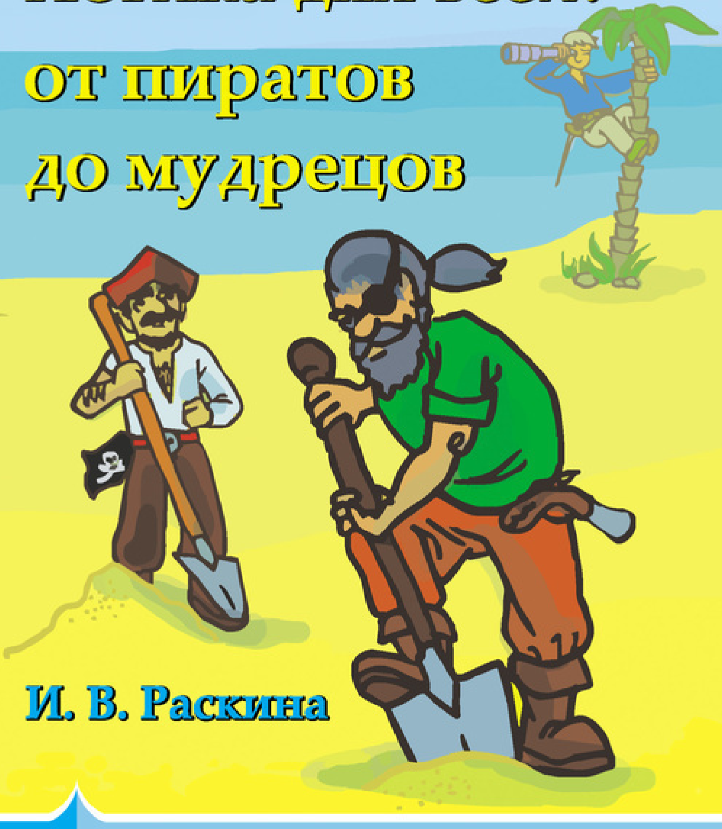
Логика для всех: от пиратов до мудрецов



И. В. Раскина

Школьные Математические Кружки

Инесса Владимировна Раскина

Логика для всех. От пиратов до мудрецов

Серия «Школьные математические кружки», книга 14

Текст предоставлен правообладателем
http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=19435427
Логика для всех: от пиратов до мудрецов / Раскина И. В.: МЦНМО; Москва; 2016
ISBN 978-5-4439-3022-0, 978-5-4439-1022-2

Аннотация

Четырнадцатая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена логическим задачам и является продолжением ранее вышедшей книжки И. В. Раскиной и Д. Э. Шноля «Логические задачи» (выпуск 11). В книжку вошли разработки десяти занятий математического кружка с примерами задач различного уровня сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для учителя. Приведен также большой список дополнительных задач. Ко всем задачам приведены ответы и подробные решения или указания к решениям. Особенностью книжки является наличие игровых сценариев к отдельным задачам и целому занятию,

реализация которых поможет лучшему освоению материала. Для удобства использования заключительная часть книжки сделана в виде раздаточных материалов. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям логики.

Содержание

И. В. Раскина Логика для всех: от пиратов до мудрецов

Предисловие

– Когда я беру слово, оно означает то, что я хочу, не больше и не меньше, – сказал Шалтай презрительно.
Льюис Кэрролл. «Алиса в Зазеркалье»

Этот выпуск является продолжением книги «Логические задачи», изданной ранее в серии «Школьные математические кружки». Он состоит из десяти занятий, различных по цели, форме и уровню сложности.

Первые пять, а также восьмое занятие представляют собой элементарное введение в формальную логику. Тематика стандартна: высказывания (в том числе общие и частные) и их отрицания, закон исключенного третьего, союзы «и» и «или», следствие и равносильность. Уровень сложности и стиль изложения первых пяти и большей части восьмого занятий рассчитан в первую очередь на учеников 5–7 классов. Почти во все занятия (кроме второго) включены задачи, связанные с другими разделами математики. Особое внимание уделяется умению отличать решенную задачу от нерешенной, в частности, применимости примера и контрпримера. Активно используются графические иллюстрации. Отдельные задачи, требующие от пятиклассников дополнительных знаний (например, признаков делимости), могут быть ими пропущены или заменены аналогичными из раздела дополнительных задач.

Надеемся, что материалы первой части книжки кому-то из учителей пригодятся при подготовке уроков для всего класса, а не только занятий кружка.

Вторая половина книжки построена на решении постепенно усложняющихся задач и адресована кружковцам второго и более года обучения.

