лауреатов, – пишет он, – примерно треть были награждены за работы в области топологии, и еще больше – за вклад в тесно связанные с ней области».

Если красота – дочь сложности и простоты, то «Ростки» – настоящее дитя любви.

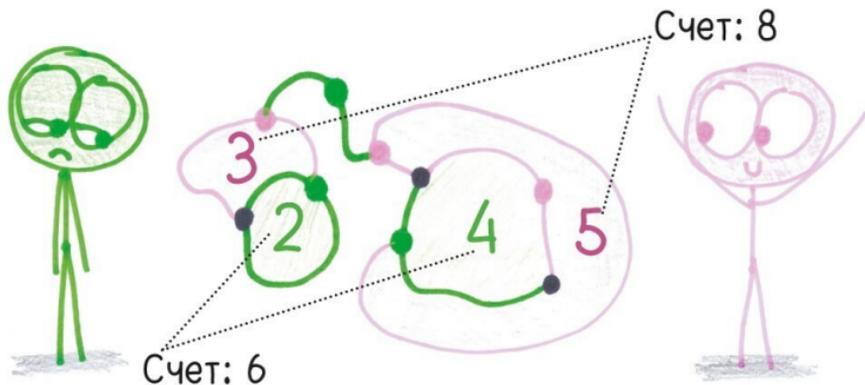
## ВАРИАЦИИ И РОДСТВЕННЫЕ ИГРЫ

**Сорняки.** Автор – Владимир Игнатович. Игроки могут рисовать на своей линии одну точку, две или ни одной.

**Набери очки.** Автор – Уолтер Джорис. Правила те же, что в «Ростках», но ведется подсчет очков. Если в результате вашего хода образуется замкнутая область, пометьте ее инициалами или цветом и подсчитайте количество точек на границе области (одна точка – одно очко). Рисовать новые линии внутри этой области запрещено. Когда все ходы будут исчерпаны, побеждает тот, у кого больше очков<sup>13</sup>.

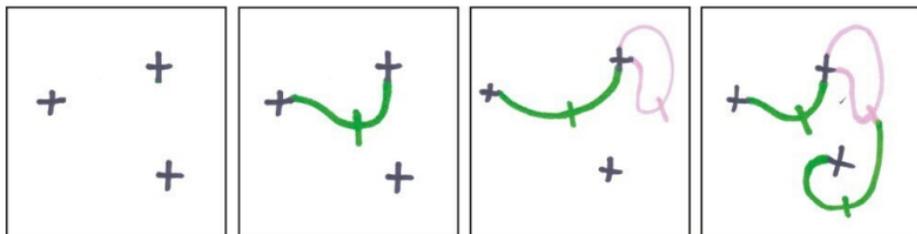
---

<sup>13</sup> Необходимо еще одно правило: запрещено создавать область со свободно плавающей фигурой внутри, даже если это всего лишь одна точка.



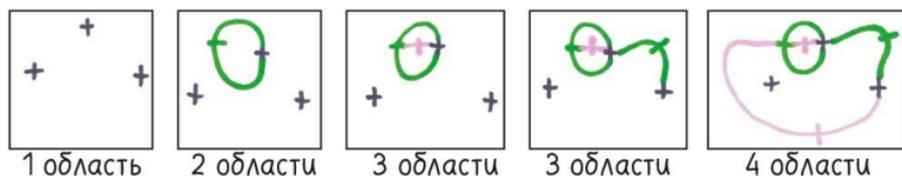
**Брюссельская капуста.** Эта скверная сестра-близнец «Ростков» на первый взгляд кажется такой же многовариантной и требующей стратегического мышления. Но это не так. Скорее это не игра, а какая-то пародия.

Вначале нарисуйте несколько крестиков. Соединяйте любые два свободных конца и ставьте черточку на новой линии, чтобы получилось еще два свободных конца. Линии не должны пересекаться. Выигрывает тот, кто делает последний ход, когда больше ходов не осталось.



Почему пародия? Дело в том, что исход игры предreshен независимо от действий игроков. Если в начале было нечетное число крестиков, выигрывает первый игрок; если четное – второй. Можете выстраивать какие угодно хитроумные стратегические схемы, всем им грош цена. С тем же успехом можно вообразить себя гонщиком «Формулы-1», вращая руль игрушечного автомобиля.