Шестое занятие развивает навык рассуждать в соответствии с законами логики, сформулированными на предыдущих занятиях. Его можно проводить после них, а для подготовленных учащихся – и вместо них.

Седьмое занятие посвящено доказательству от противного. Многие школьники впервые встречаются с методом от противного на уроках геометрии. Результат известен: метод усваивается на уровне магического заклинания, применяемого для умиротворения учителя этого бессмысленного и беспощадного предмета. Хотелось бы надеяться, что встреча с методом от противного в предложенном мини-курсе логики окажется более естественной и плодотворной. Рекомендуем провести такое занятие в конце шестого класса или в начале седьмого, незадолго до первого применения метода в геометрии или хотя бы вскоре после него. Следующий подходящий момент связан с доказательством иррациональности квадратного корня из 2 в восьмом классе. Предложенные задачи не слишком просты и для большинства восьмиклассников.

Последние три занятия посвящены метаголоволомкам (т. е. головоломкам о головоломках). В девятом занятии представлены разнообразные метаголоволомки. В десятом занятии и приложении к нему – игровые сценарии на основе задач о мудрецах. Когда мудрецы и колпаки настоящие, рассуждать не только веселее, но и гораздо проще.

Потребность детей в игре, движении, самовыражении можно также реализовать, предложив им разыграть отдельные сценки из вступлений к третьему, четвертому и пятому занятиям. Вступления к занятиям первой части – особенность этой книжки; они помогут читателю-школьнику самостоятельно разобраться с теорией, а учителю – построить вводную беседу. В остальном форма выпуска продолжает традиции серии «Школьные математические кружки»: каждое занятие предваряется методическими рекомендациями, ко всем задачам приведены ответы и решения, к некоторым – подсказки, обсуждения и комментарии. Завершают книжку дополнительные задачи, не вошедшие в занятия, а также раздаточный материал.

В большинство занятий включены соответствующие теме парадоксы – и классические, занимавшие умы философов всех времен, и придуманные недавно и связанные с трудностями перевода одной и той же мысли на разные языки: русский, английский, графический, формальный.

Возникает вопрос: а зачем вообще учить детей формальному языку даже на уровне таблиц истинности? Разве логические операции не соответствуют привычным словам родного языка? В том-то и дело, что соответствие это отнюдь не однозначное. Мы постарались затронуть на занятиях именно те места, где разница особенно заметна, а бытовая речь нелогична. Приведем пример. Допустим, сын никак не может найти ключи, а мама его ругает: «Если разбрасывать вещи где попало, потом ничего не найдешь!» С формальной точки зрения она делает две ошибки. Во-первых, путает следствие и равносильность, не уточняя, что если класть вещи на место, то найти их потом легко. Во-вторых, ее слова легко опровергнуть, найдя хотя бы одну вещь. Тем не менее, сын прекрасно понимает, что имела в виду мама. Он привыкает к соответствующей речи и с этим опытом приходит в школу.

Неудивительно, что школьники часто не отличают свойство от признака (и вообще прямую теорему от обратной), подменяют доказательство рассмотрением частного случая и делают другие логические ошибки. Удивительно скорее, когда учителей это удивляет. Мы так давно привыкли к правилам игры и считаем их настолько очевидными, что детям даже и сообщать их в соответствии с программой не требуется: пусть сами догадаются! И наиболее склонные к абстрактному мышлению дети действительно догадываются. А наиболее склонные к честной игре учителя считают своим долгом своевременно познакомить всех участников с ее правилами и терпеливо приучают не нарушать их. В помощь таким учителям и написана эта книга.

Автор благодарит К. А. Кнопа, А. В. Шаповалова и. Э. Шноля за предложенные задачи, методические идеи подробные содержательные обсуждения.

Занятие 1
Легко ли быть рыцарем, или Высказывания и их отрицания

– В теперешнее время полезнее всего отрицание – мы отрицаем.
– Всё?
– Всё.
И. С. Тургенев. «Отцы и дети»

На этом занятии вводятся понятия высказывания и его отрицания, а также формулируется закон исключенного третьего.

Его можно проводить на кружке с разнородным составом. Большинство заданий доступны абсолютно всем и заинтересуют в том числе и ребят с гуманитарным складом ума. А те кружковцы, для которых эти задания очевидны, смогут вдоволь поломать голову над вопросами со звездочкой.

Текст о трудных вопросах для рыцаря предлагаем использовать для беседы с учениками-«рыцарями». При обсуждении задачи 1.1 интересно сравнить для случаев 3, 4 и 5 степень незнания: «я пока не знаю, но могу узнать», «никто пока не знает и неизвестно, узнает ли когда-либо» и «принципиально нельзя однозначно ответить на вопрос».

Сюжет о пляже на острове рыцарей и лжецов можно разыграть с помощью двух участников кружка, выдав им записки с репликами Боба и Доба и попросив сыграть поартистичнее. Имена можно поменять на имена реальных ребят.

Стоит ли записывать и учить определения и «правила»? Заметим, что понятие высказывания – неопределяемое, подчеркнутые в тексте слова лишь поясняют его. Дать строгое определение отрицанию несложно, но на этом уровне незачем. А вот законом исключенного третьего мы еще не раз воспользуемся, его не вредно и на доске записать.

После задачи 1.3 можно честно спросить у ребят: «Вам не кажется, что мы тут ерундой занимаемся и зачем-то формулируем очевидные вещи?» Потом дружно «доказать», что Земля имеет форму чемодана (см. задачу 1.4). А после разрешения парадокса заметить, что иногда именно так и развивается математика: интуитивно верные рассуждения приводят к абсурду, приходится рассуждать более строго, создавая тем самым новую теорию.

Задачи 1.5–1.8 – простые упражнения на закрепление пройденного. Задача 1.9 связана с законом двойного отрицания. Если она вызывает сложности, то можно предложить вопрос, где этот закон не так хитро прячется за разнообразными словами. Например, истинно ли высказывание «Неверно, что неверно, что сегодня пятница»? Задача 1.10 аналогична 1.4 и очень известна: ее условие знают все, а решение мало кто. Задача 1.11 – это 6 задач по математике. Первые две очевидны, но сама формулировка отрицания может вызвать сложности; их преодолению уделяется значительное внимание на втором занятии. В большинстве остальных очевидна формулировка отрицания, зато возрастает сложность самих задач. Это удобно, чтобы в конце занятия самые быстрые кружковцы не скучали без дела. Разбирать задачу 1.11 (п. 5) на этом занятии вряд ли стоит, лучше вернуться к ней при изучении принципа Дирихле. Зато демонстрация решения задачи 1.11 (п. 6) может стать веселым финалом.

Легко ли быть рыцарем? Нет, не средневековым воином в доспехах, а всего лишь абсолютно честным жителем острова рыцарей и лжецов. Кто думает, что легко, пусть попробует честно ответить на такие вопросы:

1. Какого цвета небо?

2. Ты сильный?

3. Верно ли, что любое четное число, не меньшее 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел?

Первый вопрос трудный, потому что небо бывает разным. Кто думает, что небо голубое, пусть посмотрит на него во время дождя, на закате или ночью. Так что в реальной жизни на такой вопрос однозначно ответить нельзя. Но в математике принято упрощать жизнь. Например, настоящий пешеход нуждается в отдыхе, а в задаче на движение может идти много часов с постоянной скоростью. Поэтому и цвет неба можно считать постоянным. Давайте договоримся считать его голубым.

Второй вопрос трудный, потому что всякая сила относительна. Если сильный тот, кто может 5 раз подтянуться на турнике, то да. А если сильный тот, кто может поднять 50-килограммовую штангу, то нет. Чтобы рыцарь мог ответить на подобный вопрос, надо сначала четко сформулировать, какой человек считается сильным.

Третий вопрос поставлен абсолютно четко (в отличие от вопроса про силу), и на него есть однозначный ответ «да» или «нет» (в отличие от вопроса про небо). Только вот найти этот ответ математики безуспешно пытаются уже третий век. Вопрос этот называется проблемой Гольдбаха. Для ее решения простых договоренностей и объяснений явно недостаточно.

Чтобы избежать недоразумений, мы в этой книге постараемся не задавать рыцарю вопросов, на которые он не может ответить. И будем ставить вопрос об истинности только *таких утверждений, про которые можно ясно сказать, истинны они или ложны*. Такие утверждения в логике называются *высказываниями*.

Задача 1.1. Являются ли высказываниями следующие предложения?

1. Семеро одного не ждут.

2. У кошки четыре ноги.

3. 1 января 2001 года был вторник.

4. Любое четное число, не меньшее 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел

Это утверждение истинно.

Решение. 1. Нет. Не зная, о каких семерых, о каком одном и о каком моменте идет речь, определить истинность этого утверждения нельзя.

2. Да. Это истинное высказывание. Возможное замечание о несчастных трехногих кошках – излишняя придирка.