Как это получается? Обратите внимание на то, что количество свободных концов не меняется. Каждый ход уменьшает их на два, а новая черточка добавляет два. Меняется лишь количество областей. После каждого хода, за малым исключением, появляется новая область. В игре с  $n$  крестиками на  $n - 1$  ходу нельзя создать ни одну область, соединяя несвязанные крестики.



Игра заканчивается, когда количество областей становится равно количеству свободных концов. Для этого требуется  $4n - 1$  ходов, создающих новые области, плюс  $n - 1$  ход, не увеличивающий количество областей, то есть всего  $5n - 2$  хода.

Крестики	+	+	+	+	+
		+	+	+	+
			+	+	+
			+	+	+
Ходы	3	8	13	18	23
Победитель	Первый игрок	Второй игрок	Первый игрок	Второй игрок	Первый игрок

Разыграйте приятеля: предложите сыграть на поле с двумя, четырьмя и шестью крестиками, каждый раз великодушно уступая право первого хода. Когда противник почует подвох и потребует, чтобы вы ходили первым, незаметно переключитесь на игру с тремя или пятью крестиками. Конечно, обманывать нехорошо, особенно друзей... Но пошутить-то можно.

# Супер-крестики-нолики

## ИГРА С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

В 2013 году, узнав о существовании этой игры на пикнике математиков с нашего факультета, я написал краткий пост в своем блоге. Он вызвал настоящий ажиотаж в интернете, угодив в топ сайта Hacker News<sup>14</sup> и на главную страницу Reddit<sup>15</sup>, а кроме того, породил целый букет приложений для смартфонов<sup>16</sup>. Поскольку взлет моей карьеры в немалой мере связан с этой игрой, я много размышлял о том, что делает ее особенной. Элегантность правил? Легкость измышления стратегических идей? Подсознательная ассоциация с «Суперфрисби»?

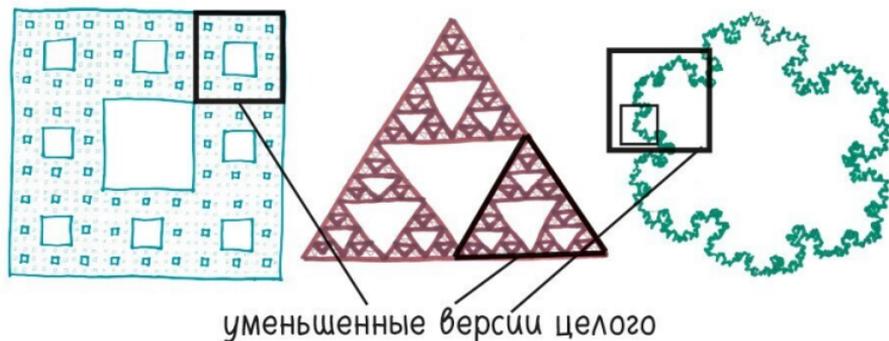
Но лишь спустя годы меня осенило – это фракталы. Странно, что я не додумался до этого раньше.

---

<sup>14</sup> Если вдруг не слышали про Hacker News, то знайте – он крутой.

<sup>15</sup> Если вдруг не слышали про Reddit, то знайте – он тоже крутой.

<sup>16</sup> А вот приложения для смартфонов не так круты.



Мы живем среди фракталов, они всюду: от облаков до береговых линий и ветвей деревьев. Возможно, именно поэтому «Супер-крестики-нолики» кажутся такими естественными. Обычные крестики-нолики всегда стремились эволюционировать в этом направлении.

## КАК ИГРАТЬ

**Сколько игроков?** Двое.

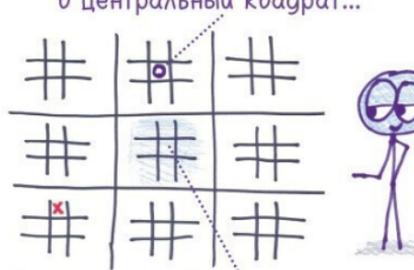
**Что потребуется?** Карандаши и бумага. Нарисуйте крупно поле для крестиков-ноликов, а затем по одному мини-полю внутри каждого квадрата.