3. Да, это высказывание. Желающие определить его истинность могут обратиться к календарю или потратить несколько минут на расчеты. Автор готов сэкономить вам

эти минуты: высказывание ложное, 1 января 2001 года был понедельник.

4. Да, это высказывание. Желающие определить его истинность могут потратить годы на изучение теории чисел. Успех не гарантирован. Автор не в силах вам помочь.

5. Нет. Про это утверждение нельзя ясно сказать, истинно оно или ложно: если это утверждение истинно, то оно истинно, а если ложно, то ложно. В логике вообще стараются не допускать утверждений, говорящих об истинности себя самих.

А теперь представим, что путешественник, находясь на острове рыцарей и лжецов, захотел искупаться. По дороге он встретил двух местных жителей, Боба и Доба, и спросил, на каком расстоянии в этом направлении находится пляж.

– Два километра, – хмуро буркнул Боб.

– Всего лишь 200 метров, – с любезной улыбкой возразил ему Доб.

Путешественник обрадовался, поскольку знал, что Боб лжец. «А раз Доб возразил лжецу, – подумал путешественник, – то он рыцарь». Какого же было удивление путешественника, когда ни через 200 метров, ни через 2 километра пляжа не оказалось! А через 5 километров он дошел до скалистого берега с табличкой «Купаться запрещено!» И Боб, и Доб оказались лжецами.

Впрочем, если бы путешественник получше разбирался в логике, он бы не удивлялся. Высказывания «Пляж находится в 200 метрах отсюда» и «Пляж находится в двух километрах отсюда» не являются противоположными. В описанном случае они оба оказались ложными. При других условиях они могли бы и одновременно оказаться истинными (вдоль дороги может находиться сколько угодно пляжей).

А может ли рыцарь так возразить лжецу, чтобы не было никаких сомнений в его правдивости? Может. Например, если лжец говорит: «В двух километрах отсюда есть пляж», достаточно сказать: «Неверно, что в двух километрах отсюда есть пляж». Или выразить ту же мысль короче: «В двух километрах отсюда нет пляжа». Никаких сомнений не возникнет: либо пляж есть, либо его нет. Из двух высказываний:

1) в двух километрах отсюда есть пляж;

2) в двух километрах отсюда нет пляжа одно обязательно истинно, а второе ложно.

Подведем итог:

• К каждому высказыванию существует *противоположное.* Для его построения перед любым высказыванием можно добавить слова «Неверно, что…». Есть и другие способы, о них поговорим на этом и следующих занятиях.

• Высказывание, противоположное данному, называют его *отрицанием.*

• Из двух противоположных высказываний всегда одно является истинным, а другое ложным. Другими словами, всегда *истинно либо само высказывание, либо его отрицание* (но не то и другое одновременно).

Последнее предложение называется *законом исключенного третьего.* Его часто произносят в виде афоризма «третьего не дано».

Задача 1.2. Являются ли противоположными высказывания:

1) «Вчера светило солнце» и «Вчера шел дождь»;

2) «Я умею прыгать через лужи» и «Я не умею прыгать через лужи»?

Решение. 1) Нет. Возможно, вчера было пасмурно, но без осадков (или шел снег). **С** другой стороны, в один и тот же день вполне мог идти дождь и светить солнце.

2) Да. Можно либо уметь что-либо делать, либо не уметь.

Задача 1.3. Постройте отрицания к высказываниям, не пользуясь оборотом «Неверно, что…»:

1) Я встретил Вас.

2) Трудно быть богом.

Решение. 1) Построить отрицание помогает частица «не». Получается высказывание «Я не встретил Вас», противоположное исходному. Подумайте, почему высказывания «Не я встретил Вас» и «Я встретил не Вас» отрицаниями не являются.

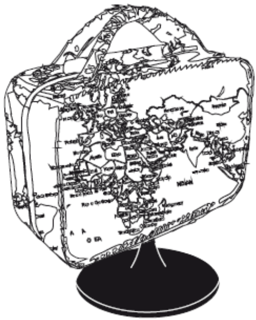
2) Во втором лучше слово «трудно» заменить антонимом, получится, что «Богом быть легко».

Задача 1.4*. Британские ученые нашли древнюю рукопись, содержащую всего два утверждения:

1) Оба утверждения этой рукописи ложны.

2) Земля имеет форму чемодана.

Какой вывод можно сделать из этой рукописи?



Обсуждение. Пусть первое утверждение истинно. Тогда оно ложно. Противоречие. Значит, первое утверждение ложно, то есть хотя бы одно из утверждений рукописи истинно. Но в ложности первого мы уже убедились. Следовательно, истинно второе: британские ученые доказали, что Земля имеет форму чемодана.

Решение. Разумеется, «доказательство» содержит ошибку. Но какую? Рукописи не существует? Ну и что, ее не поздно и сейчас написать. Дело в другом. В первом утверждении говорится о ложности его самого. Как сказано в решении задачи **1.1** (п. 5), в логике не рассматриваются высказывания, говорящие о своей истинности или ложности. В частности, к ним нельзя применять закон исключенного третьего.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.5. Объясните, почему данные предложения не являются высказываниями. Можете ли вы сконструировать аналогичные по смыслу высказывания? Как вы думаете, истинны ли они?

1. Семь раз отмерь, один раз отрежь.
2. Что нам стоит дом построить: нарисуем – будем жить.
3. Шел дождь.

Задача 1.6. Придумайте несколько высказываний и несколько предложений, не являющихся высказываниями.

Задача 1.7. Являются ли противоположными высказывания:

1) «Нельзя пользоваться калькулятором на уроках математики» и «На уроках математики можно пользоваться калькулятором»;

2) «Андрей выше Мити» и «Митя выше Андрея»?

Задача 1.8. Постройте отрицания к высказываниям, не пользуясь оборотом «Неверно, что…»:

1) Завтра дальняя дорога выпадает королю.

2) У него деньжонок много.

3) А я денежки люблю.

Задача 1.9. 1) Директор школы категорически возражает против отмены контроля за прическами. Может ли Степа безнаказанно покрасить волосы в малиновый цвет?

2) Директор школы категорически возражает против от-

мены решения о запрете контроля за прическами. Может ли Степа безнаказанно покрасить волосы в малиновый цвет?

Задача 1.10*. Житель острова Крит говорит: «Все критяне лжецы». Истинно или ложно это высказывание? (В этой задаче Крит считается островом рыцарей и лжецов.)

Задача 1.11. К каждому из высказываний сформулируйте отрицание. Определите, что верно: утверждение или его отрицание.

1) Сумма двух двузначных чисел – двузначное число.

2) Сумма двух четных чисел – четное число.

3) Прямоугольник размером 20 х 15 можно разрезать на прямоугольники размером 3х5.

4) Квадрат размером 2015 х 2015 можно разрезать на прямоугольники размером 20 х 15.

5) В нашей школе найдутся два ученика, имеющие одинаковое число друзей среди учеников нашей школы.

6) * Через отверстие, прорезанное в листке из школьной тетради, человек пролезть не может.

Занятие 2
Урок русского языка, или «Все», «некоторые» и отрицание

...о великий, могучий, правдивый и свободный русский язык!
И. С. Тургенев. «Русский язык»

Предмет этого занятия – общие и частные высказывания. В формальной логике для их записи используют всего два квантора (квантор общности $\forall$ и квантор существования $\exists$). А в бытовом языке вместо кванторов используют самые разные слова, что порой приводит к недоразумениям. Задачи 2.1, 2.2 и 2.13 помогают разобраться в способах передачи кванторов общности и существования средствами русского языка.

Смысл общих и частных высказываний удобно иллюстрировать с помощью кругов Эйлера. Рекомендуем их использовать при обсуждении задач 2.3, 2.11, 2.12, 2.16, несмотря на то что для решения предложенных задач часть учеников в иллюстрациях не нуждается. Во-первых, другой части учеников картинка может существенно помочь. Во-вторых, навык работы с кругами Эйлера еще никому не повредил. Надеемся, что в задаче 2.16 удобство трех кругов оценят и те, кому два круга в предыдущих задачах казались излишним «наворотом». В-третьих, использование кругов Эйлера позволяет почувствовать родство логики и теории множеств.

Задачи 2.4–2.10, 2.14, 2.15 связаны с построением отрицания к общим и частным высказываниям. Меньше всего нам бы хотелось, чтобы итогом занятия стала формулировка соответствующей пары правил, которое дети будут потом применять в задачах. А больше всего – чтобы они грамотно строили отрицания, не задумываясь о правилах. Если на этом занятии дети много ошибаются, продолжайте предлагать на последующих занятиях аналогичные упражнения (в том числе из раздела дополнительных задач) до победного конца.

Можно ли одну и ту же мысль выразить по-разному? Насколько сильно зависит смысл русского предложения от порядка слов? Всегда ли одинаково следует понимать одни и те же слова? Не будем пытаться на одном занятии изучить весь русский язык. Ограничимся несколькими словами и выражениями: «все», «каждый (любой)», «некоторые», «существует», «хотя бы один».