**В чем цель?** Выиграть на трех мини-полях, выстроенных в одну линию.

**Какие правила?**

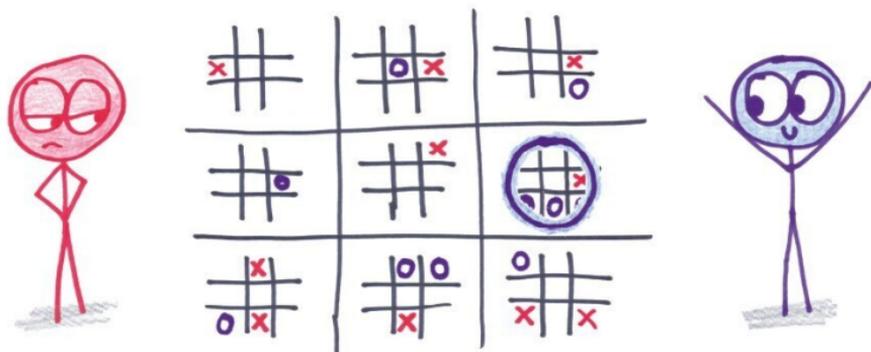
1. По очереди ставьте крестик или нолик в маленьких

квадратах. Первый ход можно сделать где угодно; после этого мини-поле, на котором вы будете играть, определяется предыдущим ходом противника. **В зависимости от клетки, которую он выбрал, вы должны сделать ход на определенном мини-поле.**

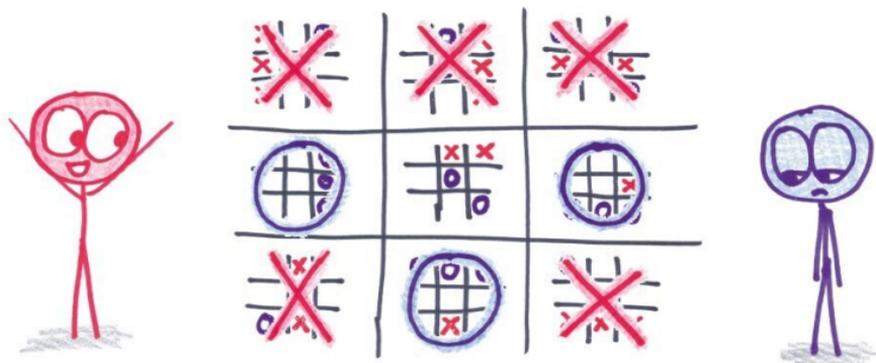
<p>Первый игрок ставит крестик в середине верхнего ряда...</p>  <p>...вынуждая второго игрока сделать ход на верхнем среднем мини-поле.</p>	<p>Второй игрок ставит нолик в центральный квадрат...</p>  <p>...вынуждая первого игрока сделать ход на центральном мини-поле.</p>
<p>Первый игрок ставит крестик в верхнем правом квадрате...</p>  <p>...вынуждая второго игрока сделать ход на верхнем правом мини-поле.</p>	<p>Второй игрок ставит нолик в нижнем правом квадрате...</p>  <p>...вынуждая первого игрока сделать ход на нижнем правом мини-поле.</p>

2. Поставив **три крестика или нолика на одной прямой на мини-поле**, вы выигрываете там. Это мини-поле за-

мораживается, а игрок, которому выпадает ход на нем, выбирает любое другое.



3. Побеждает тот, кто выиграет на **трех мини-полях** на одной линии.



Альтернативные условия победы перечислены в разделе

«Вариации и родственные игры».

## ЗАМЕТКИ ДЕГУСТАТОРА

Однажды майским днем 2018 года я заглянул на сайт политических новостей FiveThirtyEight и с удивлением прочел: «Трамп играет не в трехмерные шахматы, а в "Супер-крестики-нолики"», – гласил заголовок статьи Олли Рейдера.



В те годы многие из нас пытались понять действия президента Трампа. Он ввязывался то в одну, то в другую политическую авантюру, непредсказуемо меняя повестку дня. Что это было: продуманный план или просто импульсивность? «Он не игрок в трехмерные шахматы», – часто язвили критики.

# Конец ознакомительного фрагмента.

Текст предоставлен ООО «Литрес».

Прочитайте эту книгу целиком, [купив полную легальную версию](#) на Литрес.

Безопасно оплатить книгу можно банковской картой Visa, MasterCard, Maestro, со счета мобильного телефона, с платежного терминала, в салоне МТС или Связной, через PayPal, WebMoney, Яндекс.Деньги, QIWI Кошелек, бонусными картами или другим удобным Вам способом.