Задача 2.1. 1) Серый Волк заинтересовался цветом шапочек. Однажды он встретил Красную Шапочку. Помогите Волку сделать правильный вывод. Придумайте несколько вариантов.

2) Выразите другими словами мысль «Все шапочки красные».

Решение. 1) Можно сказать: «Некоторые шапочки красные». Но можно и по-другому. Например, так:

Шапочки бывают красные.

Иногда встречаются красные шапочки и т. п.

Математики любят говорить точно: «*Существует хотя бы одна* красная шапочка».

2) «Шапочки всегда красные», «Любая шапочка красная» или «Каждая шапочка красная».

Задача 2.2. Вася говорит, что слова «для всех» и «для каждого» означают одно и то же. Прав ли Вася?

Решение. Вопрос скорее лингвистический, чем математический. Часто смысл предложения действительно не меняется при замене «для всех» на «для каждого» и соответствующих изменениях формы слов. Например, «Для всех принцесс горошины под периной невыносимы» означает то же, что и «Для каждой принцессы горошина под периной невыносима». Но вот если вместо «Выдать зимовщикам для всех одну пару валенок» попросить «Выдать зимовщикам для каждого одну пару валенок», зимовщики наверняка заметят разницу.

Задача 2.3. 1) Означают ли одно и то же высказывания: «Некоторые сантехники любят рэп» и «Некоторые любители рэпа – сантехники»?

2) Означают ли одно и то же высказывания: «Все сантехники любят рэп» и «Все любители рэпа – сантехники»?

Ответ. 1) Да. 2) Нет.

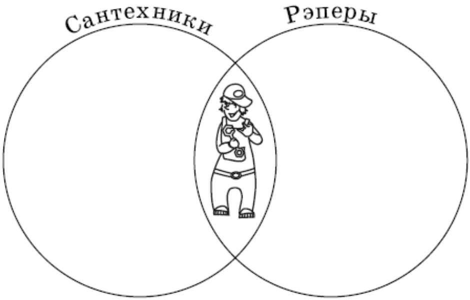


Рис. 1

Решение. 1) Чтобы лучше разобраться в смысле высказываний, изобразим их с помощью кругов Эйлера (см. рис. 1). Пусть в одном круге находятся сантехники, в другом – любители рэпа. Если первое высказывание истинно, то круги непременно пересекаются, и в пересечении кругов располагается хотя бы один сантехник, любящий рэп. Но ровно это же требуется и для истинности второго утверждения. Поэтому они означают одно и то же.

2) Снова разместим сантехников и рэперов в пересекающихся кругах. В пересечении кругов, как и прежде, расположены сантехники, любящие рэп. Сантехники, НЕ любящие рэп, окажутся в серой части рисунка 2. Если таковых нет (т. е. все сантехники любят рэп), то серая часть пуста.

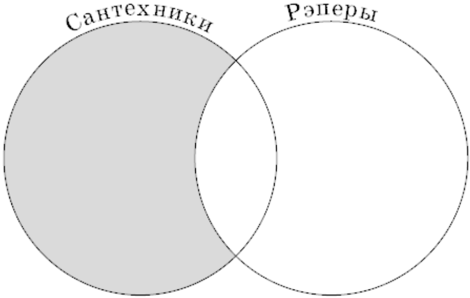


Рис. 2

Чтобы показать это на рисунке, принято изображать круг сантехников внутри круга рэперов (см. рис. 3).

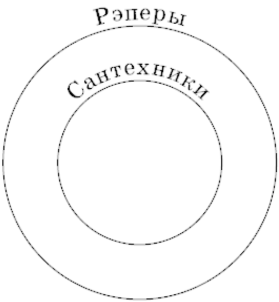


Рис. 3

Сравнение рисунков 3 и 4 помогает понять, почему смысл высказываний «Все сантехники любят рэп» и «Все любители рэпа – сантехники» разный.

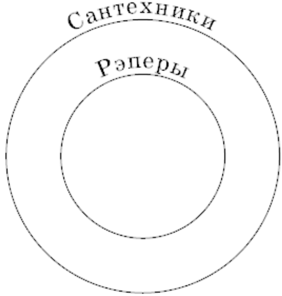


Рис. 4. Все любители рэпа – сантехники

Задача 2.4. Лжец сказал: **«В** этой корзине все грибы съедобны». Значит ли это, что все грибы в этой корзине ядовиты? (Для простоты забудем об условно съедобных грибах и будем каждый гриб считать либо съедобным, либо ядовитым.)

Ответ. Нет, не значит. В корзине могут лежать одновременно и съедобные, и ядовитые грибы.

Обсуждение. Неверно, что все грибы съедобны. Значит, съедобны НЕ ВСЕ грибы. То есть ХОТЯ БЫ ОДИН из грибов ядовит.

Задача 2.5. Рассмотрим два утверждения. Сколько из них могут быть верными?

1) В этой корзине все грибы съедобные.

2) В этой корзине есть хотя бы один ядовитый гриб.

Ответ. Верно ровно одно утверждение.

Решение. Начнем внимательно перебирать грибы по одному. Первый же найденный нами ядовитый гриб окажется одновременно и контрпримером, опровергающим первое высказывание, и примером, подтверждающим второе. А если, перебрав всю корзину, ядовитого гриба мы так и не найдем, то верным окажется только первое утверждение. В любом случае одно из двух утверждений истинно, а другое ложно.

Комментарий. Почему так получилось? Потому что утверждения «В этой корзине все грибы съедобные» и «В этой корзине есть хотя бы один ядовитый гриб» противоположны, то есть одно из них является отрицанием другого. А по закону исключенного третьего в этом случае как раз и верно ровно одно из двух.

Итак, чтобы построить отрицание к высказыванию про всех, надо заменить:

• «всех» на «некоторых»;

• свойство на противоположное (например, «ядовитое» на «съедобное»).

Задача 2.6. Лжец сказал: «В этой корзине некоторые грибы ядовитые». Что можно узнать из этого высказывания?

Решение. Если бы в корзине был хотя бы один ядовитый гриб, лжец был бы прав. Поэтому ядовитых грибов в корзине нет. Другими словами, все грибы в этой корзине съедобны.

Итак, чтобы построить отрицание к высказыванию про некоторых, надо заменить:

• «некоторых» на «всех»;

• свойство на противоположное (например, «ядовитое» на «съедобное»).

Задача 2.7. Дано утверждение: «Все малышки хорошо поют». Незнайка сформулировал к нему отрицание: «Все малышки поют отвратительно».

1) Как с помощью закона исключенного третьего убедить Незнайку, что он ошибся?

2) Сформулируйте отрицание правильно.

Решение. 1) По закону исключенного третьего верно ровно одно из двух: либо утверждение, либо его отрицание. Найдя двух малышек, одна из которых поет хорошо, а вторая плохо, мы убедимся, что неверно ни само утверждение, ни его «отрицание», придуманное Незнайкой.

2) «Существует хотя бы одна малышка, которая поет плохо». Или «Некоторые малышки поют плохо».

Задача 2.8. Постройте отрицания к каждому утверждению, не используя частицу «не». Где сможете, укажите, что верно: утверждение или его отрицание. Где сможете, обоснуйте свое мнение примером или контрпримером.

1) На Земле существует хотя бы одна гора выше 10000 м над уровнем моря.

2) Существует хотя бы один вулкан с высотой более 10000 м относительно своего основания.

3) Любой жук помещается в спичечном коробке.

4) Некоторые горные реки быстрые.

5) Бутерброд всегда падает маслом вниз.

Ответ. 1) Верно отрицание: любая гора на Земле не выше 10000 м над уровнем моря. Обосновать утверждение такого типа примером нельзя, знание высоты Эвереста (8848 м) не доказывает, что более высоких гор нет.

2) Верно утверждение. Пример – вулкан Мауна-Кеа на Гавайских островах с высотой 10203 м от основания (и «всего» 4205 м над уровнем моря). Последний раз этот вулкан извергался несколько тысяч лет назад. А самый высокий вулкан Солнечной системы – гора Олимп на Марсе имеет высоту 21,2 км от основания.

3) Верно отрицание: существует хотя бы один жук, не помещающийся в спичечном коробке. Пример – жук-голиаф из подсемейства бронзовки, обитающий в Африке. Длина его тела достигает 11 см.

4) Верно утверждение. Примером служит любая горная река.

5) Не стоит относиться к этой задаче всерьез. Для точного построения отрицания потребуется сначала строго определить, что такое бутерброд. Например, может ли он вообще не содержать масла? Мы предполагаем, что при любом определении верным окажется отрицание, но для приведения примера может потребоваться тренировка.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.9. Рассмотрим два утверждения:

А: В этой корзине все грибы съедобные.

Б: В этой корзине есть хотя бы один съедобный гриб.

Могут ли быть верными: 1) оба утверждения; 2) ровно одно из них; 3) ни одного?

Задача 2.10. Является ли высказывание «В этой корзине некоторые грибы съедобные» отрицанием высказывания «В этой корзине некоторые грибы ядовитые»?

Задача 2.11. Нарисуйте с помощью кругов Эйлера иллюстрацию к каждому высказыванию. Есть ли среди иллюстраций одинаковые? Одинаков ли смысл соответствующих высказываний?

1. Все хоббиты живут в норах.
2. Все жители нор – хоббиты.
3. Некоторые кошки серые.
4. Некоторые серые существа – кошки.

Задача 2.12. Когда учительница ругала Дениса за плохой почерк, он сказал: «У всех великих людей был плохой почерк, значит, я великий человек». Прав ли он?

Задача 2.13. Шерлок Холмс допросил Зайца, Волка и Лису по делу о съедении Колобка. Подозреваемые заявили:

Заяц: «Хотя бы один из нас съел Колобка».

Волк: «Хотя бы один из нас не ел Колобка».

Лиса: «Хотя бы один из нас сказал правду».

Как известно, Колобка съела Лиса. Кто сказал правду, а кто солгал?

Задача 2.14. Комиссия посетила больницу и составила отчет, в котором не было ни одного правдивого утверждения.

«Все врачи имеют достаточный опыт. Некоторые врачи никогда еще не ставили неправильного диагноза. Никто из врачей не опаздывает на работу. Все пациенты довольны лечением. Ни один из них не жалуется на бытовые условия. Некоторые пациенты выздоравливают за один день».

Напишите, как выглядел бы честный отчет.

Задача 2.15. В комнате собрались несколько жителей острова рыцарей и лжецов. Трое из них сказали следующее:

– Нас тут не больше трех человек. Все мы лжецы.

– Нас тут не больше четырех человек. Не все мы лжецы.

– Нас тут пятеро. Лжецов среди нас не меньше трех.

Сколько в комнате человек и сколько из них лжецов?

Задача 2.16. Предположим, что справедливы следующие утверждения:

• Среди людей, имеющих телевизоры, не все являются малярами.

• Люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли отсюда, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

Занятие 3
Вдоль по Африке, или Примеры для некоторых и контрпримеры для всех

Но папочка и мамочка уснули вечерком,
А Танечка и Ванечка – в Африку бегом, —
В Африку!
В Африку!

К. И. Чуковский

Школьники часто начинают решение задачи с поиска подходящего примера. Но тут встают три вопроса. Как такой пример подобрать? В каких случаях достаточно привести один пример для полного решения задачи? Что делать в остальных случаях? На этом занятии мы постараемся научиться отвечать на самый простой вопрос, но от этого не менее важный: на второй. Умение отличать решенную задачу от нерешенной – основа математической культуры. Отвечать на первый вопрос помогут другие выпуски нашей серии, а на третий – только годы занятий.

При составлении этого занятия мы вновь постарались учесть интересы разнородного по составу кружка. Вопрос применимости примеров и контрпримеров актуален прежде всего для начинающих, сложность задач для самостоятельного решения на приведение примера разнообразна, а рассуждения про пустое множество и парадоксы про Деда Мороза достаточно сложны. Чисто логические вопросы можно разбавить конструктивами по вкусу.

Во введении обсуждается применимость примеров (в том числе контрпримеров) к доказательству и опровержению частных и общих высказываний. Истинность таких высказываний предлагается определить и в большинстве задач. Но мы сознательно нарушили чистоту жанра, включив в занятие задачи 3.6 и 3.7 с вопросом «можно или нельзя?», в которых фактически требуется определить, что верно: частное высказывание или его отрицание.

Надеемся, что пяти- и шестиклассникам будет интересно разыграть сценку с Танечкой и Ванечкой в начале занятия. Текст четырем «артистам» стоит выдать заранее, но учить его наизусть незачем, пусть подглядывают в шпаргалки. Таблицу рекомендуем изобразить на доске, можно с сокращениями.

Более опытных кружковцев могут заинтересовать два сюжета. Первый связан с гипотезами Гольдбаха (задача 3.2). Это уникальный случай, когда формулировка совсем недавнего выдающегося математического достижения понятна школьнику. Участники кружка могут совместными усилиями проверить гипотезу Гольдбаха для чисел из первой сотни (если каждому поручить свой отрезок числового ряда), осознать необходимость доказательства, а затем узнать историю проблемы и вместе порадоваться успеху Хельфготта.

Конец ознакомительного фрагмента.